Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, О характеристике выпуклых μ -компактных множеств, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:37:42

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О характеристике выпуклых μ -компактных множеств

М. Е. Широков

Изучению свойств компактных множеств в контексте выпуклого анализа посвящена обширная литература (см. [1] и библиографию в этой книге). Естественно возникают вопросы о возможности обобщения результатов о свойствах выпуклых компактов на некомпактные множества. Одно из таких обобщений рассмотрено в [2], где определен класс множеств, названных μ -компактными. В [2], [3] показано, что на этот класс множеств, включающий в себя как все выпуклые компакты, так и некоторые важные для приложений некомпактные множества, распространяются многие результаты теории Шоке [1] и теории Вестерстрёма–О’Брайена [4], [5]. В настоящей работе дана характеристика выпуклого μ -компактного множества в терминах свойств функций, определенных на этом множестве.

Везде далее $\mathcal{A}$ – ограниченное метризуемое выпуклое подмножество локально выпуклого топологического пространства, являющееся полным сепарабельным метрическим пространством. Пусть $C(\mathcal{A})$ – множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathcal{A}$, а $M(\mathcal{A})$ – множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [6]. Будем обозначать $\overline{co} f$ выпуклое замыкание функции f [7] (нижнюю обертывающую в терминах [1]).

Каждой мере $\mu \in M(\mathcal{A})$ можно сопоставить ее барицентр $\mathbf{b}(\mu)$, определяемый интегралом Петтиса (см. [6]):

$$\mathbf{b}(\mu) = \int_{\mathcal{A}} x \mu(dx) \in \mathcal{A}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\mathcal{A}$ называется μ -компактным, если прообраз любого компактного подмножества множества $\mathcal{A}$ при барицентрическом отображении (1) является компактным подмножеством множества $M(\mathcal{A})$.

Любое компактное множество является μ -компактным. Действительно, из компактности $\mathcal{A}$ следует компактность $M(\mathcal{A})$ [6]. В [2], [3] доказана μ -компактность следующих некомпактных выпуклых замкнутых множеств:

- ограниченные части положительных конусов в банаховом пространстве l_1 и в банаховом пространстве $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;
- ограниченное по вариации множество борелевских мер на *любом* полном сепарабельном метрическом пространстве, снабженное топологией слабой сходимости;

- ограниченное по норме множество положительных линейных операторов в банаховых пространствах l_1 и $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, снабженное сильной операторной топологией.

В частности, μ -компактами являются множество вероятностных мер на любом полном сепарабельном метрическом пространстве, снабженное топологией слабой сходимости, множество квантовых состояний и множество квантовых операций, снабженное сильной операторной топологией [8].

Отметим, что свойство μ -компактности выпуклого множества не является чисто топологическим, но отражает определенное соотношение между топологией и выпуклой структурой этого множества [3].

Как оказалось, класс выпуклых μ -компактов может быть охарактеризован как класс множеств, для которых операция выпуклого замыкания функции обладает определенным свойством непрерывности по отношению к поточечно сходящимся монотонным последовательностям функций.

ТЕОРЕМА. *Следующие свойства равносильны:*

- (i) множество $\mathcal{A}$ является μ -компактным;
- (ii) для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ функций из $C(\mathcal{A})$, поточечно сходящейся к функции f_0 из $C(\mathcal{A})$, последовательность $\{\overline{\text{co}} f_n\}$ поточечно сходится к функции $\overline{\text{co}} f_0$;
- (iii) для любой возрастающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций на $\mathcal{A}$, поточечно сходящейся к функции f_0 , последовательность $\{\overline{\text{co}} f_n\}$ поточечно сходится к функции $\overline{\text{co}} f_0$.

Если эти свойства выполнены, то для любой убывающей последовательности $\{f_n\}$ полунепрерывных снизу ограниченных функций на $\mathcal{A}$, поточечно сходящейся к полунепрерывной снизу ограниченной функции f_0 , последовательность $\{\overline{\text{co}} f_n\}$ поточечно сходится к функции $\overline{\text{co}} f_0$.

Доказательство этой теоремы приведено в [9], некоторые ее применения в квантовой теории информации рассмотрены в [10].

Список литературы

- [1] E. M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **57**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971. [2] М. Е. Широков, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 441–458; англ. пер.: M. E. Shirokov, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 395–409. [3] В. Ю. Протасов, М. Е. Широков, “Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения”, *Матем. сб.* (в печати). [4] J. Vesterstrøm, *J. London Math. Soc.* (2), **6** (1973), 289–297. [5] R. O’Brien, *Math. Ann.*, **223**:3 (1976), 207–212. [6] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977; пер. с англ.: P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York–London–Sydney–Toronto, 1968. [7] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач, Нелинейный анализ и его приложения*, Наука, М., 1974. [8] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, М.–Ижевск, 2003; пер. с англ.: A. S. Holevo, *Statistical structure of quantum theory*, Lect. Notes Phys. Monogr., **67**, Springer-Verlag, Berlin, 2001. [9] М. Е. Широков, *Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики: Сборник научных трудов МФТИ*, М., 2008, 193–203. [10] М. Е. Широков, [arXiv: 0804-1515](https://arxiv.org/abs/0804.1515), 2008.

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
10.07.2008