Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, Арифметические проблемы теории характеров Дирихле, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 4, 43–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:20:11

УДК 511

Арифметические проблемы теории характеров Дирихле**А. А. Карацуба**

Дается обзор результатов, связанных с распределением значений характеров Дирихле на редких множествах натурального ряда чисел.

Библиография: 99 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	44
Глава I. Вспомогательные утверждения	54
§ 1. Оценки полных сумм характеров	54
§ 2. Решето Виноградова	54
Глава II. Линейные суммы характеров с простыми числами	56
§ 1. Суммы по подряд идущим простым числам	56
§ 2. Суммы по простым числам, принадлежащим арифметической прогрессии	57
§ 3. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях	60
Глава III. Нелинейные суммы характеров с простыми числами	64
§ 1. Суммы по подряд идущим простым числам	64
§ 2. Суммы по простым числам, принадлежащим арифметической прогрессии	65
Глава IV. Суммы характеров с весами	73
§ 1. Линейные суммы с весами	73
§ 2. Нелинейные суммы символов Лежандра с весами	76
§ 3. Нелинейные суммы характеров с весами	76
Глава V. Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях	78
§ 1. Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях	78
§ 2. Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях	80
Глава VI. Некоторые специальные вопросы теории характеров, нерешенные проблемы и гипотезы	81
Список литературы	87

Введение

При доказательстве теоремы о бесконечности множества простых чисел, лежащих в арифметической прогрессии, первый член которой взаимно прост с разностью прогрессии, Л. Дирихле ввел функцию целочисленного аргумента, которая позднее стала называться характером Дирихле и которая нашла многочисленные применения в математике. Есть два способа определения характера Дирихле, именно, аксиоматический и конструктивный. Начнем с первого, хотя сам Дирихле определял характеры конструктивно (см., например, [1; с. 296–309]). Везде ниже часто вместо “характер Дирихле” будем говорить “характер”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Характером называется комплекснозначная функция $\chi(n)$, областью определения которой является множество целых чисел $\mathbb{Z}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $\chi(1) = 1$;

- 2) $\chi(n)$ – вполне мультипликативная функция, т.е. для любых $n, m \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$\chi(nm) = \chi(n)\chi(m);$$

- 3) существует $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, такое, что $\chi(n)$ – периодическая функция с периодом k , т.е. для любого $n \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$\chi(n+k) = \chi(n).$$

Легко доказать, что все периоды $\chi(n)$ кратны наименьшему периоду $k \geq 1$, который называется *главным* периодом. Число k называется также *основным модулем* $\chi(n)$ или просто модулем $\chi(n)$, а $\chi(n)$ – характером по модулю k . Иногда вместо $\chi(n)$ пишут $\chi(n; k)$. Везде ниже модуль характера будет основным.

Пусть $\chi(n)$ – характер по модулю k и $\varphi(k)$ – функция Эйлера ($\varphi(k)$ равняется количеству натуральных чисел, не превосходящих k и взаимно простых с k). Из определения характера и теоремы Эйлера следует, что если $(n, k) = 1$, то

$$1 = \chi(n^{\varphi(k)}) = (\chi(n))^{\varphi(k)}, \quad (1)$$

т.е. $\chi(n)$ есть корень степени $\varphi(k)$ из единицы. Кроме того, если $(n, k) = d > 1$, то $\chi(n) = 0$. Действительно, в этом случае $k = k_1 d$, $1 \leq k_1 < k$, так что k_1 не является периодом $\chi(n)$. Поэтому найдется такое $a \in \mathbb{Z}$, что

$$\chi(a + k_1) \neq \chi(a), \quad \lambda = \chi(a + k_1) - \chi(a) \neq 0.$$

Следовательно,

$$\lambda \chi(d) = \chi(ad + k_1 d) - \chi(ad) = \chi(ad + k) - \chi(ad) = \chi(ad) - \chi(ad) = 0,$$

т.е. $\chi(d) = 0$, $\chi(n) = \chi(n_1 d) = \chi(n_1) \chi(d) = 0$.

Главным характером по модулю k называется характер $\chi(n)$ такой, что

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n, k) = 1; \\ 0, & \text{если } (n, k) > 1. \end{cases}$$

Обычно главный характер обозначается символом $\chi_0(n)$. Из (1) и определения $\chi_0(n)$ получаем следующее равенство:

$$(\chi(n))^{\varphi(k)} = \chi_0(n).$$

Наименьшее натуральное число m такое, что

$$(\chi(n))^m = \chi_0(n),$$

называется *степенью характера* $\chi(n)$.

По модулю k существует ровно $\varphi(k)$ разных характеров. Комплексно-сопряженный к $\chi(n)$ характер обозначается символом $\overline{\chi(n)}$.

Характеры обладают свойством “ортogonalности”, которое необходимо было Дирихле при доказательстве теоремы о простых числах в арифметической прогрессии:

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv 1 \pmod{k}. \end{cases} \quad (2)$$

В последней сумме суммирование ведется по всем $\varphi(k)$ характерам по модулю k . Пользуясь этой формулой, можно аналитически выделять целые числа n , принадлежащие арифметической прогрессии вида $n \equiv l \pmod{k}$, $(l, k) = 1$. Действительно, полагая $l_1 l \equiv 1 \pmod{k}$, $1 \leq l_1 < k$, находим:

$$\delta_0(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \bmod k} \chi(n) \chi(l_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv l \pmod{k}; \\ 0, & \text{если } n \not\equiv l \pmod{k}. \end{cases}$$

Следующая формула является “двойственной” к (2):

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{n=1}^k \chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0; \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Теория характеров Дирихле, а также их применения в различных разделах математики хорошо известны (см., например, [1]–[10]). Меньше известны чисто арифметические проблемы теории характеров, которым и посвящена настоящая статья.

Арифметические проблемы связаны, в основном, с характерами, модуль k которых равен простому числу. Везде далее будем считать q нечетным простым числом и $\chi(n)$ – характером Дирихле по модулю q . Нетрудно понять, что $\chi(n)$ можно определить также следующими соотношениями (конструктивное определение $\chi(n)$):

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}; \\ e^{2\pi i \frac{a \operatorname{ind} n}{q-1}}, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь a – целое число, $0 \leq a < q-1$, $\operatorname{ind} n$ – индекс числа n по модулю q при основании g , где g – наименьший первообразный корень по модулю q . При $a = 0$ получаем главный характер по модулю q , при $a = 1, \dots, q-2$ получаем

$\varphi(q) - 1$ разных неглавных характеров по модулю q . В частности, при $a = \frac{q-1}{2}$ получаем характер, который называется *символом Лежандра* и имеет специальное обозначение $\left(\frac{n}{q}\right)$:

$$\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{квадратичный вычет по модулю } q; \\ -1, & \text{если } n - \text{квадратичный невычет по модулю } q; \\ 0, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Заметим, что каждый характер по модулю q , определенный ранее аксиоматически, совпадает с функцией $\chi(n)$ формулы (3) при некотором a , $0 \leq a < q-1$.

Наиболее важными арифметическими проблемами, которые связаны с характерами, являются проблемы распределения степенных вычетов и невычетов по заданному модулю и проблемы распределения первообразных корней по заданному модулю. Пусть n – делитель $q-1$. Число a , не кратное q , называется вычетом степени n по модулю q , если существует b такое, что

$$a \equiv b^n \pmod{q}.$$

В противном случае a называется невычетом степени n по модулю q . При $n = 2$ вычеты (невычеты) называются квадратичными, при $n = 3$ – кубическими, при $n = 4$ – биквадратичными. Натуральное число g называется первообразным корнем по модулю q , если все $q-1$ чисел $1 = g^0, g^1, g^2, \dots, g^{q-2}$ попарно несовместимы по модулю q , т. е.

$$g^r \not\equiv g^s \pmod{q}, \quad 0 \leq r, s \leq q-2, \quad r \neq s.$$

Первые вопросы о распределении квадратичных вычетов и невычетов поставлены Эйлером и Гауссом; им же принадлежат и первые теоремы, отвечающие на эти вопросы, в частности теорема о том, что в приведенной системе вычетов по модулю q содержится $\frac{q-1}{2}$ квадратичных вычетов и $\frac{q-1}{2}$ квадратичных невычетов.

Вопрос о квадратичных вычетах и невычетах в подмножествах A множества приведенной системы вычетов по модулю q легко сводится к вопросу о верхней грани модуля суммы символов Лежандра. Действительно, пользуясь определением символа Лежандра, находим:

$$\delta(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{n}{q}\right) \right) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{квадратичный вычет по модулю } q; \\ 0, & \text{если } n - \text{квадратичный невычет по модулю } q; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Поэтому, если $A \subseteq [1, q-1]$, $\|A\|$ – количество чисел множества A , $V(A)$ и $N(A)$ – соответственно число квадратичных вычетов и число квадратичных невычетов в множестве A , то получаем:

$$V(A) = \sum_{n \in A} \delta(n) = \frac{1}{2} \|A\| + \frac{1}{2} S(A), \quad (4)$$

$$N(A) = \frac{1}{2} \|A\| - \frac{1}{2} S(A), \quad (5)$$

где

$$S(A) = \sum_{n \in A} \left(\frac{n}{q} \right).$$

Следовательно, если доказать, что

$$|S(A)| \leq \|A\| \Delta, \quad 0 < \Delta < 1,$$

то формулы (4), (5) станут асимптотическими с главным членом $\frac{1}{2} \|A\|$ и остатком, абсолютная величина которого не превосходит $\frac{1}{2} \|A\| \Delta$.

Точно так же решается задача о степенных вычетах по модулю q произвольной степени $n \geq 2$, $n \mid (q-1)$. Действительно, число a , $(a, q) = 1$, является вычетом степени n по модулю q , если

$$a \equiv x^n \pmod{q}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{ind } a \equiv n \text{ ind } x \pmod{(q-1)},$$

и так как $n \mid (q-1)$, то

$$\text{ind } a \equiv 0 \pmod{n}. \quad (6)$$

Соотношение (6) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы a было вычетом степени n по модулю q . Пусть $a \in A$ и $V_n(A)$ – количество тех a , которые являются вычетами степени n по модулю q . Тогда, пользуясь (6) и свойством полной линейной тригонометрической суммы, находим:

$$\begin{aligned} V_n(A) &= \sum_{a \in A} \frac{1}{n} \sum_{b=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{b \text{ind } a}{n}} = \frac{1}{n} \|A\| + \frac{1}{n} \sum_{b=1}^{n-1} \sum_{a \in A} e^{2\pi i \frac{b \text{ind } a}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \|A\| + \frac{1}{n} \sum_{b=1}^{n-1} \sum_{a \in A} \chi(a), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\chi(a) = \chi_b(a) = e^{2\pi i \frac{b \text{ind } a}{n}} = e^{2\pi i \frac{b_1 \text{ind } a}{q-1}},$$

$0 < b_1 = b(q-1)/n < q-1$, т. е. $\chi(a)$ – неглавный характер по модулю q . Если доказать, что

$$\max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{a \in A} \chi(a) \right| \leq \|A\| \Delta,$$

то из (7) будет следовать формула

$$V_n(A) = \frac{1}{n} \|A\| + \frac{n-1}{n} \theta \|A\| \Delta, \quad |\theta| \leq 1, \quad (8)$$

которая будет асимптотической, если

$$(n-1)\Delta < 1.$$

Подобным образом решается задача о количестве первообразных корней в A .

Для того чтобы натуральное число a было первообразным корнем по модулю q , необходимо и достаточно выполнение следующего соотношения:

$$(\text{ind } a, q - 1) = 1.$$

Поэтому, если $P(A)$ – количество первообразных корней в $A \subseteq [1, q - 1]$, то, пользуясь известным свойством функции Мёбиуса $\mu(d)$ и свойством полной линейной тригонометрической суммы, последовательно находим:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\substack{a \in A \\ (\text{ind } a, q-1)=1}} 1 = \sum_{a \in A} \sum_{d | (\text{ind } a, q-1)} \mu(d) \\ &= \sum_{d | (q-1)} \mu(d) \sum_{\substack{a \in A \\ \text{ind } a \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \sum_{d | (q-1)} \mu(d) \sum_{a \in A} \frac{1}{d} \sum_{b=0}^{d-1} e^{2\pi i \frac{b \text{ind } a}{d}} \\ &= \sum_{d | (q-1)} \mu(d) \sum_{a \in A} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d} \sum_{b=1}^{d-1} \chi_b(a) \right), \end{aligned}$$

где $\chi_b(a) = e^{2\pi i \frac{b \text{ind } a}{d}}$ – неглавный характер по модулю q .

Следовательно, для $P(A)$ получаем формулу:

$$P(A) = \|A\| \sum_{d | (q-1)} \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{d | (q-1)} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{b=1}^{d-1} \sum_{a \in A} \chi_b(a).$$

Далее имеем:

$$\sum_{d | (q-1)} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(q-1)}{q-1}.$$

Если $q - 1 = q_1^{\alpha_1} \cdots q_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение $q - 1$ на простые сомножители, то

$$\sum_{d | (q-1)} |\mu(d)| = 1 + C_k^1 + \cdots + C_k^k = 2^k.$$

Тем самым,

$$P(A) = \frac{\varphi(q-1)}{q-1} \|A\| + \theta \cdot 2^k \|A\| \Delta, \quad (9)$$

где $|\theta| \leq 1$ и $\max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{a \in A} \chi(a) \right| = \|A\| \Delta$. Так как при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ и $q \geq q_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$k \leq (1 + \varepsilon) \frac{\ln q}{\ln \ln q},$$

и, кроме того,

$$\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \geq \frac{c}{\ln \ln q}, \quad c > 0,$$

то формула (9) будет асимптотической, если

$$\Delta \leq 2^{-(1+\varepsilon)\frac{\ln q}{\ln \ln q}}, \quad q \geq q_2(\varepsilon).$$

Итак, в приведенных задачах достаточно получить оценку вида

$$\max_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{a \in A} \chi(a) \right| \leq \|A\| \Delta \quad (10)$$

с соответствующим Δ , чтобы формулы (4), (5), (8), (9) были асимптотическими. Поэтому основной проблемой в арифметических приложениях характеров Дирихле является проблема получения оценки (10) с возможно меньшим Δ . Оценки вида (10) можно трактовать также как ответ на вопрос о распределении значений характеров на множествах целых чисел той или иной арифметической природы (на множествах A).

Частным видом суммы, стоящей в левой части (10), является следующая:

$$S = S(f; X) = \sum_{x=1}^X \chi(f(x)). \quad (11)$$

Здесь χ – неглавный характер по модулю q , X – натуральное число, $f(x)$ – целозначная функция.

Так как тривиально $|S| \leq X$, то, тем самым, основной проблемой в рассматриваемых вопросах является проблема получения оценок вида

$$|S| \leq X \Delta \quad (12)$$

с возможно меньшим количеством слагаемых в S , т. е. с возможно меньшим X по отношению к q , и с возможно меньшим $\Delta \leq 1$. Именно в такой форме мы будем рассматривать оценки сумм характеров в этой статье.

Если χ – символ Лежандра, $f(x) = x + a$, $X = q$, то из упомянутой выше теоремы Эйлера–Гаусса (с. 46) получаем:

$$S = 0.$$

Сумму $S = S(f; X)$ с $f(x) = x + a$ далее будем обозначать символом $S_0(X)$.

В 1918 г. И. М. Виноградов [11], [12] и независимо Г. Пойя [13] доказали, что

$$|S_0(X)| < \sqrt{q} \ln q. \quad (13)$$

Позднее неравенства, подобные (13), с многочленом $f(x)$ произвольной степени n , $f(x) \not\equiv g^m(x) \pmod{q}$, где m – степень характера χ , $X = q$, были доказаны Д. Морделлом, Г. Хассе, А. Вейлем. Окончательным результатом этого направления исследований явилась оценка Хассе–Вейля:

$$\left| \sum_{x=1}^q \chi(f(x)) \right| \leq (n-1)\sqrt{q}. \quad (14)$$

Все упомянутые оценки были перенесены Г. Дэвенпортом [14] на суммы характеров в конечных полях произвольной фиксированной степени. Замечу также,

что оценки вида (14) были доказаны Л. Карлицом и С. Учиямой [15] для аддитивного характера $\chi = \psi$ и рациональной функции $f(x) = x + a/x$ и Г. И. Перельмутером [16] для сумм слагаемых вида $\chi(R(x))\psi(\Phi(x))$, где $R(x)$ и $\Phi(x)$ – рациональные функции. Из результатов последней работы, в частности, следует оценка неполной суммы характеров вида

$$\left| \sum_{x=1}^X \chi(f(x)) \right| \leq n\sqrt{q} \ln q.$$

Здесь, как и выше, $f(x) \not\equiv g^m(x) \pmod{q}$, $1 \leq X < q$. Более подробные сведения об оценках полных сумм характеров, т. е. сумм, в которых переменная суммирования пробегает полную систему вычетов по модулю q , можно найти в [6].

В 1938 г. И. М. Виноградов стал рассматривать суммы S , в которых суммирование ведется по простым числам. Пользуясь созданным им методом, которым он решил проблему Гольдбаха, Виноградов [17] получил следующую оценку:

$$|S_1(X)| = \left| \sum_{p \leq X} \chi(p+a) \right| \ll X^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{\sqrt[3]{X}}}. \quad (15)$$

Здесь $(a, q) = 1$, ε – произвольное положительное число, постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε . Оценка (15) будет нетривиальной, если $X \geq q^{3+\varepsilon'}$, $\varepsilon' > 0$ – любое фиксированное число. В 1943 г. Виноградов [18] уточнил (15) и, кроме того, оценил нелинейную сумму характеров с простыми числами, доказав, что

$$|S_1(X)| = \left| \sum_{p \leq X} \chi(p+a) \right| \ll X^{1+\varepsilon} G, \quad (16)$$

$$|S_2(X)| = \left| \sum_{p \leq X} \chi(p(p+a)) \right| \ll X^{1+\varepsilon} G, \quad (17)$$

где

$$G = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{X}} + X^{-\frac{1}{6}}.$$

Последние оценки будут нетривиальными, если $X \geq q^{1+\varepsilon'}$. Отметим, что оценки (15)–(17) представляют исключительный интерес, так как мало что известно даже о распределении простых чисел p в коротких арифметических прогрессиях, т. е. в прогрессиях вида $p \equiv l \pmod{q}$, $(l, q) = 1$, $p \leq X \leq q^A$, A – фиксированное положительное число.

В 1952 г. И. М. Виноградов [19] доказал, что

$$|S_1(X)| \ll X^{1+\varepsilon} (q^{\frac{3}{4}} X^{-1})^{\frac{1}{4}}. \quad (18)$$

Из этой оценки видно, что она становится нетривиальной, если $X \geq q^{0.75+\varepsilon'}$. Это совершенно удивительный результат. Если к указанной проблеме применять аналитический метод Римана, то естественно ожидать нетривиальной

оценки $|S_1(X)|$ в том случае, когда в распределении простых чисел p в арифметических прогрессиях с разностью q наступит “порядок”, а это будет, самое лучшее, при $X \geq q^{2+\varepsilon}$, так как из расширенной гипотезы Римана следует, что

$$\pi(X; q, l) = \frac{\pi(X)}{q-1} + O(X^{0.5+\varepsilon}),$$

т. е.

$$\pi(X; q, l) \sim \frac{\pi(X)}{q-1} \quad \text{при} \quad X \geq q^{2+\varepsilon'}.$$

Правда, если S_1 представить в виде суммы по нулям соответствующих L -функций Дирихле и только потом воспользоваться расширенной гипотезой Римана, то тогда получится оценка $|S_1|$, нетривиальная уже при $X \geq q^{1+\varepsilon'}$, т. е. упомянутый выше результат Виноградова 1943 г.

Казалось, что получилось то, чего не может быть. Ю. В. Линник в 1971 г. писал по этому поводу: “Эта оценка имеет принципиальное значение, так как по глубине превосходит то, что дает непосредственное применение расширенной гипотезы Римана, и, по-видимому, в этом направлении является истиной более глубокой, чем указанная гипотеза (если гипотеза верна)” (см. [20; с. 29]). С работой [19] связан еще один, отмеченный только в [21], факт. Если применить основную идею этой работы к оценке $|S_0(X)|$, то нетривиальный результат получится уже при $X \geq q^{0.375+\varepsilon}$.

В 1953 г. И. М. Виноградов [22] уточнил (18), доказав, что

$$|S_1(X)| \ll X^{1+\varepsilon} ((q^{\frac{3}{4}} X^{-1})^{\frac{1}{3}} + X^{-0.1}).$$

Работы Виноградова по оценкам сумм характеров с простыми числами были продолжены Г. И. Перельмутером [23], который нетривиально оценил нелинейные суммы самого общего вида при числе слагаемых X больше, чем $q^{1+\varepsilon}$.

В 1957 г. Д. Берджесс [24] нетривиально оценил $|S_0(X)|$ при $X \geq q^{0.25+\varepsilon}$ (см. также [25]–[28]). Метод Д. Берджесса был применен Г. Дэвенпортом и Д. Льюисом [29] к оценкам сумм характеров в конечных полях степени n ; они нетривиально оценили такие суммы при условии, что каждая координата переменной суммирования принимает H последовательных значений целых чисел, где

$$H > q^{\frac{n}{2n+2}+\varepsilon}.$$

С ростом n результат теоремы ухудшается и стремится к старому результату Дэвенпорта [14]. Этой же задаче посвящена работа Берджесса [28], в которой при $n \geq 3$ получен аналогичный результат; при $n = 2$ здесь же получена граница для H , подобная его границе для полей первой степени, именно, $H > q^{0.25+\varepsilon}$.

В 1968 г. автором [30] был разработан новый метод, который позволил получить нетривиальную оценку суммы характеров в конечных полях произвольной фиксированной степени $n \geq 1$ при $H > q^{0.25+\varepsilon}$ (см. также [31]). Развивая свой метод и соединяя его с методом Виноградова, автор [32], [33] нетривиально оценил $|S_1(X)|$ при $X \geq q^{0.5+\varepsilon}$. Наконец, в 1978 г. удалось нетривиально оценить и нелинейные суммы символов Лежандра с простыми числами типа $S_2(X)$ при $X \geq q^{0.75+\varepsilon}$ (см. [34], [35]).

Идея метода работы [30] такова. Рассмотрим двойную сумму

$$W = \sum_x^X \sum_y^Y \chi(x+y),$$

где x и y пробегает произвольные множества из X и, соответственно, Y различных по модулю q чисел. Если $Y \geq q^\varepsilon$, $X \geq q^{0.5+\varepsilon}$, то для $|W|$ можно получить нетривиальную оценку вида

$$|W| \ll XYq^{-\delta}, \quad (19)$$

где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε . Действительно, выбирая подходящее натуральное число $k = k(\varepsilon)$ и применяя оценку Хассе–Вейля (14), найдем:

$$\begin{aligned} |W|^{2k} &\ll X^{2k-1} \sum_{x=1}^q \left| \sum_y^Y \chi(x+y) \right|^{2k} \\ &\ll X^{2k-1} (qY^k + \sqrt{q}Y^{2k}) = (XY)^{2k} \Delta, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{q}{XY^k} + \frac{\sqrt{q}}{X}.$$

Отсюда следует указанная оценка $|W|$.

Во многих задачах вместо условия $X \geq q^{0.5+\varepsilon}$ выполняются условия $XY \geq q^{0.5+\varepsilon}$, $X \geq q^\varepsilon$, $Y \geq q^\varepsilon$ и известно, что переменная y пробегает сплошной промежуток суммирования. Прямо к W предыдущие рассуждения применить нельзя, например, если $X = q^{3/8+\varepsilon}$, $Y = q^{1/8+\varepsilon}$. Однако, пользуясь тем, что интервал суммирования по y сплошной, можно в сумме W по y сделать сдвиг вида $y \rightarrow y + uv$, где u и v принимают соответственно $U = Yq^{-\varepsilon_1}$ и $V = q^{\varepsilon_2}$ значений, $\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$. Тогда получим

$$W \leq Y(UV)^{-1}|W_1| + O(XYq^{-\varepsilon_1+\varepsilon_2}),$$

где

$$W_1 = \sum_x^X \sum_{u=1}^U \sum_{v=1}^V \chi(x+uv).$$

Далее находим:

$$|W_1| \ll \sum_x^X \sum_{u=1}^U \left| \sum_{v=1}^V \chi(xu^{-1} + v) \right| \ll \sum_z^Z c(z) \left| \sum_{v=1}^V \chi(z+v) \right|.$$

Здесь уже переменная z принимает Z значений,

$$Z \asymp XU \geq q^{0.5+\varepsilon-\varepsilon_1},$$

и можно применять вышеизложенные соображения, которые приводят к оценке (19). Заметим, что очень точное определение понятия “метод” дали Д. Пойя и Г. Сегё (см. [36; с. 11]): “Идея, примененная однажды, порождает искусственный прием, примененная дважды, она становится методом”.

Новый метод позволил получить целый ряд новых результатов и, прежде всего, в оценках сумм характеров, определенных на редких последовательностях натурального ряда чисел. Еще в 1966 г. И. М. Виноградов [37] оценил сумму типа $S_1(X)$, но с условием, что простые числа, по которым идет суммирование, принадлежат арифметической прогрессии. Продолжением этих исследований явились работы [38], [39], [21], где получены более точные и более общие результаты. С 1971 г. автор стал изучать распределение значений характеров на аддитивных последовательностях (см. [40], [41]). Первые результаты в этом направлении получены Г. Дэвенпортом и П. Эрдёшем [42] и П. Эрдёшем и Н. Шапиро [43]. Теорема Дэвенпорта–Эрдёша будет приведена в гл. I. Теорема Эрдёша–Шапиро такова: *справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} \chi(u+v) \right| \leq \sqrt{q} \sqrt{\|S\| \|T\|},$$

где $\|S\|$ и $\|T\|$ – количество чисел в S и T соответственно.

И, наконец, несколько необычными выглядят работы по оценкам сумм характеров с весами и их арифметические приложения (см. [44]–[46]). Здесь также главную роль играет метод работы [30] и специфика рассматриваемых сумм.

Заканчивая введение, хочу подчеркнуть, что применения метода из [30], а также технических приемов из [32], [33], [38], [40] к решению ряда задач теории чисел помещены в учебнике [47] в качестве упражнений (см. также [5], [48], [4], [49]) и в настоящее время часто используются в исследованиях по теории характеров и их приложениям.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. На протяжении всей статьи будем считать, что q – нечетное простое число, p – простое число; $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \dots$ – произвольные положительные числа, не превосходящие 0.01, в разных утверждениях, вообще говоря, разные; $\varphi(n)$ – функция Эйлера, $\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $\Lambda(n)$ – функция Мангольда, $\tau_k(n)$ – число решений в натуральных числах $n_1, \dots, n_k$ уравнения $n_1 \cdots n_k = n$; $\tau_2(n) = \tau(n)$ – число делителей числа n ; $\pi(x)$ – количество простых чисел, не превосходящих x ; $\pi(x; Q, l)$ – количество простых чисел, не превосходящих x и лежащих в арифметической прогрессии вида $p \equiv l \pmod{q}$, $0 < l < Q$, $(l, Q) = 1$; $\chi(n)$, $\chi_1(n)$, $\chi_2(n)$ – неглавные характеры Дирихле по модулю q ; $\chi_0(n)$ – главный характер Дирихле по модулю q ; $\left(\frac{n}{q}\right)$ – символ Лежандра; g – первообразный корень по модулю q ; $\text{ind } n = \text{ind}_g n$ – индекс числа n по модулю q при основании g ; функции Чебышёва $\psi(x)$, $\psi(x, \chi)$, $\psi(x; Q, l)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n), & \psi(x, \chi) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n), \\ \psi(x; Q, l) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{Q}}} \Lambda(n); \end{aligned}$$

запись $A \ll B$ означает неравенство $|A| \leq cB$, где $c > 0$, c – константа; то же самое означает запись $A = O(B)$; $A \asymp B$ означает двустороннее неравенство $A \ll B \ll A$.

В каждой главе теоремы и леммы имеют свою нумерацию.

Глава I. Вспомогательные утверждения

В этой главе сформулированы необходимые для дальнейшего вспомогательные утверждения – леммы.

§ 1. Оценки полных сумм характеров

Полной суммой будем называть сумму (11), в которой $X = q$.

ЛЕММА 1. Пусть χ – мультипликативный характер поля $\mathbb{F}_q$, имеющий порядок $m > 1$, и пусть $f \in \mathbb{F}_q[x]$ – нормированный многочлен положительной степени, не являющийся m -й степенью другого многочлена. Если d – число различных корней многочлена f в его поле разложения над $\mathbb{F}_q$, то для каждого $a \in \mathbb{F}_q$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{c \in \mathbb{F}_q} \chi(af(c)) \right| \leq (d-1)\sqrt{q}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $1 \leq X < q$, r – натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\sum_{\lambda=1}^q \left| \sum_{x=1}^X \chi(\lambda + x) \right|^{2r} \leq (4r)^{r+1} X^r q + 2r X^{2r} \sqrt{q}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $a \not\equiv b \pmod{q}$, $1 \leq X < q$, r – натуральное число. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q \left| \sum_{x=1}^X \chi_1(\lambda + \mu x + a) \chi_2(\lambda + \mu x + b) \right|^{2r} \\ &\leq r^{2r} X^r q^2 + 6r^2 X^{2r} q. \end{aligned}$$

Лемма 1 – оценка Хассе–Вейля, ее доказательство см., например, в [6; с. 279]. Лемма 2 принадлежит Г. Дэвенпорту и П. Эрдёшу [42]. Лемма 3 для вещественного характера (символа Лежандра) доказана в [35; с. 316–317]. Для произвольных χ_1, χ_2 доказательство такое же, следует только в соответствующем месте рассуждений воспользоваться леммой 2.

§ 2. Решето Виноградова

Следующие три леммы, принадлежащие И. М. Виноградову, позволяют сводить сумму по простым числам к кратным суммам.

ЛЕММА 4. Пусть $0 < c \leq 1/6$, $0 < \sigma \leq 1/3$, $\mathbb{P}$ – произведение простых чисел, не превосходящих $H = N^\sigma$. Тогда, полагая

$$D = (\ln N)^{\frac{\ln \ln N}{\ln(1+c)}},$$

делители d чисел $\mathbb{P}$, не превосходящие N , можно распределить среди $K < D$ совокупностей $A_1, A_2, \dots, A_K$ со следующими свойствами:

1) числа d , принадлежащие одной и той же совокупности A_ν , обладают одним и тем же числом β простых сомножителей и, следовательно, одним и тем же значением $\mu(d) = (-1)^\beta$;

2) одна из совокупностей, пусть A_1 , которую назовем простейшей, состоит из единственного числа $d = 1$; для этой совокупности положим $\varphi = 1$ и, таким образом, будем иметь $d = \varphi = 1$;

3) каждой из оставшихся совокупностей A_ν , $\nu \geq 2$, отвечает свое φ такое, что все числа d этой совокупности удовлетворяют условию

$$\varphi < d \leq \varphi^{1+c};$$

4) для всякой совокупности A_ν , $\nu \geq 2$, при любом U с условием $0 < U \leq \varphi$ существуют две совокупности A'_ν и A''_ν (вторая из них может оказаться простейшей, т. е. $A''_\nu = A_1$) с отвечающими им значениями φ' и φ'' с условиями

$$U < \varphi' \leq UN^\sigma, \quad \varphi' \varphi'' = \varphi$$

и такие, что при некотором целом положительном B каждое число из выбранной совокупности получим ровно B раз, если из всех произведений $d'd''$, $d' \in A'_\nu$, $d'' \in A''_\nu$, выберем лишь удовлетворяющие условию $(d', d'') = 1$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbb{P}$ – произведение всех простых чисел p с условием

$$p \leq H \leq N^{\frac{1}{3}}.$$

Определим натуральное число k неравенствами

$$H^k \leq N < H^{k+1}.$$

Пусть $f(x)$ – комплекснозначная функция с условием $|f(x)| \leq f_1$ и суммы S , W_ν , $\nu = 1, \dots, k$, задаются равенствами

$$S = S(N) = \sum_{p \leq N} f(p),$$

$$W_\nu = \sum_{d_1 | \mathbb{P}} \cdots \sum_{d_\nu | \mathbb{P}} \sum_{m_1 > 0} \cdots \sum_{m_\nu > 0} \mu(d_1) \cdots \mu(d_\nu) f(d_1 \cdots d_\nu m_1 \cdots m_\nu).$$

Тогда для S справедлива следующая формула:

$$S = \alpha_1 W_1 + \cdots + \alpha_k W_k + \theta \cdot 5k \cdot 2^k f_1 N H^{-1} (\ln N)^{k-1},$$

где

$$|\alpha_\nu| \leq 2^k, \quad \nu = 1, \dots, k; \quad |\theta| \leq 1.$$

ЛЕММА 6. Пусть $\mathbb{P} = \prod_{p \leq H} p$, $Q = \prod_{H < p \leq N} p$, k – наибольшее целое число с условием $H^k \leq N$, $|\theta(x)| \leq 1$,

$$W_\nu = \sum_{d_1 | \mathbb{P}} \cdots \sum_{d_\nu | \mathbb{P}} \sum_{m_1 > 0} \cdots \sum_{m_\nu > 0} \mu(d_1) \cdots \mu(d_\nu) \theta(d_1 \cdots d_\nu m_1 \cdots m_\nu),$$

$$d_1 \cdots d_\nu m_1 \cdots m_\nu \leq N$$

$$W'_\nu = \sum_{y_1 | Q} \cdots \sum_{y_\nu | Q} \theta(y_1 \cdots y_\nu), \quad S = \sum_{p \leq N} \theta(p).$$

$$y_1 \cdots y_\nu \leq N, \mu(y_1 \cdots y_\nu) = 0$$

Тогда при некоторых $\beta_1, \dots, \beta_k, \beta'_1, \dots, \beta'_k, c$, зависящих только от k , имеем равенство

$$S = \beta_1 W_1 + \dots + \beta_k W_k + \beta'_1 W'_1 + \dots + \beta'_k W'_k + cH.$$

Доказательства лемм 4, 5 и 6 см., например, в [50; с. 221 или с. 313], [37; леммы 10 и 11], а также в [51].

Глава II. Линейные суммы характеров с простыми числами

Здесь приводятся основные утверждения, относящиеся к оценкам линейных сумм характеров с простыми числами, и следствия этих оценок.

§ 1. Суммы по подряд идущим простым числам

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть ω – произвольное число из интервала $0 < \omega < 1/2$, $(a, q) = 1$, $q^{0.5+\omega} \leq X \leq q^2$,

$$S_1(X) = \sum_{p \leq X} \chi(p+a).$$

Тогда имеет место оценка:

$$|S_1(X)| \ll Xq^{-\frac{\omega^2}{1024}},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω .

При выполнении условий теоремы 1 справедливы следствия 1–3.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $n \mid (q-1)$, $2 \leq n \leq q-2$, $0 \leq s \leq n-1$. Тогда для числа T_s тех чисел $p+a$, которые удовлетворяют условиям

$$p \leq X, \quad \text{ind}(p+a) \equiv s \pmod{n},$$

справедлива асимптотическая формула:

$$T_s = \frac{1}{n} \pi(X) + O(Xq^{-\frac{\omega^2}{1024}}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Число квадратичных вычетов и число квадратичных невычетов по модулю q вида $p+a$, $p \leq X$, равно

$$\frac{1}{2} \pi(X) + O(Xq^{-\frac{\omega^2}{1024}}).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Число первообразных корней по модулю q вида $p+a$, $p \leq X$, равно

$$\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \pi(X) + O(Xq^{-\frac{\omega^2}{1025}}).$$

Постоянные в знаках O в следствиях 1–3 зависят только от ω .

Доказательство теоремы 1 содержится в [33] (см. также [32]), доказательство следствий легко следует из теоремы 1. Заметим также, что понижающий множитель в оценке теоремы 1 и в остаточных членах асимптотических формул следствий может быть заменен на $q^{-0.02\omega^2}$.

§ 2. Суммы по простым числам, принадлежащим арифметической прогрессии

Введем необходимые в этом параграфе обозначения: A и B – абсолютные постоянные, $A \geq 1$, $B \geq 1$; Q – целое число, $(Q, q) = 1$, $1 \leq Q \leq q^A$; l и a – целые положительные числа с условиями: $(l, Q) = (a, q) = 1$, $0 \leq l \leq Q - 1$, $1 \leq a \leq q - 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ω – произвольное число из интервала $(0, \frac{1}{2})$ и X удовлетворяет неравенствам

$$Q^3 q^{0.5+\omega} \leq X \leq Q^3 q^B.$$

Тогда для суммы $S(X)$,

$$S(X) = \sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv l \pmod{Q}}} \chi(p+a),$$

справедливо неравенство

$$|S(X)| \ll XQ^{-1}\Delta, \quad \Delta = q^{-0.0004\omega^2},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω .

При выполнении условий теоремы 2 справедливы следствия 4–7.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $V(X; q, Q)$ и $N(X; q, Q)$ – число квадратичных вычетов и число квадратичных невычетов по модулю q вида $p + a$, $p \leq X$, $p \equiv l \pmod{Q}$. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} V(X; q, Q) &= \frac{1}{2} \pi(X; Q, l) + O(XQ^{-1}q^{-0.0004\omega^2}); \\ N(X; q, Q) &= \frac{1}{2} \pi(X; Q, l) + O(XQ^{-1}q^{-0.0004\omega^2}). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любого ε из интервала $(0, 1)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если

$$q^{0.5+\varepsilon} \leq X \leq q^2$$

и Q – любое натуральное число, не превосходящее q^δ , то при $q \geq q_1(\varepsilon)$ имеют место неравенства (обозначения следствия 1):

$$\begin{aligned} V(X; q, Q) &\geq 0.4X^{1-0.0001\varepsilon^2}; \\ N(X; q, Q) &\geq 0.4X^{1-0.0001\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть n – делитель $q - 1$, $2 \leq n \leq q - 2$, $0 \leq s \leq n - 1$. Тогда для числа T_s тех чисел $p + a$, которые удовлетворяют условиям

$$p \leq X, \quad p \equiv l \pmod{Q}, \quad \text{ind}(p+a) \equiv s \pmod{n},$$

справедлива формула:

$$T_s = \frac{1}{n} \pi(X; Q, l) + O(XQ^{-1}q^{-0.0004\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 7. Число первообразных корней по модулю q вида $p + a$, $p \leq X$, $p \equiv l \pmod{Q}$, равно

$$\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \pi(X; Q, l) + O(XQ^{-1}q^{-0.0003\omega^2}).$$

Постоянные в знаках O следствий 4, 6, 7 зависят только от ω .

Доказательства следствий 4–7 легко следуют из теоремы 2, причем при доказательстве следствия 5 надо воспользоваться ТЕОРЕМОЙ Э. К. ФОГЕЛСА [52]: для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $A_1 = A_1(\varepsilon_1)$ такое, что при $A \geq A_1$ имеет место неравенство:

$$\pi(Q^A; Q, l) > Q^{A(1-\varepsilon_1)}$$

(теорема Фогелса обобщает известную теорему Ю. В. Линника [53] о наименьшем простом числе в арифметической прогрессии).

Теорема 2 доказана в [38]. Основой ее доказательства служат следующие ниже леммы 1–7, которые имеют также самостоятельный интерес, и леммы 4–6 главы I.

ЛЕММА 1. Пусть r – натуральное число,

$$W_0 = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{m=1}^{M_0} \psi_0(m) \chi(m + \lambda) \right|^{2r},$$

$\psi_0(m)$ – произвольная комплекснозначная функция m и $|\psi_0(m)| \leq H_0$ при $1 \leq m \leq M_0$. Тогда для величины W_0 справедлива следующая оценка:

$$W_0 \ll H_0^{2r} q M_0^{2r} \Delta_0, \quad \Delta_0 = q^{-0.5} + M_0^{-r},$$

причем постоянная в знаке $\ll$ зависит только от r .

ЛЕММА 2. Пусть r – натуральное число,

$$W = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \left| \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv l \pmod{Q}}}^M \psi(m) \chi(m + \lambda) \right|^{2r},$$

$\psi(m)$ – произвольная комплекснозначная функция m и $|\psi(m)| \leq H$ при $1 \leq m \leq M$. Тогда для W справедлива следующая оценка:

$$W \ll H^{2r} (MQ^{-1} + 1)^{2r} q \Delta, \quad \Delta = q^{-0.5} + (MQ^{-1} + 1)^{-r},$$

причем постоянная в знаке $\ll$ зависит только от r .

ЛЕММА 3. Пусть $\gamma > 0$, $q^{\frac{1}{4}+\gamma} \leq M \leq q^{\frac{5}{8}}$, $0 \leq a \leq q-1$ и

$$T(M) = \sum_{m=1}^M \chi(m + a).$$

Тогда для $|T(M)|$ имеет место следующая оценка:

$$|T(M)| \ll M q^\varepsilon \Delta, \quad \Delta = q^{-\frac{1}{2}\gamma^2},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε и γ .

ЛЕММА 4. Пусть $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $MQ^{-1} \geq q^{0.25+\gamma}$, $0 \leq a \leq q-1$ и

$$T = \left| \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv l \pmod{Q}}}^M \chi(m+a) \right|.$$

Тогда для T справедлива следующая оценка:

$$T \ll MQ^{-1} q^\varepsilon \Delta, \quad \Delta = q^{-0.5\gamma^2},$$

причем постоянная в знаке $\ll$ зависит только от γ .

ЛЕММА 5. Рассмотрим сумму W_α ,

$$W_\alpha = \sum_{\substack{U < u \leq U_1 \\ mu \leq N, mu \equiv l \pmod{Q}}} \sum_{M < m \leq M_1} \psi_1(u) \psi_2(m) \chi(mu + k),$$

где $U < U_1 \leq 2U$, $M < M_1 \leq 2M$, $|\psi_1(u)| \leq H_1$, $|\psi_2(m)| \leq H_2$. Тогда если $(k, q) = 1$ и

$$UQ^{-1} \geq q^{0.5+\gamma_1}, \quad MQ^{-1} \geq q^\gamma$$

при некоторых положительных γ_1 и γ , не превосходящих 0.5, то для $|W_\alpha|$ имеет место оценка

$$|W_\alpha| \ll H_1 H_2 U M Q^{-1} \Delta, \quad \Delta = q^{-0.25\gamma\gamma_1},$$

причем постоянная в знаке $\ll$ зависит только от γ .

ЛЕММА 6. Рассмотрим сравнение

$$m_1 - m_2 \equiv k_0(u_2^{-1} - u_1^{-1}) \pmod{q},$$

где $(k_0, q) = 1$ и переменные m_1, m_2, u_1, u_2 удовлетворяют условиям: $1 \leq M < m_1, m_2 \leq 2M$, $U < u_1, u_2 \leq 2U$, $u_1 m_1 \equiv u_2 m_2 \equiv l \pmod{Q}$, $(l, Q) = 1$, $0 \leq l < Q$, $Q \leq M \leq U$. Для числа j решений этого сравнения справедлива следующая оценка:

$$j \ll q^\varepsilon M U Q^{-1} \Delta_0,$$

где

$$\Delta_0 = Q + q^{-0.5} U^{0.5} M^{1.5} Q^{-1} + q^{-1} U M^2 Q^{-1},$$

а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε .

ЛЕММА 7. Рассмотрим сумму W_β ,

$$W_\beta = \sum_{\substack{U < u \leq 2U \\ mu \leq N, mu \equiv l \pmod{Q}}} \sum_{M < m \leq M_1} \psi(u) \chi(mu + k),$$

где $(k, q) = 1$, $M < M_1 \leq 2M$, $|\psi(u)| \leq H$. Предположим, далее, что величины U, M и Q удовлетворяют следующим соотношениям:

$$MQ^{-1} \geq q^\gamma, \quad MUQ^{-2} \geq q^{0.5+\gamma_1}, \quad M \leq q^{0.5-\gamma_2}, \quad UM^{-1} \geq q^{\gamma_3}$$

с некоторыми положительными $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, причем $\gamma < 0.333$. Тогда

$$|W_\beta| \ll q^\varepsilon HUMQ^{-1}\Delta,$$

где

$$\Delta = q^{-0.125\gamma} + q^{-0.5\gamma\gamma_1} + q^{-0.5\gamma\gamma_2} + q^{-0.5\gamma\gamma_3},$$

а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от γ и ε .

ЗАМЕЧАНИЕ. Понижающий множитель Δ в оценке теоремы 2 и в остаточных членах асимптотических формул следствий 4–7 может быть заменен на $q^{-0.02\omega^2}$.

§ 3. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в коротких арифметических прогрессиях

В этом параграфе решается задача, связанная с распределением чисел вида $p(p' + a)$, где p, p' – простые числа, в арифметических прогрессиях с растущей разностью q (см. [54]). Метод решения является мультипликативным аналогом метода Виноградова решения тернарных аддитивных проблем теории чисел. Как это было отмечено в [54], этим методом можно решать, в частности, задачи о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях “в среднем”.

Прежде чем сформулировать теорему, введем необходимые новые обозначения. Пусть $\omega \in (0, 1/4]$, n – достаточно большое положительное число, т. е. $n \geq n'(\omega)$; пусть далее $\varkappa_0 \cdot (4.6 + \omega) = 1$, $q \leq n^{\varkappa_0}$; $(a, q) = (l, q) = 1$; α – произвольное число из отрезка

$$\left[\left(\frac{1}{2} + \omega \right) \frac{\ln q}{\ln n}, 1 - 4.1 \frac{\ln q}{\ln n} \right];$$

$n_1 \geq n^{1-\alpha}$, $n_2 \geq n^\alpha$; p, p' – простые числа; $\pi_2 = \pi_2(n_1, n_2; a, l)$ – количество чисел $p \leq n_1$, $p' \leq n_2$ таких, что $p(p' + a) \equiv l \pmod{q}$.

ТЕОРЕМА 3. Существует абсолютная постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\pi_2 = \frac{1}{q-1} \pi(n_1)\pi(n_2) + O((n_1 n_2)^{1+\varepsilon} q^{-1-\gamma\omega^2}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от ω и ε .

При доказательстве теоремы будем пользоваться следующей леммой.

ЛЕММА 8. Пусть $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ – произвольные комплекснозначные функции, $|\psi_1(u)| \ll u^\varepsilon$, $|\psi_2(v)| \ll v^\varepsilon$. Пусть, далее,

$$q \ll U < U_1 \leq 2U, \quad q \ll V < V_1 \leq 2V,$$

$$W = \frac{1}{q-1} \sum_{\chi \pmod{q}} \left| \sum_{U < u \leq U_1} \sum_{\substack{V < v \leq V_1 \\ uv \leq X}} \psi_1(u)\psi_2(v)\chi(uv) \right|.$$

Тогда

$$W \ll (UV)^{1+\varepsilon} q^{-1} \ll X^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Имеем равенство:

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \sum_{p \leq n_1} \sum_{p' \leq n_2} \chi(p(p' + a)) \overline{\chi(l)} \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \pi(n_1) \pi(n_2) + R + O(n_1 n_2 q^{-2}),\end{aligned}$$

где

$$|R| \leq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{p \leq n_1} \chi(p) \right| \left| \sum_{p \leq n_2} \chi(p + a) \right|.$$

Пользуясь теоремой 1, получаем:

$$|R| \leq n_2 q^{-\gamma \omega^2} R_1, \quad (20)$$

где

$$R_1 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{p \leq n_1} \chi(p) \right|.$$

Обозначая $N = n_1$, возьмем в лемме 6 главы I $H = \max(N^{0.1}, \sqrt{q})$ и применим ее к внутренней сумме R_1 . Получим неравенство

$$R_1 \ll \sum_{1 \leq s \leq s_0} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} (|W_s| + |W'_s|) + H,$$

причем $s_0 \leq 10$, а константа в знаке $\ll$ абсолютная. Из определения сумм W'_s следует:

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |W'_s| \ll N^\varepsilon \sum_{H < d \leq N} \sqrt{\frac{N}{d^2} \left(\frac{N}{qd^2} + 1 \right)} \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

Осталось оценить при каждом s , $1 \leq s \leq s_0$, суммы R_2 ,

$$R_2 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |W_s|.$$

Возьмем в лемме 4 главы I число $c = 1/60$. Все делители $d \mid \mathbb{P}$, $d \leq N$, распределим среди $D_1 \leq (\ln N)^{(\ln \ln N)/\ln(1+c)}$ совокупностей. Кроме того, интервалы $0 < m_i \leq N$, $1 \leq i \leq s$, разобьем на $\ll \ln N$ интервалов вида $M_i < m_i \leq M'_i \leq 2M_i$. Получим $\ll Q_1(\ln N)^s$ сумм R_3 вида

$$R_3 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d_1} \cdots \sum_{m_s} \mu(d_1) \cdots \mu(d_s) \chi(d_1 \cdots d_s m_1 \cdots m_s) \right|,$$

где суммирование ведется по области $M_i < m_i \leq M'_i$, $\varphi_i < d_i \leq \varphi_i^{1+c}$, $i = 1, \dots, s$, $m_1 \cdots m_s d_1 \cdots d_s \leq N$.

Достаточно рассмотреть случай $M_1 \cdots M_s (\varphi_1 \cdots \varphi_s)^{1+c} \geq Nq^{-\frac{1}{2}}$, так как в противном случае тривиально имеем $R_3 \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}$.

Обозначим произведение $M_1 \cdots M_s \varphi_1 \cdots \varphi_s$ буквой Φ . Тогда: или а) $\Phi = \Phi_1 \Phi_2$, где $\Phi_1 \geq q$, $\Phi_2 \geq q$, $\Phi_1 = M_{i_1} \cdots M_{i_r} \varphi_{j_1} \cdots \varphi_{j_k}$, или б) представление а) невозможно.

Случай а). Полагая

$$u = m_{i_1} \cdots m_{i_r} d_{j_1} \cdots d_{j_k}, \quad v = d_1 \cdots d_s m_1 \cdots m_s u^{-1},$$

получим:

$$R_3 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{U < u \leq U_1} \sum_{\substack{V < v \leq V_1 \\ uv \leq N}} \psi_1(u) \psi_2(v) \chi(uv) \right|.$$

Разбивая интервалы изменения u и v на $\ll \ln N$ интервалов вида

$$U_2 < u \leq U'_2 \leq 2U_2, \quad V_2 < v \leq V'_2 \leq 2V_2$$

и замечая, что $U_2 \geq q$, $V_2 \geq q$, получим $\ll \ln^2 N$ сумм R'_3 , к каждой из которых применима оценка леммы 8. Таким образом,

$$R_3 \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

Случай б). Здесь возможны два подслучая:

$$1) \quad \max_{1 \leq i \leq s} M_i \geq \Phi q^{-1}; \quad 2) \quad \max_{1 \leq i \leq s} \varphi_i \geq \Phi q^{-1}.$$

Подслучай 1). Пусть $\max_{1 \leq i \leq s} M_i = M_1$, $u = m_1$, $v = m_2 \cdots m_s d_1 \cdots d_s$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi q^{-1} \leq M_1 < u \leq M'_1, \quad uv = m_1 \cdots m_s d_1 \cdots d_s \leq \Phi (\varphi_1 \cdots \varphi_s)^c, \\ \varphi_1 \cdots \varphi_s \leq q, \quad v \leq q^{1+c}. \end{aligned}$$

Поэтому R_3 не превосходит $\ll \ln N$ сумм R'_3 вида

$$R'_3 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{V_2 < v \leq V'_2} \psi_2(v) \chi(v) \sum_{M_1 < u \leq M''_1} \chi(u) \right|,$$

где $M''_1 = \min(M'_1, Nv^{-1})$. Следовательно,

$$R'_3 \ll q^{1+c} \sqrt{q} \ln q \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}, \quad R_3 \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

Подслучай 2). Пусть $\max_{1 \leq i \leq s} \varphi_i = \varphi_j = \varphi$. Тогда

$$\varphi \geq \Phi q^{-1} \geq N^{\frac{1}{1+c}} q^{-1 - \frac{1}{2(1+c)}}.$$

В лемме 4 гл. I положим $U = q^{\frac{3}{2}}$. Последовательно получаем: $U < \varphi' \leq UH$, $\varphi'\varphi'' = \varphi$,

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{\varphi' < d' \leq (\varphi')^{1+c}} \mu(d') \sum_{\substack{\varphi'' < d'' \leq (\varphi'')^{1+c} \\ (d', d'')=1}} \mu(d'') \right. \\
 &\quad \left. \cdots \sum_{M_s < m_s \leq M'_s} \chi(d' d'' \cdots m_s) \right| \\
 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d \leq N} \mu(d) \chi(d^2) \sum_{\varphi' d^{-1} < d' \leq (\varphi')^{1+c} d^{-1}} \mu(dd') \chi(d') \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{\varphi'' d^{-1} < d'' \leq (\varphi'')^{1+c} d^{-1}} \mu(dd'') \chi(d'' \cdots m_s) \right| \\
 &\leq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d \leq \sqrt{q}} K(d) \right| + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{d > \sqrt{q}} K(d) \right|, \tag{21}
 \end{aligned}$$

где

$$K(d) = \mu(d) \chi(d^2) \sum_{d'} \sum_{d''} \cdots \sum_{\substack{M_s < m_s \leq M'_s \\ d' d'' \cdots m_s \leq N d^{-2}}} \mu(dd') \chi(d') \mu(dd'') \chi(d'' \cdots m_s).$$

Для второй суммы в правой части неравенства (21) имеем оценку:

$$\begin{aligned}
 &\ll \sum_{\sqrt{q} < d \leq N} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} |K(d)| = \sum_{\sqrt{q} < d \leq N} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{u \leq N d^{-2}} \psi_1(u) \chi(u) \right| \\
 &\ll N^\varepsilon \sum_{\sqrt{q} < d \leq N} \sqrt{\frac{N}{d^2} \left(\frac{N}{q d^2} + 1 \right)} \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь первую сумму в правой части (21). Слагаемые в $K(d)$ имеют вид $\psi_1(u) \psi_2(v) \chi(u) \chi(v)$, где $u = d'$, $v = d'' \cdots m_s$. Разбивая интервалы изменения величин u и v на интервалы подобно тому, как это делалось выше, получим $\ll \ln^2 N$ сумм вида

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{U < u \leq U_1} \sum_{\substack{V < v \leq V_1 \\ uv \leq N d^{-2}}} \psi_1(u) \psi_2(v) \chi(uv) \right|, \tag{22}$$

причем $U \gg \varphi' q^{-\frac{1}{2}} \geq q$, $V \gg \varphi'' q^{-\frac{1}{2}} \cdots M_s = q^{-\frac{1}{2}} \Phi(\varphi')^{-1-c} \gg q$. Применяя к (22) лемму 8, получим:

$$|K(d)| \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1} d^{-2}, \quad \sum_{d \leq \sqrt{q}} |K(d)| \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

Следовательно,

$$R_3 \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

Итак, для R_1 получили оценку

$$R_1 \ll N^{1+\varepsilon} q^{-1}.$$

Из этой оценки и (20) следует утверждение теоремы 3.

Глава III. Нелинейные суммы характеров с простыми числами

Здесь приводятся основные утверждения, относящиеся к оценкам нелинейных сумм характеров с простыми числами, и следствия этих оценок. В этой главе a и b – целые числа, $a \not\equiv b \pmod{q}$, в следствиях 2, 4, 5, 7, кроме того, $ab \not\equiv 0 \pmod{q}$.

§ 1. Суммы по подряд идущим простым числам

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть ω – произвольное число из интервала $(0, \frac{1}{2})$, $f(x) = (x+a)(x+b)$. Тогда при любом $X \geq q^{0.75+\omega}$ для суммы $S_2(X)$,

$$S_2(X) = \sum_{p \leq X} \chi(f(p)),$$

справедлива оценка

$$|S_2(X)| \ll \pi(X) q^{-0.02\omega^2},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω .

При выполнении условий теоремы 1 справедливы следствия 1–4.

СЛЕДСТВИЕ 1. Число квадратичных вычетов (невывчетов) по модулю q в последовательности вида $f(p)$, $p \leq X$, равно

$$\frac{1}{2} \pi(X) + O(\pi(X) q^{-0.02\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $s_1 = \pm 1$, $s_2 = \pm 1$. Тогда число простых чисел p , не превосходящих X и таких, что

$$\left(\frac{p+a}{q}\right) = s_1, \quad \left(\frac{p+b}{q}\right) = s_2,$$

равно

$$T_1 = T_1(X) = \frac{1}{4} \pi(X) + O(\pi(X) q^{-0.02\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Число первообразных корней в последовательности $f(p)$, $p \leq X$, равно

$$\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \pi(X) + O(\pi(X) q^{-0.01\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Число простых чисел $p \leq X$, для которых числа $p+a$ и $p+b$ одновременно являются первообразными корнями по модулю q , равно

$$T_2 = T_2(X) = \left(\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \right)^2 \pi(X) + O(\pi(X)q^{-0.01\omega^2}).$$

В следствиях 1–4 постоянные в знаках O зависят только от ω .

Доказательство теоремы 1 с несколько худшим понижающим множителем для $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ содержится в [35]. Случай произвольного характера $\chi(n)$ рассматривается так же, только в нужном месте следует воспользоваться леммой 3 главы I с $\chi_1 = \chi_2 = \chi$. Доказательства следствий легко следуют из теоремы 1.

§ 2. Суммы по простым числам, принадлежащим арифметической прогрессии

В этом параграфе считаем, что $q \geq q_0$; Q – натуральное число, $(Q, q) = 1$, $1 \leq Q \leq q^A$; l – натуральное число, $(l, Q) = 1$, $1 \leq l < Q$; A и B – произвольные абсолютные постоянные, большие 1; $f(x) = (x+a)(x+b)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X удовлетворяет неравенствам

$$Q^3 q^{0.75+\omega} \leq X \leq Q^3 q^B, \quad 0 < \omega < \frac{1}{2}.$$

Тогда для суммы $S_3(X)$,

$$S_3(X) = \sum_{\substack{p \leq X \\ p \equiv l \pmod{Q}}} \chi(f(p)),$$

справедлива следующая оценка:

$$|S_3(X)| \ll Q^{-1} X q^{-0.02\omega^2},$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω .

При выполнении условий теоремы 2 справедливы следствия 5–8.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $s_1 = \pm 1$, $s_2 = \pm 1$, $T_1(X)$ – число простых чисел $p \leq X$ таких, что

$$p \equiv l \pmod{Q}, \quad \left(\frac{p+a}{q}\right) = s_1, \quad \left(\frac{p+b}{q}\right) = s_2.$$

Тогда

$$T_1(X) = \frac{1}{4} \pi(X; Q, l) + O(Q^{-1} X q^{-0.02\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $T_2(X)$ – число простых чисел $p \leq X$ таких, что $p \equiv l \pmod{Q}$ и $(p+a)(p+b)$ – первообразный корень по модулю q . Тогда

$$T_2(X) = \frac{\varphi(q-1)}{q-1} \pi(X; Q, l) + O(Q^{-1} X q^{-0.01\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $T_3(X)$ – число простых чисел $p \leq X$ таких, что $p \equiv l \pmod{Q}$ и $p + a$, $p + b$ одновременно являются первообразными корнями по модулю q . Тогда

$$T_3(X) = \left(\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \right)^2 \pi(X; Q, l) + O(Q^{-1} X q^{-0.01\omega^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 8. Для любого ε из интервала $(0, 1)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если

$$q^{0.75+\varepsilon} \leq X \leq q^2$$

и Q – любое натуральное число, не превосходящее q^δ , то при $q \geq q_1(\varepsilon)$ и обозначениях следствий 5–7 имеют место неравенства:

$$T_\nu(X) \geq X^{1-0.01\varepsilon^2}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Постоянные в знаках O следствий 5–7 зависят только от ω .

Доказательство теоремы 2 с несколько худшим понижающим множителем для $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ содержится в [21].

Основу доказательства теоремы 2 составляют следующие две леммы, которые имеют также самостоятельный интерес. Эти леммы являются нелинейными аналогами лемм 7 и 5 главы II.

ЛЕММА 1. Пусть числа M и U удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} Q^2 q^{0.75+\omega} &\leq MU \leq Q^2 q^2, & M &> Q q^\omega, \\ M < M_1 &\leq 2M, & U &< U_1 \leq 2U, \end{aligned}$$

и комплекснозначная функция $\psi(u)$ на отрезке $[U, U_1]$ по абсолютной величине не превосходит $\psi_0 > 0$. Тогда для двойной суммы W_1 ,

$$W_1 = \sum_{\substack{U < u \leq U_1 \\ mu \leq N, \, mu \equiv l \pmod{Q}}} \sum_{M < m \leq M_1} \psi(u) \chi((mu + a)(mu + b))$$

справедлива оценка

$$|W_1| \leq c_1(\omega) \psi_0 Q^{-1} M U q^{-0.05\omega^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возможны следующие три случая для значений величин M и U , каждый из которых будет рассмотрен отдельно: 1) $M \geq Q q^{0.5+0.05\omega}$; 2) $M < Q q^{0.5+0.05\omega}$, $U > Q q^{0.5+0.05\omega}$; 3) $M < Q q^{0.5+0.05\omega}$, $U < q^{0.5+0.05\omega}$.

Случай 1). По условию леммы $(l, Q) = 1$, поэтому $(u, Q) = (m, Q) = 1$. Количество чисел u , кратных q , не более $U q^{-1} + 1$. Поэтому, выделяя в W_1 те слагаемые, для которых u кратны q , и пользуясь тем, что $m \equiv lu^{-1} \pmod{Q}$, $|\psi(u)| \leq \psi_0$, $M < m \leq M_1$, находим тривиальную оценку этой части суммы W_1 :

$$\ll (U q^{-1} + 1) M Q^{-1} \psi_0 \ll \psi_0 Q^{-1} M U q^{-1}.$$

Заметим, что здесь мы воспользовались соотношением $U \gg q$, которое тривиально выполняется, так как предполагается существование $u \equiv 0 \pmod{q}$,

$U < u \leq U_1 \leq 2U$. Пусть теперь W_2 означает часть суммы W_1 по числам u с условием $(u, q) = 1$. Легко находим

$$W_2 \ll \sum_{U < u \leq U_1} \psi_0 \left| \sum_{\substack{M < m \leq M_2 \\ m \equiv l_1 \pmod{Q}}} \chi((m + a_1)(m + b_1)) \right|,$$

где $ul_1 \equiv l \pmod{Q}$, $ua_1 \equiv a \pmod{q}$, $ub_1 \equiv b \pmod{q}$, $M_2 = \min(M_1, Nu^{-1})$. Представим m в виде

$$m = Qr + l_1, \quad R = (M - l_1)Q^{-1} < r \leq (M_2 - l_1)Q^{-1} = R_1.$$

Тогда внутренняя сумма перепишется так:

$$\sum_{R < r \leq R_1} \chi((Qr + l_1 + a_1)(Qr + l_1 + b_1)) = \chi(Q^2) \sum_{R < r \leq R_1} \chi((r + k_1)(r + k_2)),$$

где $Qk_1 \equiv l_1 + a_1 \pmod{q}$, $Qk_2 \equiv l_1 + b_1 \pmod{q}$. Так как $k_1 \not\equiv k_2 \pmod{q}$, то для последней суммы справедлива оценка:

$$\ll ((R_1 - R)q^{-1} + 1)\sqrt{q} \ln q.$$

Вспоминая, что $M \geq Qq^{0.05\omega+0.5}$, для W_2 получаем неравенство:

$$\begin{aligned} W_2 &\ll U\psi_0(MQ^{-1}q^{-1} + 1)\sqrt{q} \ln q \\ &= \psi_0 MU(Q^{-1}q^{-1} + M^{-1})\sqrt{q} \ln q \ll \psi_0 Q^{-1} MUq^{-0.05\omega} \ln q. \end{aligned}$$

Отсюда и из ранее полученной оценки части суммы W_1 следует, что в случае 1) утверждение леммы справедливо.

Случай 2). Переходя к неравенствам, будем иметь:

$$|W_1| \leq \sum_{U < u \leq U_1} \psi_0 \left| \sum_{\substack{M < m \leq M_2 \\ m \equiv l_1 \pmod{Q}}} \chi((mu + a)(mu + b)) \right|.$$

Как и в первом случае, представим m и u в виде

$$m = Qr + l_1, \quad u = Qv + u_1,$$

где

$$\begin{aligned} R &= (M - l_1)Q^{-1} < r \leq (M_2 - l_1)Q^{-1} = R_2, \quad 0 < u_1 < Q, \\ (u_1, Q) &= 1, \quad V = (U - u_1)Q^{-1} < v \leq (U_1 - u_1)Q^{-1} = V_1. \end{aligned}$$

Легко находим:

$$|W_1| \leq \psi_0 Q \max_{u_1} \sum_{V < v \leq V_1} \left| \sum_{R < r \leq R_2} \chi(f(Qr + l_1)(Qv + u_1)) \right|,$$

причем l_1 определяется сравнением $l_1 u_1 \equiv l \pmod{Q}$ и, следовательно, от v не зависит; от v зависит R_2 . Так как $R < q^{0.5+0.05\omega}$, то возможно только одно

значение для r , при котором $Qr + l_1 \equiv 0 \pmod{q}$. Исключая его, если оно есть, получим погрешность $\ll \psi_0 QV$. Возведем далее последнее неравенство в квадрат и воспользуемся неравенством Коши. Применяя очевидные сокращенные обозначения, найдем:

$$|W_1|^2 \ll \psi_0^2 Q^2 V \sum_{V < v \leq V_1} \left| \sum_{R < r \leq R_2} \right|^2 \ll \psi_0^2 Q^2 V \sum_{R < r_1, r_2 \leq 2R} \left| \sum_{V < v \leq V_2} \right|.$$

Сумму по r_1, r_2 разобьем на две части: в одну сумму объединим слагаемые с условием $r_1 = r_2$ или $a(Qr_1 + l_1)^{-1} \equiv b(Qr_2 + l_1)^{-1} \pmod{q}$, в другую — оставшиеся слагаемые. Так как интервал изменения r_1 меньше q , то при фиксированном r_2 количество r_1 , удовлетворяющих второму соотношению, не превосходит 1. Тем самым, оценивая в первом случае сумму тривиально, получим для нее неравенство $\ll VR$. Пусть теперь

$$W_2 = \sum_{V < v \leq V_2} \chi(f_1(v))$$

при условии, что

$$\begin{aligned} r_1 \neq r_2, \quad a(Qr_1 + l_1)^{-1} \not\equiv b(Qr_2 + l_1)^{-1} \pmod{q}, \\ f_1(v) = ((Qr_1 + l_1)(Qv + u_1) + a)((Qr_1 + l_1)(Qv + u_1) + b) \\ \times ((Qr_2 + l_1)(Qv + u_1) + a)((Qr_2 + l_1)(Qv + u_1) + b), \quad V_2 \leq 2V. \end{aligned}$$

Обозначая через A_j, B_j , $j = 1, 2$, целые числа вида

$$\begin{aligned} A_j &\equiv (a(Qr_j + l_1)^{-1} + u_1)Q^{-1} \pmod{q}, \\ B_j &\equiv (b(Qr_j + l_1)^{-1} + u_1)Q^{-1} \pmod{q}, \end{aligned}$$

находим:

$$\chi(f_1(v)) = \chi((v + A_1)(v + A_2)(v + B_1)(v + B_2)).$$

Так как $A_1 \not\equiv B_1, A_2 \not\equiv B_2, A_1 \not\equiv A_2, A_1 \not\equiv B_2 \pmod{q}$, то к W_2 применима оценка Хассе–Вейля, т. е.

$$W_2 \ll \sqrt{q} (\ln q) (Vq^{-1} + 1).$$

Тем самым, учитывая все оценки, получаем:

$$\begin{aligned} |W_1|^2 &\ll \psi_0^2 Q^2 V (VR + (Vq^{-1} + 1)R^2 \sqrt{q} \ln q) \\ &\ll \psi_0^2 Q^2 V^2 R^2 (R^{-1} + q^{-0.5} \ln q + V^{-1} \sqrt{q} \ln q). \end{aligned}$$

По условиям леммы и рассматриваемого случая 2) имеем:

$$R \asymp MQ^{-1} > q^\omega, \quad V \asymp UQ^{-1} > q^{0.5+0.05\omega},$$

т. е.

$$\begin{aligned} |W_1|^2 &\ll \psi_0^2 Q^{-2} M^2 U^2 q^{-0.05\omega} \ln q, \\ |W_1| &\ll \psi_0 Q^{-1} MU q^{-0.05\omega^2}. \end{aligned}$$

Случай 3). Так как $MU > Q^2 q^{0.75+\omega}$ (по условию леммы) и, кроме того, $U < q^{0.5+0.05\omega}$, $M < q^{0.5+0.05\omega}$ (по условию рассматриваемого случая), то

$$\begin{aligned} M &> Q^2 q^{0.75+\omega} U^{-1} > Q q^{0.25+0.95\omega}, \\ U &> Q^2 q^{0.75+\omega} M^{-1} > Q q^{0.25+0.95\omega}. \end{aligned}$$

Суммирование по u и m представим в виде суммирования по арифметическим прогрессиям с разностью Q :

$$u = Qu_1 + u_2, \quad m = Qm_1 + m_2,$$

где

$$\begin{aligned} 0 < u_2 < Q, \quad (u_2, Q) = 1, \\ V = (U - u_2)Q^{-1} < u_1 \leq (U_1 - u_2)Q^{-1} = V_1, \quad V \gg q^{0.25+0.95\omega}; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} 0 < m_2 < Q, \quad (m_2, Q) = 1, \\ R = (M - m_2)Q^{-1} < m_1 \leq (M_1 - m_2)Q^{-1} = R_1, \\ R \gg q^{0.25+0.95\omega}; \quad R_2 = \min(R_1, Nu^{-1}). \end{aligned}$$

Условие $mu \equiv l \pmod{Q}$ дает: $m_2 u_2 \equiv l \pmod{Q}$. Так как каждому u_2 отвечает одно m_2 , то

$$W_1 \ll \psi_0 Q \sum_{V < u_1 \leq V_1} \left| \sum_{R < m_1 \leq R_2} \chi(g(m_1, u_1)) \right|,$$

где

$$g(m_1, u_1) = ((Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2) + a)((Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2) + b),$$

u_2 и m_2 – фиксированные числа, $0 < u_2 < Q$, $0 < m_2 < Q$, $m_2 u_2 \equiv l \pmod{Q}$, такие, что правая часть последнего неравенства принимает наибольшее значение. Опустим в последней двойной сумме слагаемые, для которых

$$Qu_1 + u_2 \equiv 0 \pmod{q};$$

получим погрешность

$$\ll \psi_0 Q(Vq^{-1} + 1)R = \psi_0 QVR(q^{-1} + V^{-1}).$$

Для $g(m_1, u_1)$ находим соотношение:

$$g(m_1, u_1) \equiv (m_1 + A)(m_1 + B)Q^2(Qu_1 + u_2)^2 \pmod{q},$$

где

$$\begin{aligned} A &= a'(Qu_1 + u_2)^{-1} + m'_2, \quad B = b'(Qu_1 + u_2)^{-1} + m'_2, \\ aQ^{-1} &\equiv a' \pmod{q}, \quad bQ^{-1} \equiv b' \pmod{q}, \quad m_2 Q^{-1} \equiv m'_2 \pmod{q}. \end{aligned}$$

Возьмем теперь $Y = [q^{0.1\omega}]$, $X = [RY^{-1}q^{-0.05\omega}] \gg q^{0.25+0.8\omega}$ и с суммой S по m_1 сделаем такие преобразования:

$$\begin{aligned} |S| &= \left| \sum_{R < m_1 \leq R_2} \chi(g(m_1, u_1)) \right| \\ &= \left| \chi(Q^2(Qu_1 + u_2)^2) \sum_{R < m_1 \leq R_2} \chi((m_1 + A)(m_1 + B)) \right| \\ &\leq (XY)^{-1} \left| \sum_{R < m_1 \leq R_2} \sum_{x=1}^X \sum_{y=1}^Y \chi((m_1 + xy + A)(m_1 + xy + B)) \right| + O(XY). \end{aligned}$$

Следовательно, для W_1 получаем неравенство

$$\begin{aligned} W_1 &\ll \psi_0 Q(XY)^{-1} \\ &\times \sum_{V < u_1 \leq V_1} \sum_{R < m_1 \leq 2R} \sum_{x=1}^X \left| \sum_{y=1}^Y \chi\left((m_1 + m'_2)x^{-1} + a'(Qu_1 + u_2)^{-1}x^{-1} + y\right) \right. \\ &\times \left. \left((m_1 + m'_2)x^{-1} + b'(Qu_1 + u_2)^{-1}x^{-1} + y\right) \right| + \psi_0 QVRq^{-0.05\omega} \\ &= \psi_0 Q(XY)^{-1} W_2 + \psi_0 QVRq^{-0.05\omega}, \end{aligned}$$

где кратная сумма по u_1 , m_1 , x , y обозначена символом W_2 . Введем еще одно обозначение, именно, символом $J(\lambda, \mu)$ обозначим число решений следующей системы сравнений:

$$\begin{cases} (m_1 + m'_2)x^{-1} \equiv \lambda \\ (u_1 + u'_2)x^{-1} \equiv \mu \end{cases} \pmod{q}.$$

В этой системе λ , μ – произвольные, но фиксированные целые числа, а неизвестными системы являются числа m_1 , u_1 , x , причем $R < m_1 \leq 2R$, $V < u_1 \leq 2V$, $1 \leq x \leq X$. Тогда для W_2 получаем:

$$W_2 = \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} J(\lambda, \mu) \left| \sum_{y=1}^Y \chi((\lambda + a'\mu + y)(\lambda + b'\mu + y)) \right|.$$

Возьмем $k = [10\omega^{-1}] + 1$, возведем W_2 в степень k и применим неравенство Гёльдера:

$$W_2^k \leq \left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} J(\lambda, \mu) \right)^{k-1} \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} J(\lambda, \mu) \left| \sum_{y=1}^Y \chi((\lambda + a'\mu + y)(\lambda + b'\mu + y)) \right|^k.$$

К последней сумме по λ и μ применим неравенство Коши:

$$\begin{aligned} W_2^k &\leq \left(\sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} J(\lambda, \mu) \right)^{k-1} \sqrt{\sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} J^2(\lambda, \mu)} \\ &\times \sqrt{\sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} \left| \sum_{y=1}^Y \chi((\lambda + a'\mu + y)(\lambda + b'\mu + y)) \right|^{2k}}. \end{aligned}$$

Последняя кратная сумма (обозначим ее W_3) легко приводится к виду суммы W леммы 3 главы I, в которой следует положить $\chi_1 = \chi_2 = \chi$. Действительно, пользуясь тем, что вместе с λ произведение $\lambda\mu^{-1}$ пробегает полную систему вычетов (μ и q считаются взаимно простыми), μ^{-1} вместе с μ пробегает приведенную систему вычетов, получаем:

$$\begin{aligned} W_3 &= \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=0}^{q-1} \left| \sum_{y=1}^Y \chi((\lambda + a'\mu + y)(\lambda + b'\mu + y)) \right|^{2k} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{q-1} \sum_{\mu=1}^{q-1} \left| \sum_{y=1}^Y \chi((\lambda + y\mu + a')(\lambda + y\mu + b')) \right|^{2k} + O(qY^{2k}) \\ &= \sum_{\lambda=1}^q \sum_{\mu=1}^q \left| \sum_{y=1}^Y \chi((\lambda + y\mu + a')(\lambda + y\mu + b')) \right|^{2k} + O(qY^{2k}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W_3 \ll Y^k q^2 + Y^{2k} q.$$

Далее, сумма значений $J(\lambda, \mu)$ по всем λ и μ равняется количеству всех возможных наборов чисел m_1, u_1, x , т.е. $\ll RVX$. Осталось оценить сумму значений $J^2(\lambda, \mu)$, которую обозначим буквой σ . Очевидно, что σ равняется числу решений следующей системы сравнений:

$$\begin{cases} (m_1 + m'_2)x^{-1} \equiv (\bar{m}_1 + m'_2)\bar{x}^{-1} \\ (u_1 + u'_2)x^{-1} \equiv (\bar{u}_1 + u'_2)\bar{x}^{-1} \end{cases} \pmod{q},$$

$$R < m_1, \bar{m}_1 \leq 2R, \quad V < u_1, \bar{u}_1 \leq 2V, \quad 1 \leq x, \bar{x} \leq X.$$

Преобразуем нашу систему, освобождаясь от отрицательных степеней x и группируя слагаемые:

$$\begin{cases} m_1\bar{x} - \bar{m}_1x \equiv m'_2(x - \bar{x}) \\ u_1\bar{x} - \bar{u}_1x \equiv u'_2(x - \bar{x}) \end{cases} \pmod{q}.$$

Заменяя x на $\bar{x} + h$, $|h| \leq X$, получим:

$$\begin{cases} (m_1 - \bar{m}_1)\bar{x} \equiv (\bar{m}_1 + m'_2)h \\ (u_1 - \bar{u}_1)\bar{x} \equiv (\bar{u}_1 + u'_2)h \end{cases} \pmod{q}.$$

Заметим, что левые (а значит, и правые) части этой системы сравнений кратны q только при $m_1 = \bar{m}_1$, $u_1 = \bar{u}_1$. Но тогда получим $h = 0$, так как $(m_1 + m'_2)Q \equiv Qm_1 + m_2 \pmod{Q}$ и $(Qm_1 + m_2, q) = 1$ по условию леммы. Таким образом, в этом случае число решений системы $\ll RVX$. Оценим теперь число решений системы при условии, что хотя бы одна из левых частей не кратна q . Фиксируем $\bar{m}_1, \bar{u}_1, h$. Количество таких наборов $\ll RVX$. Так как $m_1, \bar{m}_1 \leq R \leq q^{0.5+0.05\omega}$, $u, \bar{u}_1 \leq q^{0.5+0.05\omega}$, $\bar{x} \leq X \ll RY^{-1}q^{-0.05\omega} \ll q^{0.5-0.1\omega}$, то

$$|(m_1 - \bar{m}_1)\bar{x}| \ll q^{1-0.95\omega}, \quad |(u_1 - \bar{u}_1)\bar{x}| \ll q^{1-0.95\omega},$$

и система сравнений эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (m_1 - \bar{m}_1)\bar{x} = \alpha \\ (u_1 - \bar{u}_1)\bar{x} = \beta \end{cases},$$

где α и β – целые числа, $|\alpha| \leq q$, $|\beta| \leq q$, причем либо α , либо β отлично от нуля. Число решений этой системы уравнений $\ll q^\varepsilon$. Тем самым для σ находим оценку:

$$\sigma \ll RVXq^\varepsilon.$$

Подставим найденные оценки в неравенство для W_2^k :

$$\begin{aligned} W_2^k &\ll (RVX)^{k-1} \sqrt{RVXq^\varepsilon} \sqrt{Y^k q^2 + Y^{2k} q} \\ &\ll (RVX)^{k-0.5} Y^k q^{1+\varepsilon} (Y^{-k} + q^{-1})^{0.5}. \end{aligned}$$

Теперь, вспоминая, что

$$\begin{aligned} R &\asymp MQ^{-1}, & V &\asymp UQ^{-1}, & Y &\asymp q^{0.1\omega}, \\ X &\asymp RY^{-1}q^{-0.05\omega}, & MU &> Q^2q^{0.75+\omega}, & k &= [10\omega^{-1}] + 1 > 10\omega^{-1}, \end{aligned}$$

легко находим:

$$\begin{aligned} Y^k &\asymp q^{0.1\omega k} > q, & RVX &\asymp MUQ^{-2}MQ^{-1}q^{-0.15\omega} \gg q^{1+1.8\omega}, \\ W_2^k &\ll (XYRV)^k (RVX)^{-0.5} q^{0.5+\omega}, & W_2^k &\ll (XYRV)^k q^{-0.8\omega}, \\ W_2 &\ll XYRVq^{-0.05\omega^2}, & W_1 &\ll \psi_0 Q^{-1} MUq^{-0.05\omega^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $\psi_1(u)$ и $\psi_2(m)$ – произвольные комплекснозначные функции, причем $|\psi_1(u)| \leq \psi_1$, $|\psi_2(m)| \leq \psi_2$, $U > Qq^{0.5+\omega}$, $M > Qq^\omega$, $M < M_1 \leq 2M$, $U < U_1 \leq 2U$,

$$W_4 = \sum_{\substack{M < m \leq M_1 \\ mu \leq N, mu \equiv l \pmod{Q}}} \sum_{U < u \leq U_1} \psi_1(u) \psi_2(m) \chi(f(um)).$$

Тогда для $|W_4|$ справедлива следующая оценка:

$$|W_4| \leq c_2(\omega) \psi_1 \psi_2 Q^{-1} MUq^{-0.4\omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма, по существу, является несложным обобщением рассмотренного в лемме 1 случая 2). Представим m и u в виде

$$m = Qm_1 + m_2, \quad u = Qu_1 + u_2,$$

где

$$0 < m_2 < Q, \quad R = (M - m_2)Q^{-1} < m_1 \leq (M_1 - m_2)Q^{-1} = R_1$$

и

$$0 < u_2 < Q, \quad V = (U - u_2)Q^{-1} < u_1 \leq (U_1 - u_2)Q^{-1} = V_1.$$

Так как $mu \equiv l \pmod{Q}$, то $m_2 u_2 \equiv l \pmod{Q}$. Переходя к неравенствам, будем иметь:

$$\begin{aligned} |W_4| &\leq \sum_{\substack{0 < m_2 < Q \\ m_2 u_2 \equiv l \pmod{Q}}} \sum_{0 < u_2 < Q} \left| \sum_{\substack{R < m_1 \leq R_1 \\ (Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2) \leq N}} \sum_{\substack{V < u_1 \leq V_1 \\ (Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2) \leq N}} \psi_1(Qm_1 + m_2) \psi_2(Qu_1 + u_2) \right. \\ &\quad \left. \times \chi(f((Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2))) \right| \\ &\leq \psi_2 Q \sum_{V < u_1 \leq V_1} \left| \sum_{R < m_1 \leq R_2} \psi_1(Qm_1 + m_2) \chi(f((Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2))) \right|, \end{aligned}$$

где $R_2 = \min(R_1, N(Qu_1 + u_2)^{-1})$, m_2, u_2 – уже фиксированные натуральные числа. Возведем обе части неравенства в квадрат и применим неравенство Коши:

$$|W_4|^2 \ll \psi_2^2 Q^2 V \sum_{V < u_1 \leq 2V} \left| \sum_{R < m_1 \leq R_2} \right|^2 = \psi_2^2 Q^2 V W_5,$$

где

$$W_5 = \sum_{R < m_1, m'_1 \leq R_1} \psi_1(Qm_1 + m_2) \overline{\psi_1(Qm'_1 + m_2)} W_6(m_1, m'_1),$$

$$W_6(m_1, m'_1) = \sum_{V < u_1 \leq V_2} \chi(f((Qm_1 + m_2)(Qu_1 + u_2))) \overline{\chi(f((Qm'_1 + m_2)(Qu_1 + u_2)))}.$$

Следовательно,

$$|W_5| \leq \psi_1^2 \sum_{R < m_1, m'_1 \leq 2R} |W_6(m_1, m'_1)|.$$

Но последнюю кратную сумму мы уже оценили в лемме 1, рассматривая случай 2). Таким образом, будем иметь:

$$\begin{aligned} |W_5| &\ll \psi_1^2 ((1 + Rq^{-1})RV + R^2(Vq^{-1} + 1)\sqrt{q} \ln q) \\ &\ll \psi_1^2 R^2 V^2 (R^{-1}V^{-1} + q^{-0.5}V^{-1} + q^{0.5}V^{-2}) \ln q; \\ |W_4|^2 &\ll \psi_1^2 \psi_2^2 Q^2 R^2 V^2 (R^{-1} + q^{-0.5} + q^{0.5}V^{-1}) \ln q. \end{aligned}$$

По условию леммы $R \gg q^\omega$, $V \gg q^{0.5+\omega}$, поэтому

$$\begin{aligned} |W_4|^2 &\ll \psi_1^2 \psi_2^2 Q^2 R^2 V^2 q^{-\omega} \ln q; \\ |W_4| &\ll \psi_1 \psi_2 Q R V q^{-0.4\omega} \ll \psi_1 \psi_2 Q^{-1} M U q^{-0.4\omega}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Глава IV. Суммы характеров с весами

§ 1. Линейные суммы с весами

При целом числе l рассмотрим следующую сумму $T(X)$,

$$T(X) = \sum_{n \leq X} \tau_k(n) \chi(n + l).$$

Нахождение нетривиальной оценки для $|T(X)|$ при $X = X(q)$, любых значе-

ниях k и $l \equiv 0 \pmod{q}$ в настоящее время проблематично. Однако аналогичная задача при $l \not\equiv 0 \pmod{q}$ может быть решена (см. [44]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть ω – произвольное положительное число, не превосходящее 0.25, $(l, q) = 1$, $q^{0.5+\omega} \leq X \leq q^{10}$. Тогда для $|T(X)|$ справедлива следующая оценка:

$$|T(X)| \ll Xq^{-0.011\omega^2} \exp\left(\frac{8k \ln X}{\ln \ln X}\right),$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ω .

Из теоремы легко получается

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть a – произвольное натуральное число, $q \geq q_1(a)$, X удовлетворяет условиям теоремы. Пусть, далее, суммы $T_1(X)$, $T_2(X)$, $T_3(X)$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} T_1(X) &= \sum'_{n \leq X} \tau_k(n+a), & T_2(X) &= \sum''_{n \leq X} \tau_k(n+a), \\ T_3(X) &= \sum'''_{n \leq X} \tau_k(n+a), \end{aligned}$$

где штрих в сумме $T_1(X)$ и два штриха в сумме $T_2(X)$ означают суммирование по числам n , которые являются, соответственно, квадратичными вычетами и невычетами по модулю q , а три штриха в сумме $T_3(X)$ означает суммирование по числам n , которые являются первообразными корнями по модулю q . Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} T_1(X) &= \frac{1}{2} A_k(X) + O\left(Xq^{-0.01\omega^2} \exp\left(\frac{8k \ln X}{\ln \ln X}\right)\right), \\ T_2(X) &= \frac{1}{2} A_k(X) + O\left(Xq^{-0.01\omega^2} \exp\left(\frac{8k \ln X}{\ln \ln X}\right)\right), \\ T_3(X) &= \frac{\varphi(q-1)}{q-1} A_k(X) + O\left(Xq^{-0.01\omega^2} \exp\left(\frac{8k \ln X}{\ln \ln X}\right)\right), \end{aligned}$$

где

$$A_k(X) = \sum_{n \leq X} \tau_k(n) = XP_k(\ln X) + O(X^{\frac{k-1}{k+1}+\varepsilon})$$

и $P_k(t)$ – многочлен степени $k-1$ от t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Имеем равенство:

$$T(X) = \sum_{x_1 \cdots x_k \leq X} \chi(x_1 \cdots x_k + l).$$

Каждая из переменных суммирования $x_1, \dots, x_k$ пробегает значения целых чисел интервала $[1, X]$. Эти значения связаны соотношением $x_1 \cdots x_k \leq X$. Разобьем каждый из таких интервалов на $\ll \ln X$ интервалов вида $(Y, 2Y]$. Соответственно этому разбиению сумма $T(X)$ разобьется на $\ll (2 \ln X)^k$ сумм W вида

$$W = \sum_{X_1 < x_1 \leq 2X_1} \cdots \sum_{\substack{X_k < x_k \leq 2X_k \\ x_1 \cdots x_k \leq X}} \chi(x_1 \cdots x_k + l).$$

Рассмотрим одну из таких сумм. Достаточно рассмотреть случай

$$X_1 \cdots X_k \geq X q^{-0.25\omega}.$$

Никак не нарушая общности, будем считать, что $1 \leq X_1 \leq \cdots \leq X_k$.

Если $X_k \geq q^{0.25+0.25\omega}$, то по лемме 3 главы II имеем оценку

$$|W| \ll q^\varepsilon X q^{-0.031\omega^2} \max_{n \leq X} \tau_k(n). \quad (23)$$

Если $q^{0.25\omega} \leq X < q^{0.25+0.25\omega}$, то, вводя обозначения $x_k = u$, $x_1 \cdots x_{k-1} = v$, $\psi(v)$ – число решений в числах $x_1, \dots, x_{k-1}$ уравнения $x_1 \cdots x_{k-1} = v$, $U = X_k$, $V = X_1 \cdots X_{k-1}$, получим:

$$W = \sum_{\substack{V < v \leq 2^k V \\ uv \leq X}} \sum_{U < u \leq 2U} \psi(v) \chi(uv + l).$$

Легко проверить следующие соотношения:

$$q^{0.25\omega} \leq U < q^{0.25+0.25\omega} \leq q^{0.5-0.125}, \quad UV > X q^{-0.25\omega} \geq q^{0.5+0.75\omega}, \\ VU^{-1} \geq q^{0.5+0.75\omega} U^{-2} \geq q^{0.25\omega}.$$

Следовательно, к W можно применить лемму 7 главы II, полагая в ней $Q = 1$. После простых вычислений получаем:

$$|W| \ll q^\varepsilon \cdot 2^k X q^{-0.015\omega^2} \max_{n \leq X} \tau_{k-1}(n). \quad (24)$$

Наконец, если $X_k < q^{0.25\omega}$, то, так как

$$X_1 \cdots X_k \geq X q^{-0.25\omega},$$

найдутся номера $j_1, \dots, j_{s-1}, j_s$ такие, что

$$X_{j_1} \cdots X_{j_{s-1}} < q^{0.5+0.25\omega} < X_{j_1} \cdots X_{j_{s-1}} X_{j_s} < q^{0.5+0.5\omega}.$$

Обозначая символами $\psi_1(u)$ и $\psi_2(v)$ соответственно числа решений уравнений $x_{j_1} \cdots x_{j_s} = u$, $x_1 \cdots x_k u^{-1} = v$, в числах $x_1, \dots, x_k$, видим, что $\psi_1(u) \leq \tau_s(u)$, $\psi_2(v) \leq \tau_{k-s}(v)$. Кроме того, введенные величины u и v удовлетворяют неравенствам

$$q^{0.5+0.25\omega} < u < q^{0.5+0.5\omega}, \quad v \geq q^{0.25\omega}.$$

Разбивая интервалы суммирования по u и v на интервалы вида $(U, 2U]$, $(V, 2V]$, получим $\ll (\ln X)^2$ сумм, к каждой из которых можно применить лемму 5 главы II, полагая в ней $Q = 1$; получим:

$$|W| \ll 2^k X q^{-0.015\omega^2} \left(\max_{n \leq X} \tau_k(n) \right)^2. \quad (25)$$

Из оценок (23)–(25) следует утверждение теоремы 1.

§ 2. Нелинейные суммы символов Лежандра с весами

В этом параграфе считаем k фиксированным натуральным числом, $k \geq 2$; $q \geq q_1(k)$; $\omega \in (0, \frac{1}{4})$; a и b – целые числа с условием $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod{q}$; постоянные в знаках $\ll$ и O зависят только от ω .

Подобно тому, как доказывалась теорема 1, но только с привлечением лемм главы III, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. При любом X из промежутка

$$q^{0.75+\omega} \leq X \leq q^2$$

справедлива оценка:

$$\left| \sum_{n \leq X} \tau_k(n) \left(\frac{(n+a)(n+b)}{q} \right) \right| \ll X^{1-0.01\omega^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $s_1 = \pm 1$, $s_2 = \pm 1$,

$$S = \sum'_{n \leq X} \tau_k(n),$$

где штрих означает суммирование по таким $n \leq X$, для которых

$$\left(\frac{n+a}{q} \right) = s_1, \quad \left(\frac{n+b}{q} \right) = s_2.$$

Тогда при любом X из промежутка $q^{0.75+\omega} \leq X \leq q^2$ справедлива асимптотическая формула:

$$S = \frac{1}{4} A_k(X) + O\left(X q^{-0.01\omega^2} \exp\left(8k \frac{\ln X}{\ln \ln X}\right)\right),$$

где

$$A_k(X) = \sum_{n \leq X} \tau_k(n) = X P_{k-1}(\ln X) + O(X^{\frac{k-1}{k+1}} \ln^k X).$$

Доказательство теоремы и следствия см. в [45].

§ 3. Нелинейные суммы характеров с весами

В этом параграфе оцениваются суммы

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \leq X} \tau_k(n) \chi(n+a), & S_2 &= \sum_{n \leq X} \tau_k(n) \chi((n+a)(n+b)), \\ R_1 &= \sum_{x^2+y^2 \leq X} \chi(x^2+y^2+a), & R_2 &= \sum_{x^2+y^2 \leq X} \chi_1(x^2+y^2+a) \chi_2(x^2+y^2+b). \end{aligned}$$

Здесь, как и раньше, χ , χ_1 , χ_2 – неглавные характеры Дирихле по простому модулю q , $ab(a-b) \not\equiv 0 \pmod{q}$. Основной проблемой при изучении указанных сумм является проблема нетривиальной оценки их модуля при возможно меньших значениях X по отношению к q . Здесь получены оценки со степенным понижением при X значительно меньших, чем соответствующие X в §1 и §2 (см. [46]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X \geq q^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)} + \delta}$, $0 < \delta < \frac{2}{3(k+1)}$, $0 < |a| \leq \sqrt{q}$. Тогда для $|S_1|$ справедлива оценка:

$$|S_1| \ll Xq^{-0.02\delta^2}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X \geq q^{\frac{1}{3} + \delta}$, $0 < |a| \leq \sqrt{q}$. Тогда для $|R_1|$ справедлива следующая оценка:

$$|R_1| \ll Xq^{-0.02\delta^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При обозначениях следствия 1 и при выполнении условий теоремы 3 справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} T_1(X) &= \frac{1}{2} A_k(X) + O(Xq^{-0.02\delta^2}); \\ T_2(X) &= \frac{1}{2} A_k(X) + O(Xq^{-0.02\delta^2}); \\ T_3(X) &= \frac{\varphi(q-1)}{q-1} A_k(X) + O(Xq^{-0.01\delta^2}). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $K(X)$ – количество целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq X$ таких, что числа $x^2 + y^2 + a$ являются квадратичными вычетами (невывчетами) по модулю q . Тогда при выполнении условий теоремы 4 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(X) = \frac{\pi}{2} X + O(Xq^{-0.02\delta^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $G(X)$ – количество целых точек в круге $x^2 + y^2 \leq X$ таких, что числа $x^2 + y^2 + a$ являются первообразными корнями по модулю q . Тогда при выполнении условий теоремы 4 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$G(X) = \frac{\varphi(q-1)}{q-1} X + O(Xq^{-0.01\delta^2}).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X \geq q^{\frac{2}{3} + \delta}$. Тогда для $|S_2|$ справедлива следующая оценка:

$$|S_2| \ll Xq^{-0.02\delta^2}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $X \geq q^{\frac{2}{3} + \delta}$. Тогда для $|R_2|$ справедлива следующая оценка:

$$|R_2| \ll Xq^{-0.02\delta^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $0 < |a| \leq \sqrt{q}$, $0 < |b| \leq \sqrt{q}$, $s_1 = \pm 1$, $s_2 = \pm 1$,

$$V(X) = \sum'_{n \leq X} \tau(n),$$

где штрих в сумме означает суммирование по таким натуральным числам n , для которых выполняются равенства

$$\left(\frac{n+a}{q} \right) = s_1, \quad \left(\frac{n+b}{q} \right) = s_2.$$

Тогда при выполнении условий теоремы 5 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$V(X) = \frac{1}{4} X(\ln X + 2\gamma - 1) + O(Xq^{-0.01\delta^2}),$$

где γ – постоянная Эйлера.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $0 < a \leq \sqrt{q}$, $0 < b \leq \sqrt{q}$,

$$G(X) = \sum'_{n \leq X} \tau(n),$$

где штрих в сумме означает суммирование по таким натуральным числам $n \leq X$, для которых числа $n+a$ и $n+b$ одновременно являются первообразными корнями по модулю q . Тогда при выполнении условий теоремы 5 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$G(X) = \left(\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \right)^2 X(\ln X + 2\gamma - 1) + O(Xq^{-0.01\delta^2}),$$

где γ – постоянная Эйлера.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $0 < a, b \leq \sqrt{q}$, $s_1 = \pm 1$, $s_2 = \pm 1$, $K(X)$ – количество целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq X$ таких, что

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + a}{q} \right) = s_1, \quad \left(\frac{x^2 + y^2 + b}{q} \right) = s_2.$$

Тогда при выполнении условий теоремы 6 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$K(X) = \frac{\pi}{4} X + O(Xq^{-0.01\delta^2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $0 < a, b \leq \sqrt{q}$, $G(X)$ – количество целых точек (x, y) в круге $x^2 + y^2 \leq X$ таких, что числа $x^2 + y^2 + a$ и $x^2 + y^2 + b$ являются одновременно первообразными корнями по модулю q . Тогда при выполнении условий теоремы 6 справедлива следующая асимптотическая формула:

$$G(X) = \pi \left(\frac{\varphi(q-1)}{q-1} \right)^2 X + O(Xq^{-0.01\delta^2}).$$

Глава V. Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях

§ 1. Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях

Аддитивной последовательностью называется последовательность натуральных чисел C , которая является суммой двух других последовательностей натуральных чисел A и B , т. е. для любого $c \in C$ существуют $a \in A$ и $b \in B$ такие, что $c = a + b$, и, наоборот, $a + b \in C$ при любых $a \in A$, $b \in B$.

Здесь мы будем заниматься проблемами распределения степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях $C = A + B$, где $A = P$ – множество простых чисел, $B = U$ – произвольное множество натуральных чисел. Основной характеристикой U будет служить функция $g(x) = g(x; U)$ – количество чисел $u \in U$ таких, что $u \leq x$.

В главе II рассматривалась аналогичная проблема в случае, когда U , грубо говоря, состояло из одного числа. Рассмотрение густых множеств U дает возможность получить более тонкие результаты, именно, удастся нетривиально оценить значительно более короткие суммы характеров, что позволяет, в свою очередь, получить соответствующие результаты в теории степенных вычетов и невычетов, первообразных корней и др. (см. [40]).

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим сумму*

$$S = S(N, M) = \sum_{p \leq N} \sum_{u \leq M} \chi(p + u),$$

где $p \in P$, $u \in U$, а числа N и M таковы, что

$$1 \leq MN < q.$$

Тогда при любом натуральном числе $k \geq \frac{\ln q}{\ln N}$ для $|S|$ справедлива оценка:

$$|S| \ll \pi(N)g(M)\Delta, \quad \Delta = \left(\frac{q^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}}}{Ng(M)} \right)^{\gamma/k},$$

где $\gamma > 0$ – абсолютная константа, а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от k .

ТЕОРЕМА 2. *При любом натуральном числе $k \geq \min\left(\frac{\ln q}{\ln N}, \frac{\ln q}{\ln M}\right)$ справедлива оценка*

$$\left| \sum_{p \leq N} \sum_{p' \leq M} \chi(p + p') \right| \ll \pi(N)\pi(M)\Delta,$$

$$\Delta = (q^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2k}}(NM)^{-1})^{\gamma/k},$$

где $p, p' \in P$, $\gamma > 0$ – абсолютная константа, а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от k .

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $N \geq q^{0.25+\varepsilon_1}$, $M \geq q^{0.25+\varepsilon_1}$; тогда справедлива оценка*

$$\left| \sum_{p \leq N} \sum_{p' \leq M} \chi(p + p') \right| \ll \pi(N)\pi(M)q^{-\gamma_1\varepsilon_1^2},$$

где $\gamma_1 > 0$ – абсолютная константа, а постоянная в знаке $\ll$ зависит только от ε_1 .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует $q_1 = q_1(\varepsilon_1)$ такое, что при $q \geq q_1$ на отрезке $[1, q^{0.25+\varepsilon_1}]$ содержится $c_2 q^{0.25+\varepsilon_1}$ и $c_3 q^{0.25+\varepsilon_1}$ квадратичных вычетов и соответственно квадратичных невычетов по модулю q вида $p + p'$, где p и p' – простые числа, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ – константы.*

Аналогично формулируются утверждения о вычетах и невычетах произвольной степени, а также о первообразных корнях по модулю q , имеющих вид $p + p'$.

§ 2. Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях

Рассмотрим двойную сумму W ,

$$W = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \chi(x + y), \quad (26)$$

где χ – неглавный характер по модулю q , A и B – произвольные множества натуральных чисел, не превосходящих q , причем

$$\|A\| \geq q^\delta, \quad \|B\| \geq q^{0.5+\delta},$$

где δ – произвольное положительное число, не превосходящее 0.5, а $\|A\|$ и $\|B\|$ – количество чисел множеств A и B соответственно. Подобно тому, как доказывалась теорема 1 § 1, получаем:

$$|W| \ll \|A\| \|B\| q^{-0.05\delta^2}, \quad (27)$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от δ .

В приложениях часто про множества A и B известно, что они сосредоточены на некоторых промежутках вида $(a, a + X]$ и $(b, b + Y]$, длины которых близки к количеству элементов множеств A и B , другими словами,

$$X \approx \|A\|, \quad Y \approx \|B\|.$$

Кроме того, слагаемые x и y в (26) могут повторяться. Так появляются суммы W_1 ,

$$W_1 = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} \psi_1(x) \psi_2(y) \chi(x + y + a),$$

где $0 \leq a < q$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ – произвольные комплекснозначные функции с условием $|\psi_1(x)| \leq \psi_1$, $|\psi_2(y)| \leq \psi_2$. Тривиальная оценка $|W_1|$ такова:

$$|W_1| \leq XY \psi_1 \psi_2.$$

Проблема состоит в том, чтобы получить оценку вида

$$|W_1| \leq XY \psi_1 \psi_2 \Delta,$$

где $\Delta = \Delta(q; X, Y) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow +\infty$.

Аналогом оценки (27) является оценка, которая содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X \geq q^\delta$, $Y \geq q^{0.5+\delta}$, $q \geq q_1(\delta)$. Тогда для $|W_1|$ справедлива оценка

$$|W_1| \leq XY \psi_1 \psi_2 q^{-0.4\delta} \leq XY \psi_1 \psi_2 q^{-0.05\delta^2}.$$

В нижеследующей теореме 5 получен результат при более слабых ограничениях на X и Y , чем те, которые содержатся в теореме 4 (см. [41]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \delta < 0.5$, $q \geq q_1(\delta)$, $X \geq q^\delta$, $\sqrt{X}Y \geq q^{0.5+\delta}$. Тогда для $|W_1|$ справедлива следующая оценка:

$$|W_1| \leq XY\psi_1\psi_2q^{-0.05\delta^2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $X \asymp Y$, $Y \geq q^{\frac{1}{3}+\delta}$, то

$$|W_1| \leq XY\psi_1\psi_2q^{-0.05\delta^2}.$$

Основная идея доказательства теоремы совпадает с идеей доказательства леммы 1 главы III, в которой можно считать $Q = 1$.

Глава VI. Некоторые специальные вопросы теории характеров, нерешенные проблемы и гипотезы

В 1926 г. И. М. Виноградов [55] (см. также [56]), пользуясь своей оценкой (13) и соображениями типа решета Бруна, доказал, что при любом $\varepsilon > 0$ и $q \geq q_1(\varepsilon)$ наименьший квадратичный невычет по модулю q не превосходит $N_{\min}$, где

$$N_{\min} \leq q^{\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}+\varepsilon}.$$

Тогда же возникла знаменитая гипотеза Виноградова, что

$$N_{\min} \leq q^\varepsilon.$$

В 1942 г. Ю. В. Линник [57] с помощью созданного им метода большого решета [58] доказал, что гипотеза Виноградова справедлива для почти всех модулей q . Более точно теорему Линника можно сформулировать в следующем виде, предложенном С. Учиамой (см. [5; с. 136, с. 217–218]): для $\pi(x)(1 - o(1))$ значений q , $q \leq x$, наименьший квадратичный невычет $n = n(q)$ и наименьший простой квадратичный вычет $v = v(q)$ не превосходят $c(\varepsilon) \ln^{2+\varepsilon} x$.

Из оценки Берджесса [24] для $N_{\min}$ получается такое неравенство:

$$N_{\min} \leq q^{\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}+\varepsilon}.$$

В 1947 г. Ю. В. Линник и А. А. Реньи [59] сформулировали ряд гипотез, обобщающих гипотезу Виноградова, и доказали три своеобразные теоремы относительно этих гипотез. Пусть $\chi(n)$ – неглавный примитивный характер по модулю D , $\pm D$ – фундаментальный дискриминант, $\chi(n)$ – вещественный характер (всюду, кроме теоремы 1). Пусть, далее,

$$M(\chi) = \max_{1 \leq x \leq D-1} \left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right|, \quad L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n},$$

$N_{\min}$ – наименьшее из положительных чисел, для которых $\chi(n) \neq +1$; $N_{\min}^*$ – число с наименьшей абсолютной величиной, для которого $\chi(n) = +1$; $P_{\min}$ – наименьшее простое число, для которого $\chi(p) = +1$.

ГИПОТЕЗА 1А.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\min}}{\ln D} = 0.$$

ГИПОТЕЗА 1Б.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\min}^*}{\ln D} = 0.$$

ГИПОТЕЗА 2.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln P_{\min}}{\ln D} = 0.$$

ГИПОТЕЗА 3.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D} \ln D} = 0.$$

ГИПОТЕЗА 4.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{|L(1, \chi)|}{\ln D} = 0.$$

ТЕОРЕМА 1.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\min}^*}{\ln D} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D} \ln D} = 0.$$

ТЕОРЕМА 2.

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln P_{\min}}{\ln D} \frac{M(\chi)}{\sqrt{D} \ln D} = 0.$$

ТЕОРЕМА 3. Если выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln N_{\min}}{\ln D} > 0,$$

то

$$\overline{\lim}_{D \rightarrow \infty} \frac{|L(1, \chi)|}{\ln D} > 0.$$

Ни одна из сформулированных гипотез Линника–Реньи к настоящему времени (2008 г.) не доказана. Заметим, что

$$\sqrt{\frac{D}{12} \prod_{p|D} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} < M(\chi) < \sqrt{D} \ln D, \quad |L(1, \chi)| < \ln D.$$

Кроме того, Дж. Литтлвуд [60], предполагая справедливой расширенную гипотезу Римана, доказал, что

$$\frac{1 + o(1)}{2b \ln \ln D} \leq |L(1, \chi)| \leq (1 + o(1)) \cdot 2c \ln \ln D,$$

где $b = \frac{6}{\pi^2} e^\gamma$, γ – постоянная Эйлера, $c = e^\gamma$.

Если $\chi(n)$ – вещественный характер, то по знаменитой теореме Зигеля [61] для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$L(1, \chi) \geq c(\varepsilon) D^{-\varepsilon}, \quad c(\varepsilon) > 0.$$

Замечу, что в [62], [63] Ю. В. Линник аналитическим методом оценивал суммы характеров с простыми числами, а метод большого решета Линника привел к следующей замечательной теореме Бомбьери–Виноградова (см. [64], [65]): при любом $A > 0$ найдется $B = B(A) > 0$ такое, что

$$\sum_{Q \leq \sqrt{x} (\ln x)^{-B}} \max_{(l, Q)=1} \left| \psi(x; Q, l) - \frac{x}{\varphi(Q)} \right| \leq c(A) x (\ln x)^{-A}.$$

Оценка Хассе–Вейля (14), которая существенно используется в рассматриваемых вопросах, доказана с помощью методов алгебраической геометрии. И. М. Виноградов неоднократно предлагал найти прямое, чисто арифметическое, доказательство (14).

В 1967 г. в мае месяце на Всесоюзной школе-конференции по алгебре и теории чисел, которая проходила в Таджикистане недалеко от г. Душанбе, И. Р. Шафаревич в своем докладе еще раз обратил внимание на эту проблему. В частности, была поставлена конкретная задача: доказать разрешимость сравнения

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{q}, \quad (28)$$

не пользуясь методами алгебраической геометрии.

Летом того же года А. Г. Постников нашел элементарный метод, позволяющий оценивать снизу количество решений (28) и, в частности, доказывать разрешимость (28). Метод Постникова состоял в следующем (см. [66], [5; с. 213]). Пусть $q \geq 5$, $f(x) = x^3 + ax + b$. Рассмотрим многочлены

$$F(x) = 1 \pm (f(x))^{\frac{q-1}{2}}, \quad g(x) = 2f(x)(1 \pm (f(x))^{\frac{q-1}{2}}) + f'(x)(x^q - x).$$

Легко видеть, что каждый нуль $F(x)$ по модулю q является по крайней мере двукратным нулем $g(x)$. Пусть, далее, N – число решений (28), j_1, j_2, j_0 – числа решений сравнений

$$1 + (f(x))^{\frac{q-1}{2}} \equiv 0 \pmod{q}, \quad 1 - (f(x))^{\frac{q-1}{2}} \equiv 0 \pmod{q}, \quad f(x) \equiv 0 \pmod{q}$$

соответственно. Очевидно, что $N = 2j_2 + j_0$, и, кроме того, $j_1 + j_2 + j_0 = q$,

$$2j_1 + j_0 \leq \deg g(x) = \frac{3}{2}(q+1), \quad 2j_2 + j_0 \leq \deg g(x) = \frac{3}{2}(q+1).$$

Отсюда получаем:

$$|N - q| \leq \frac{q+3}{2}, \quad N \geq \frac{q-3}{2} > 0. \quad (29)$$

Естественно было предположить, что если строить аналоги $g(x)$, у которых каждый нуль $F(x)$ является нулем высокой кратности, то оценка (29) может быть уточнена. Эти предположения были подтверждены С. А. Степановым, который в работах [67]–[70] получил элементарным методом оценки Хассе–Вейля как для сумм мультипликативных, так и для сумм аддитивных характеров в конечных полях (см. также [71]).

Исследования Степанова были продолжены Н. М. Коробовым [72], который для суммы символов Лежандра получил оценку более точную, чем (14):

$$\left| \sum_{x=1}^q \left(\frac{f(x)}{q} \right) \right| \leq (n-1) \sqrt{q - \frac{(n-3)(n-4)}{4}}.$$

Здесь n – нечетное число, $n \geq 3$,

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ – целые числа, $(a_n, q) = 1$ (см. также работу [73] Д. А. Митькина, в которой конструкция Коробова использована при оценках рациональных тригонометрических сумм).

Метод § 3 главы II был применен М. М. Петечуком [74] к проблеме асимптотического поведения суммы $S(x)$,

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l \pmod{D}}} \tau_k(n).$$

Проблема состоит в том, чтобы получать асимптотики $S(x)$ при возможно больших значениях $D = D(x)$. Пользуясь, сверх того, оценкой А. Г. Постникова [75] короткой суммы характеров, М. М. Петечук для модулей D , равных степени фиксированного простого числа, получил асимптотику $S(x)$ при условии, что $D \leq x^{3/8-\varepsilon}$. В это же время и этим же методом М. М. Петечук получил асимптотику $S(x)$ при любых D , причем D были много больше, чем D в соответствующей теореме А. Ф. Лаврика [76], доказанной аналитическим методом. К сожалению, этот результат так и не был опубликован М. М. Петечуком.

Оценки сумм характеров с простыми числами были использованы З. Х. Рахмоновым в проблеме наименьшего гольдбахова числа и числа Харди–Литтлвуда в арифметической прогрессии, в проблеме средних значений функции Чебышёва $\psi(x, \chi)$ (см. [77]–[83]). К этой же проблематике относятся оценки сумм характеров по бесквадратным числам, состоящим из заданного числа простых сомножителей (см. [84], [85], а также статьи Г. Д. Негматовой [86], [87]).

Применение оценок сумм характеров и метода § 3 гл. II позволило М. З. Гараеву и автору [88] доказать теорему о том, что для почти всех l по модулю q разрешимо сравнение

$$xy \equiv l \pmod{q},$$

где $\max(x, y) \leq q^{5/8+\varepsilon}$, $q \geq q_1(\varepsilon)$. В этой же статье доказано следующее неравенство:

$$\left| \sum_{n \leq x} \chi(n) \right| \ll x^{\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{4r^2} + \varepsilon}.$$

Здесь r – произвольное натуральное число, постоянная в знаке $\ll$ зависит только от r и ε . Раньше это неравенство условно было доказано А. И. Виноградовым [89]. А. И. Виноградов пользовался тем, что при любом целом числе a , $0 \leq a < q$, выполняется оценка:

$$\left| \sum_{B < n \leq B+A} \chi(n) e^{2\pi i \frac{an}{q}} \right| \ll A^{1-\frac{1}{r}} q^{\frac{1}{4r} + \frac{1}{4r^2} + \varepsilon}.$$

Замечу, что М. З. Гараев и автор [90] другим методом доказали, что для почти всех l по модулю q указанное сравнение разрешимо при $\max(x, y) \leq \sqrt{q} (\ln q)^{1+\varepsilon}$.

Результаты главы III для многочленов $f(x)$ произвольной степени и для $\chi(n)$, равных символу Лежандра, условно доказаны в [34]. Результаты П. Делиния [91]

позволяют надеяться, что справедлива следующая ГИПОТЕЗА: если $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, не являющийся полным квадратом по модулю q , целые числа $a_1, \dots, a_k$ попарно не сравнимы по модулю q , $k \geq 2$,

$$F(x, y) = f(x + a_1 y) \cdots f(x + a_k y),$$

то справедлива оценка

$$\left| \sum_{x=1}^q \sum_{y=1}^q \left(\frac{F(x, y)}{q} \right) \right| \ll q, \quad (30)$$

где постоянная в знаке $\ll$ зависит только от k и степени $f(x)$. Для многочлена $f(x) = (x+a)(x+b)$, $a \not\equiv b \pmod{q}$, эта гипотеза справедлива. С помощью неравенства (30) в [34] доказано, что если $X \gg q^{0.75+\omega}$, $0 < \omega < 1/2$, то

$$\left| \sum_{p \leq X} \left(\frac{f(p)}{q} \right) \right| \ll \pi(X) q^{-0.01\omega^2}.$$

Своеобразное применение оценок сумм характеров к проблеме распределения простых чисел в квазипрогрессиях содержится в работе С.М. Воронина и Р. Турганалиева [92].

Суммы характеров по натуральным числам, имеющим либо только четное, либо только нечетное количество единиц при записи их в двоичной системе счисления, были рассмотрены автором и Б. Новаком в [93]. Пусть $n = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \dots + \alpha_k \cdot 2^k$, где $\alpha_j = 0$ или 1 , $j = 0, 1, \dots, k$, и при $\nu = 0, 1$ символом E_ν обозначим множество натуральных чисел n , для которых

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k \equiv \nu \pmod{2}.$$

В [93] доказана ТЕОРЕМА: пусть $\lambda = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 4} = 0.2075187496\dots$, и пусть

$$\Delta = \Delta(X; q) = \begin{cases} \sqrt{X^{-1} \sqrt{q} \ln q}, & \text{если } \sqrt{q} \ln q < X \leq (\sqrt{q})^5 \ln q; \\ q^{-1/2}, & \text{если } (\sqrt{q})^5 \ln q < X \leq (\sqrt{q})^{4+1/\lambda}; \\ (Xq^{-2})^{-\lambda}, & \text{если } (\sqrt{q})^{4+1/\lambda} < X. \end{cases}$$

Тогда для $S_\nu(X)$,

$$S_\nu(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ n \in E_\nu}} \chi(n),$$

справедлива оценка

$$|S_\nu(X)| \ll X\Delta.$$

При доказательстве этой теоремы авторы существенно пользовались оценками К. М. Эминяна [94]–[96]. Арифметическими следствиями теоремы являются следующие асимптотические формулы:

а) если $m \mid (q-1)$, $m \geq 2$, $K_{m,\nu}(X)$ – количество вычетов степени m по модулю q в последовательности чисел $n \leq X$, $n \in E_\nu$, то

$$K_{m,\nu}(X) = \frac{1}{2m} X(1 + \Delta_1),$$

где

$$|\Delta_1| \ll m\Delta + X^{-\lambda} + q^{-1};$$

б) если k – количество простых делителей числа $q-1$, а $T_\nu(X)$ – количество первообразных корней по модулю q , не превосходящих X и принадлежащих E_ν , то

$$T_\nu(X) = \frac{\varphi(q-1)}{q-1} X(1 + \Delta_2),$$

где

$$|\Delta_2| \ll X^{-\lambda} \ln^2 X + q^{-1} \ln^2 X + \Delta \cdot 2^k \ln X.$$

И, наконец, несколько необычной является теорема, доказанная в [97]: существуют бесконечная последовательность чисел q и последовательность многочленов вида $x^n + a$, где $(a, q) = 1$ и

$$4 \frac{q-1}{\ln q} \leq n \leq 8 \frac{q-1}{\ln q},$$

такие, что выполняется следующее равенство:

$$\left| \sum_{x=1}^q \left(\frac{x^n + a}{q} \right) \right| = q.$$

Среди нерешенных проблем в первую очередь следует назвать *проблемы-гипотезы*, поставленные Виноградовым и Линником–Реньи. Другими проблемами являются такие:

1. Доказать оценку леммы 3 главы II при $M \geq q^{c+\gamma}$ и $c < 1/4$.
2. Доказать оценку теоремы 1 главы II при $X \geq q^{c+\omega}$ и $c < 1/2$.
3. Доказать оценку теоремы 1 главы III при $X \geq q^{c+\omega}$ и $c < 3/4$.
4. Доказать неравенство (30).

5. Хотя бы в одной из оценок, которые получены в теоремах 1, 2 и лемме 3 главы II, теоремах 1, 2 главы III, теоремах 1–5 главы IV, теореме 5 главы V, понижающий множитель, который имеет вид $q^{-0.02\omega^2}$, либо $q^{-0.5\gamma^2}$, либо $q^{-0.02\delta^2}$, заменить на понижающий множитель вида $q^{-c\omega^\alpha}$, $q^{-c\gamma^\alpha}$, $q^{-c\delta^\alpha}$ соответственно, где c и α – абсолютные положительные постоянные, причем $\alpha < 2$.

6. Доказать, что при любых A и B с условием $A \subset [1, q-1]$, $B \subset [1, q-1]$, $\|A\| \asymp \sqrt{q}$, $\|B\| \asymp \sqrt{q}$, для суммы W ,

$$W = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \chi(x+y),$$

справедлива оценка

$$|W| \leq c(\delta) \|A\| \|B\| q^{-\delta}, \quad \delta > 0.$$

7. Доказать существование бесконечной последовательности простых чисел q и бесконечной последовательности бесквадратных по модулю q многочленов $f(x)$ степени $n = o\left(\frac{q}{\ln q}\right)$, например, $n = O\left(\frac{q}{\ln q \ln \ln q}\right)$, для которых выполняется равенство

$$\left| \sum_{x=1}^q \left(\frac{f(x)}{q} \right) \right| = q.$$

8. В [98] А. О. Гельфонд дал элементарное доказательство теоремы Пейджа в следующей формулировке: *если χ – вещественный первообразный характер по модулю m , то справедливо неравенство:*

$$|L(1, \chi)| > \frac{1}{33\sqrt{m} \ln^2 m}, \quad m > m_0. \quad (31)$$

При получении (31) А. О. Гельфонд пользовался только оценкой Виноградова–Пойя (см. также [99; с. 281], [47; с. 123–124]). Нельзя ли методом Гельфонда (или его вариантами) получить более сильную оценку, чем (31)?

Список литературы

- [1] П. Г. Л. Дирихле, *Лекции по теории чисел*, ОНТИ, М.–Л., 1936; англ. пер. с нем. ориг. 1983 г.: P. G. L. Dirichlet, *Lectures on number theory*, History of Mathematics, **16**, Amer. Math. Soc. / London Math. Soc., Providence, RI / London, 1999.
- [2] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, Наука, М., 1981.
- [3] Г. Дэвенпорт, *Мультипликативная теория чисел*, Наука, М., 1971; пер. с англ.: H. Davenport, *Multiplicative number theory*, Lectures in Advanced Mathematics, **1**, Markham, Chicago, IL, 1967.
- [4] А. А. Карацуба, “Суммы характеров на последовательности сдвинутых простых чисел и их применения”, *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 155–159; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Sums of characters in sequences of shifted prime numbers, with applications”, *Math. Notes*, **17** (1975), 91–93.
- [5] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983, 2-изд., перераб. и доп.; англ. пер.: [48].
- [6] Р. Лидл, Г. Нидеррайтер, *Конечные поля*, т. I, II, Мир, М., 1988; пер. с англ.: R. Lidl, H. Niederreiter, *Finite fields*, Encyclopedia Math. Appl., **20**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1983.
- [7] Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел*, Мир, М., 1974; пер. с англ. H. L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, Lecture Notes in Math., **227**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.
- [8] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967; пер. с нем.: K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Grundlehren Math. Wiss., **91**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.
- [9] Г. Хассе, *Лекции по теории чисел*, ИЛ, М., 1953; пер. с нем.: H. Hasse, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, **59**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1950.
- [10] Н. Г. Чудаков, *Введение в теорию L-функций Дирихле*, ОГИЗ, М.–Л., 1947.
- [11] И. М. Виноградов, “Sur la distribution des residus et des nonresidus des puissances”, *Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те*, 1918, № 1, 94–98.
- [12] И. М. Виноградов, “Об одном асимптотическом равенстве теории квадратичных форм”, *Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те*, 1918, № 1, 18–28.
- [13] G. Pólya, “Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste”, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1918, 21–29.
- [14] H. Davenport, “On primitive roots in finite fields”, *Quart. J. Math.*, **8** (1937), 308–312.
- [15] L. Carlitz, S. Uchiyama, “Bounds for exponential sums”, *Duke Math. J.*, **24**:1 (1957), 37–41.
- [16] Г. И. Перельмутер, “О некоторых суммах с характерами”, *УМН*, **18**:2 (1963), 145–149.

- [17] И. М. Виноградов, “Распределение квадратичных вычетов и невычетов вида $p+k$ по простому модулю”, *Матем. сб.*, **3**:2 (1938), 311–320.
- [18] И. М. Виноградов, “Уточнение метода оценки сумм с простыми числами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **7**:1 (1943), 17–34.
- [19] И. М. Виноградов, “Новый подход к оценке суммы значений $\chi(p+k)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **16**:3 (1952), 197–210.
- [20] Ю. В. Линник, “Новейшие работы И. М. Виноградова”, *Труды международной конференции по теории чисел* (Москва, 1971), Тр. МИАН, **132**, Наука, М., 1973, 27–29.
- [21] А. А. Карацуба, “Распределение пар квадратичных вычетов и невычетов специального вида”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:5 (1987), 994–1009; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “The distribution of pairs of quadratic residues and nonresidues of a special form”, *Math. USSR-Izv.*, **31**:2 (1988), 307–323.
- [22] И. М. Виноградов, “Улучшение оценки для суммы значений $\chi(p+k)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **17**:4 (1953), 285–290.
- [23] Г. И. Перельмутер, “Оценка одной суммы с простыми числами”, *Докл. АН СССР*, **144**:1 (1962), 48–51; англ. пер.: G. I. Perel'muter, “Evaluation of a sum containing primes”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 663–667.
- [24] D. A. Burgess, “The distribution of quadratic residues and non-residues”, *Mathematika*, **4**:8 (1957), 106–112.
- [25] D. A. Burgess, “On character sums and primitive roots”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **12**:1 (1962), 179–192.
- [26] D. A. Burgess, “On character sums and L -series”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **12**:1 (1962), 193–206.
- [27] D. A. Burgess, “On character sums and L -series. II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **13**:1 (1963), 524–536.
- [28] D. A. Burgess, “Character sums and primitive roots in finite fields”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **17**:1 (1967), 11–25.
- [29] H. Davenport, D. J. Lewis, “Character sums and primitive roots in finite fields”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **12**:2 (1963), 129–136.
- [30] А. А. Карацуба, “Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях”, *Докл. АН СССР*, **180**:6 (1968), 1287–1289; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “Character sums and primitive roots in finite fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), 755–757.
- [31] А. А. Карацуба, “Об оценках сумм характеров”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:1 (1970), 20–30; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “Estimates of character sums”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:1 (1970), 19–29.
- [32] А. А. Карацуба, “О суммах характеров с простыми числами”, *Докл. АН СССР*, **190**:3 (1970), 517–518; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “On sums of characters with primes”, *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 135–137.
- [33] А. А. Карацуба, “Суммы характеров с простыми числами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 299–321; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “Sums of characters over prime numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **4**:2 (1970), 303–326.
- [34] А. А. Карацуба, “Распределение значений символов Лежандра от многочленов с простыми числами”, *Докл. АН СССР*, **238**:3 (1978), 524–526; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “The distribution of values of the Legendre symbols of polynomials with prime numbers”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:1 (1978), 61–63.
- [35] А. А. Карацуба, “Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 315–324; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “Sums of Legendre symbols of polynomials of second degree over prime numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 299–308.

- [36] Г. Пойя, Г. Серё, *Задачи и теоремы из анализа*, ч. I, ГИТТЛ, М., 1956; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. I: *Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, **19**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1954.
- [37] И. М. Виноградов, “Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:3 (1966), 481–496.
- [38] А. А. Карацуба, “Суммы характеров с простыми числами, принадлежащими арифметической прогрессии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 469–484; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Sums of characters with prime numbers in an arithmetic progression”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 485–501.
- [39] А. А. Карацуба, “Квадратичные вычеты и невычеты в редких последовательностях”, *Докл. АН СССР*, **279**:5 (1984), 1044–1046; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Quadratic residues and nonresidues in sparse sequences”, *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 767–768.
- [40] А. А. Карацуба, “Распределение степенных вычетов и невычетов в аддитивных последовательностях”, *Докл. АН СССР*, **196**:4 (1971), 759–760; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Distribution of power residues and non-residues in additive sequences”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 235–235.
- [41] А. А. Карацуба, “Распределение значений характеров Дирихле на аддитивных последовательностях”, *Докл. АН СССР*, **319**:3 (1991), 543–544; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “The distribution of values of Dirichlet characters on additive sequences”, *Soviet Math. Dokl.*, **44**:1 (1992), 145–148.
- [42] Н. Davenport, P. Erdős, “The distribution of quadratic and higher residues”, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1952), 252–265.
- [43] P. Erdős, H. N. Shapiro, “On the least primitive roots of a prime”, *Pacific J. Math.*, **7**:1 (1957), 861–865.
- [44] А. А. Карацуба, “Об одной арифметической сумме”, *Докл. АН СССР*, **199**:4 (1971), 770–772; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “On a certain arithmetic sum”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1172–1174.
- [45] А. А. Карацуба, “Асимптотика одной арифметической суммы”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 737–740; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “The asymptotics of a certain arithmetical sum”, *Math. Notes*, **24**:5–6 (1978), 893–895.
- [46] А. А. Карацуба, “Суммы характеров с весами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), 29–42; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “Weighted character sums”, *Izv. Math.*, **64**:2 (2000), 249–263.
- [47] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1975.
- [48] A. A. Karatsuba, *Basic analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1993; пер. с русск.: [5].
- [49] A. A. Karatsuba, “Sums of characters with prime numbers and their applications”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **20** (2000), 155–162.
- [50] И. М. Виноградов, *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, М., 1952.
- [51] И. М. Виноградов, *Особые варианты метода тригонометрических сумм*, Наука, М., 1976.
- [52] Э. К. Фогелс, “О простых числах в начале арифметической прогрессии”, *Докл. АН СССР*, **102**:3 (1955), 455–456.
- [53] U. V. Linnik, “On the least prime in an arithmetic progression. I: The basic theorem”, *Матем. сб.*, **15**:2 (1944), 139–178; “On the least prime in an arithmetic progression. II: The Deuring–Heilbronn theorem”, *Матем. сб.*, **15**:3 (1944), 347–368.
- [54] А. А. Карацуба, “Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях”, *Докл. АН СССР*, **192**:4 (1970), 724–727; англ. пер.:

- A. A. Karatsuba, "The distribution of products of shifted primes in arithmetical progressions", *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 707–711.
- [55] И. М. Виноградов, "О границе наименьшего невычета n -й степени", *Изв. АН СССР, сер. VI*, **20**:1–2 (1926), 47–58.
- [56] И. М. Виноградов, "О распределении квадратичных вычетов и невычетов", *Журн. физ.-матем. об-ва при Пермском ун-те*, 1919, №2, 1–16.
- [57] Ю. В. Линник, "Замечание о наименьшем квадратичном невычете", *Докл. АН СССР*, **36**:4–5 (1942), 119–120.
- [58] Ю. В. Линник, "Большое решето", *Докл. АН СССР*, **30**:4 (1941), 292–294.
- [59] Ю. В. Линник, А. А. Реньи, "О некоторых гипотезах теории характеров Дирихле", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:6 (1947), 539–546.
- [60] J. E. Littlewood, "On the class-number of the corpus $P(\sqrt{-k})$ ", *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:1 (1928), 358–372.
- [61] C. L. Siegel, "Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper", *Acta Arith.*, **1** (1935), 83–86.
- [62] Ю. В. Линник, "О распределении характеров", *Докл. АН СССР*, **42**:8 (1944), 323–325.
- [63] Ю. В. Линник, "О характерах простых чисел. I", *Матем. сб.*, **16**:2 (1945), 101–120.
- [64] E. Bombieri, "On the large sieve", *Mathematika*, **12** (1965), 201–225.
- [65] А. И. Виноградов, "О плотностной гипотезе для L -рядов Дирихле", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:4 (1965), 903–934.
- [66] Л. П. Постникова, *Тригонометрические суммы и теория сравнений по простому модулю*, Учебное пособие МГПИИ им. В. И. Ленина, 1973.
- [67] С. А. Степанов, "О числе точек гиперэллиптической кривой над простым конечным полем", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:5 (1969), 1171–1181; англ. пер.: S. A. Stepanov, "On the number of points of a hyperelliptic curve over a finite prime field", *Math. USSR-Izv.*, **3**:5 (1969), 1103–1114.
- [68] S. A. Stepanov, "Elementary method in the theory of congruences for a prime modulus", *Acta Arith.*, **17** (1970), 231–247.
- [69] С. А. Степанов, "Об оценке рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем", *Сб. статей, посв. акад. И. М. Виноградову к его 80-летию*, Тр. МИАН, **112**, Наука, М., 1971, 346–371.
- [70] S. A. Stepanov, "An elementary proof of the Hasse–Weil theorem for hyperelliptic curves", *J. Number Theory*, **4**:2 (1972), 118–143.
- [71] С. А. Степанов, *Арифметика алгебраических кривых*, Наука, М., 1991; англ. пер.: S. A. Stepanov, *Arithmetic of algebraic curves*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994.
- [72] Н. М. Коробов, "Оценка суммы символов Лежандра", *Докл. АН СССР*, **196**:4 (1971), 764–767; англ. пер.: N. M. Korobov, "Estimate of a sum of Legendre symbols", *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 241–245.
- [73] Д. А. Митькин, "Об элементарном доказательстве оценки А. Вейля для рациональных тригонометрических сумм с простым знаменателем", *Изв. вузов. Матем.*, 1986, №6, 14–17; англ. пер.: D. A. Mit'kin, "An elementary proof of A. Weil's estimate for rational trigonometric sums with a prime denominator", *Soviet Math.*, **30**:6 (1986), 18–23.
- [74] М. М. Петечук, "Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени нечетного простого числа", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 892–908; англ. пер.: M. M. Petečuk, "The sum of the values of the divisor function in arithmetic progressions whose difference is a power of an odd prime", *Math. USSR-Izv.*, **15**:1 (1980), 145–160.
- [75] А. Г. Постников, "О сумме характеров по модулю, равному степени простого числа", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **19**:1 (1955), 11–16.

- [76] А. Ф. Лаврик, “Функциональное уравнение для L -функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:2 (1966), 433–448.
- [77] З. Х. Рахмонов, “О распределении значений характеров Дирихле”, *УМН*, **41**:1 (1986), 201–202; англ. пер.: Z. Kh. Rakhmonov, “On the distribution of values of Dirichlet characters”, *Russian Math. Surveys*, **41**:1 (1986), 237–238.
- [78] З. Х. Рахмонов, “Об оценке сумм характеров с простыми числами”, *Докл. АН ТаджССР*, **29**:1 (1986), 16–20.
- [79] З. Х. Рахмонов, “О наименьшем Гольдбаховом числе в арифметической прогрессии”, *Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-матем. и геол. наук*, 1986, № 2(100), 103–106.
- [80] З. Х. Рахмонов, “Распределение чисел Харди–Литтлвуда в арифметических прогрессиях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 211–224; англ. пер.: Z. Kh. Rakhmonov, “The distribution of Hardy–Littlewood numbers in arithmetic progressions”, *Math. USSR-Izv.*, **34**:1 (1990), 213–228.
- [81] З. Х. Рахмонов, “Теорема о среднем значении $\psi(x, \chi)$ и ее приложения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:4 (1993), 55–71; англ. пер.: Z. Kh. Rakhmonov, “Theorem on the mean value of $\psi(x, \chi)$ and its applications”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43**:1 (1994), 49–64.
- [82] З. Х. Рахмонов, “Средние значения функции Чебышёва”, *Докл. РАН*, **331**:3 (1993), 281–282; англ. пер.: Z. Kh. Rakhmonov, “Mean values of the Chebyshev function”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **48**:1 (1994), 85–87.
- [83] З. Х. Рахмонов, “Теорема о среднем значении функций Чебышёва”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:3 (1994), 127–139; англ. пер.: Z. Kh. Rakhmonov, “A theorem on the mean value of Chebyshev functions”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:3 (1995), 555–569.
- [84] И. М. Виноградов, “О распределении произведений простых чисел и значений функции Мёбиуса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **12**:4 (1948), 341–350.
- [85] А. А. Карацуба, “О распределении значений неглавных характеров”, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 1976, 156–164; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “On the distribution of values of nonprincipal characters”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 165–174.
- [86] Г. Д. Негматова, “Распределение степенных вычетов в редких последовательностях”, *Докл. АН ТаджССР*, **28**:4 (1985), 193–197.
- [87] Г. Д. Негматова, “Распределение значений неглавных характеров в редких последовательностях”, *УМН*, **44**:5 (1989), 177–178; англ. пер.: G. D. Negmatova, “The distribution of values of non-principal characters in lacunary sequences”, *Russian Math. Surveys*, **44**:5 (1989), 214–215.
- [88] M. Z. Garaev, A. A. Karatsuba, “On character sums and the exceptional set of a congruence problem”, *J. Number Theory*, **114**:1 (2005), 182–192.
- [89] А. И. Виноградов, “О свойстве симметрии сумм характеров Дирихле”, *Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем.*, **9**:1 (1965), 21–27.
- [90] M. Z. Garaev, A. A. Karatsuba, “The representation of residue classes by products of small integers”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **50**:2 (2007), 363–375.
- [91] P. Deligne, “La conjecture de Weil. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43**:1 (1974), 273–307; “La conjecture de Weil. II”, **52**:1 (1980), 137–252.
- [92] С. М. Воронин, Р. Турганалиев, “О простых числах в квазипрогрессиях”, *Вестн. АН КазССР*, 1988, № 6, 47–53.
- [93] А. А. Карацуба, Б. Новак, “Арифметические задачи с числами специального вида”, *Матем. заметки*, **66**:2 (1999), 315–317; англ. пер.: A. A. Karatsuba, B. Novak, “Arithmetical problems with numbers of special type”, *Math. Notes*, **66**:2 (1999), 251–253.

- [94] К. М. Эминян, “О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 680–686; англ. пер.: К. М. Ėminyan, “On the Dirichlet divisor problem in some sequences of natural numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **38**:3 (1992), 669–675.
- [95] К. М. Эминян, “О представлении чисел с заданными свойствами двоичного разложения суммами двух квадратов”, *Теория чисел и анализ: Труды международной конференции, посв. 100-летию со дня рождения акад. И. М. Виноградова*, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 377–382; англ. пер.: К. М. Ėminyan, “On the representation of numbers with given properties of binary expansion by sums of two squares”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **207** (1995), 347–351.
- [96] К. М. Эминян, “Об одной бинарной задаче”, *Матем. заметки*, **60**:4 (1996), 634–637; англ. пер.: К. М. Ėminyan, “A binary problem”, *Math. Notes*, **60**:4 (1996), 478–481.
- [97] А. А. Карацуба, “Об оценках снизу сумм характеров от многочленов”, *Матем. заметки*, **14**:1 (1973), 67–72; англ. пер.: А. А. Karatsuba, “Lower bounds for sums of the characters of polynomials”, *Math. Notes*, **14** (1973), 593–596.
- [98] А. О. Гельфонд, “Об одном элементарном подходе к некоторым задачам из области распределения простых чисел”, *Вестн. МГУ, сер. физ.-матем. и естеств. наук*, вып. 1, № 2, 1953, 21–26.
- [99] А. О. Гельфонд, *Избранные труды*, Наука, М., 1973.

А. А. Карацуба (А. А. Karatsuba)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: karatsuba@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

10.03.2008