Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, Лог-канонические пороги
неособых трехмерных многообразий Фано, *УМН*, 2008,
том 63, выпуск 5, 73–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 06:15:26

УДК 512.76

Лог-канонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано

И. А. Чельцов, К. А. Шрамов

Комплексный показатель особенности является локальным инвариантом голоморфной функции, который может быть определен в терминах интегрируемости дробных степеней данной функции. Лог-канонические пороги эффективных $\mathbb{Q}$ -дивизоров на нормальных алгебраических многообразиях суть алгебраические аналоги комплексных показателей особенности. В случае многообразий Фано у этих инвариантов есть глобальные аналоги. В первом случае это так называемый α -инвариант Тиана, а во втором – глобальный лог-канонический порог многообразия Фано, равный инфимуму лог-канонических порогов всех эффективных $\mathbb{Q}$ -дивизоров, численно эквивалентных антиканоническому дивизору. В приложении к настоящей работе показано, что глобальный лог-канонический порог неособого многообразия Фано совпадает с его α -инвариантом Тиана. Основная цель работы – найти глобальные лог-канонические пороги неособых трехмерных многообразий Фано (всего существует 105 деформационных семейств таких многообразий). В работе найдено значение глобального лог-канонического порога всех многообразий из 64 деформационных семейств и общих многообразий из еще 20 деформационных семейств. Для многообразий из 14 семейств получены оценки на возможные значения глобальных лог-канонических порогов. Приложение А написано Ж.-П. Демайи.

Библиография: 73 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	74
2. Предварительные сведения.....	88
3. Кубические поверхности.....	98
4. Поверхности дель Пеццо.....	107
5. Торические многообразия.....	112
6. Многообразия дель Пеццо.....	113
7. Многообразия с числом Пикара $\rho = 2$	116
8. Многообразия с числом Пикара $\rho = 3$	128
9. Многообразия с числом Пикара $\rho \geq 4$	151

Работа выполнена при поддержке грантов NSF DMS-0701465 и EPSRC EP/E048412/1, а также грантов РФФИ № 08-01-00395-а и НШ-1987.2008.1.

© И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, 2008

10. Оценки сверху	160
Приложение А.	
Ж.-П. Демайи. Инвариант Тиана и лог-канонические пороги	165
Приложение В. Большая таблица	172
Список литературы	176

1. Введение

Кратность многочлена $\varphi \in \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_n]$ в начале координат $O \in \mathbb{C}^n$ есть число

$$\min \left\{ m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \frac{\partial^m \varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial^{m_1} z_1 \partial^{m_2} z_2 \dots \partial^{m_n} z_n} (O) \neq 0 \right\} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}.$$

Более тонким инвариантом является число $c_0(\varphi) \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$, определяемое формулой

$$c_0(\varphi) = \sup \{ \varepsilon \in \mathbb{Q} \mid \text{функция } |\varphi|^{-2\varepsilon} \text{ интегрируема в окрестности точки } O \in \mathbb{C}^n \},$$

которое называют комплексным показателем особенности многочлена φ в точке O .

ПРИМЕР 1.1. Пусть $m_1, m_2, \dots, m_n$ – произвольные положительные целые числа. Тогда

$$\min \left(1, \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right) = c_0 \left(\sum_{i=1}^n z_i^{m_i} \right) \geq c_0 \left(\prod_{i=1}^n z_i^{m_i} \right) = \min \left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_n} \right).$$

Пусть X – алгебраическое многообразие¹, которое имеет не более чем лог-канонические особенности (см. [1]), пусть $Z \subseteq X$ – некоторое непустое замкнутое подмногообразие, и пусть D – эффективный $\mathbb{Q}$ -Картье $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии X . Тогда число

$$\text{lct}_Z(X, D) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ лог-канонична вдоль } Z \} \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$$

называется лог-каноническим порогом дивизора D вдоль Z . В работе [1] показано, что

$$\text{lct}_O(\mathbb{C}^n, (\varphi = 0)) = c_0(\varphi),$$

т. е. $\text{lct}_Z(X, D)$ – обобщение числа $c_0(\varphi)$. Положим $\text{lct}(X, D) = \text{lct}_X(X, D)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{lct}(X, D) &= \inf \{ \text{lct}_P(X, D) \mid P \in X \} \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ лог-канонична} \}. \end{aligned}$$

Пусть X – многообразие Фано (см. [2]) с лог-терминальными особенностями.

¹Все многообразия считаются проективными, нормальными и определенными над полем $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Глобальный лог-канонический порог многообразия Фано X есть число

$$\mathrm{lct}(X) = \inf\{\mathrm{lct}(X, D) \mid D - \text{эффективный } \mathbb{Q}\text{-дивизор на } X \\ \text{такой, что } D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X\} \geq 0.$$

Число $\mathrm{lct}(X)$ является алгебраическим аналогом так называемого α -инварианта многообразия X , который был определен в работе [3]. Легко видеть, что выполнено равенство

$$\mathrm{lct}(X) = \sup\{\varepsilon \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, n^{-1}\varepsilon D) \text{ лог-канонична для} \\ \text{каждого дивизора } D \in |-nK_X| \text{ при всех } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Группа $\mathrm{Pic}(X)$ свободна от кручения, так как X рационально связно (см. [4]). Имеем

$$\mathrm{lct}(X) = \sup\{\lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ имеет лог-канонические особенности} \\ \text{для каждого эффективного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D \equiv -K_X\}.$$

ПРИМЕР 1.3. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $m < n$. Тогда выполнено равенство $\mathrm{lct}(X) = 1/(n+1-m)$ (см. [5]). В частности, имеем $\mathrm{lct}(\mathbb{P}^n) = 1/(n+1)$.

ПРИМЕР 1.4. Пусть X – рациональное однородное пространство такое, что $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[D]$, где D – обильный дивизор. Тогда $\mathrm{lct}(X) = 1/r$ (см. [6]), где $-K_X \sim rD$ и $r \in \mathbb{Z}_{>0}$.

В общем случае число $\mathrm{lct}(X)$ меняется при малых деформациях многообразия X .

ПРИМЕР 1.5. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$ степени 6. Тогда

$$\mathrm{lct}(X) \in \left\{ \frac{5}{6}, \frac{43}{50}, \frac{13}{15}, \frac{33}{38}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{13}{14}, \frac{15}{16}, \frac{17}{18}, \frac{19}{20}, \frac{21}{22}, \frac{29}{30}, 1 \right\}$$

согласно работам [7] и [8]. Все эти значения числа $\mathrm{lct}(X)$ реализуются.

ПРИМЕР 1.6. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 2$. Тогда, согласно работе [5],

$$1 \geq \mathrm{lct}(X) \geq 1 - 1/n.$$

В работах [7] и [8] показано, что для общей гиперповерхности X

$$\mathrm{lct}(X) \geq \begin{cases} 1, & \text{если } n \geq 6, \\ 22/25, & \text{если } n = 5, \\ 16/21, & \text{если } n = 4, \\ 3/4, & \text{если } n = 3, \end{cases}$$

при этом если X содержит конус размерности $n-2$, то выполнено равенство $\mathrm{lct}(X) = 1 - 1/n$.

ПРИМЕР 1.7. Пусть X – квазигладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, a_1, \dots, a_4)$ степени $\sum_{i=1}^4 a_i$, имеющая терминальные особенности, где $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Тогда $-K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, a_1, \dots, a_4)}(1)|_X$, а для четверки (a_1, a_2, a_3, a_4) имеется 95 возможностей (см. [9], [10]). Если X общая, то

$$1 \geq \text{lct}(X) \geq \begin{cases} 16/21, & \text{если } a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, \\ 7/9, & \text{если } (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 1, 2), \\ 4/5, & \text{если } (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 2), \\ 6/7, & \text{если } (a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 3), \\ 1 & \text{во всех оставшихся случаях} \end{cases}$$

(см. [11], [8], [12]). Лог-канонический порог гиперповерхности

$$w^2 = t^3 + z^9 + y^{18} + x^{18} \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 6, 9) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w])$$

равен $17/18$ (см. [11]), где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = 1$, $\text{wt}(z) = 2$, $\text{wt}(t) = 6$, $\text{wt}(w) = 9$.

ПРИМЕР 1.8. Из леммы 5.1 следует, что $\text{lct}(\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)) = a_0 / \sum_{i=0}^n a_i$ при условии, что пространство $\mathbb{P}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ хорошо сформировано (см. [9]) и $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$.

ПРИМЕР 1.9. Пусть X – неособая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^{n+1}, d)$ степени $2d$. Если $2 \leq d \leq n - 1$, то выполнено равенство $\text{lct}(X) = 1/(n + 1 - d)$ (см. [13; предложение 20]).

ПРИМЕР 1.10. Пусть X – неособая поверхность дель Пеццо. В работе [14] показано, что

$$\text{lct}(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } K_X^2 = 1 \text{ и } |-K_X| \text{ не содержит каспидальную кривую,} \\ 5/6, & \text{если } K_X^2 = 1 \text{ и } |-K_X| \text{ содержит каспидальную кривую,} \\ 5/6, & \text{если } K_X^2 = 2 \text{ и } |-K_X| \text{ не содержит такнодальную кривую,} \\ 3/4, & \text{если } K_X^2 = 2 \text{ и } |-K_X| \text{ содержит такнодальную кривую,} \\ 3/4, & \text{если } X \text{ является кубикой в } \mathbb{P}^3, \text{ не содержащей} \\ & \text{точек Эккарда,} \\ 2/3, & \text{если } X \text{ является кубикой в } \mathbb{P}^3 \text{ с точкой Эккарда,} \\ & \text{либо } K_X^2 = 4, \\ 1/2, & \text{если } X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ или } K_X^2 \in \{5, 6\}, \\ 1/3 & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Было бы интересно найти глобальные лог-канонические пороги поверхностей дель Пеццо ранга Пикара 1, которые имеют не более чем канонические особенности (см. [15]).

ПРИМЕР 1.11. Пусть X – особая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, имеющая канонические особенности. Конфигурации особенностей поверхности X описаны

в [16]. В [17] показано, что

$$\mathrm{lct}(X) = \begin{cases} 2/3, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{A}_1\}, \\ 1/3, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) \supseteq \{\mathbb{A}_4\} \text{ или } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{D}_4\} \\ & \text{или } \mathrm{Sing}(X) \supseteq \{\mathbb{A}_2, \mathbb{A}_2\}, \\ 1/4, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) \supseteq \{\mathbb{A}_5\} \text{ или } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{D}_5\}, \\ 1/6, & \text{если } \mathrm{Sing}(X) = \{\mathbb{E}_6\}, \\ 1/2 & \text{в оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Рационально ли число $\mathrm{lct}(X)$, пока неизвестно² (ср. [18; вопрос 1]).

ГИПОТЕЗА 1.12. *Существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ на многообразии X такой, что $\mathrm{lct}(X) = \mathrm{lct}(X, D) \in \mathbb{Q}$.*

Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – произвольная подгруппа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. *Глобальным G -инвариантным лог-каноническим порогом* многообразия Фано X будем называть число или $+\infty$, определенное посредством равенства

$$\mathrm{lct}(X, G) = \sup\{\lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, n^{-1}\varepsilon\mathcal{D}) \text{ лог-канонична для каждой} \\ G\text{-инвариантной линейной подсистемы } \mathcal{D} \subset |-nK_X| \\ \text{при всех } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.14. В определениях 1.2 и 1.13 достаточно предполагать, что $|-nK_X| \neq \emptyset$ для некоторого $n \gg 0$. Последнее выполнено, например, для торических многообразий и для слабых многообразий Фано. Однако известные применения чисел $\mathrm{lct}(X)$ и $\mathrm{lct}(X, G)$ предполагают обильность дивизора $-K_X$ и компактность группы G .

В приложении А показано, что если X неособо, а группа G компактна, то выполнено равенство $\mathrm{lct}(X, G) = \alpha_G(X)$, где $\alpha_G(X)$ – α -инвариант Тиана, введенный в [3]. Отметим, что

$$\mathrm{lct}(X, G) = \sup\{\lambda \in \mathbb{Q} \mid \text{лог-пара } (X, \lambda D) \text{ лог-канонична для каждого эффективного} \\ G\text{-инвариантного } \mathbb{Q}\text{-дивизора } D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X\}$$

в случае, когда $|G| < +\infty$. Очевидно, что $0 \leq \mathrm{lct}(X) \leq \mathrm{lct}(X, G) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

ПРИМЕР 1.15. Пусть X – неособая поверхность дель Пеццо такая, что $K_X^2 = 5$. Тогда имеется изоморфизм $\mathrm{Aut}(X) \cong S_5$ (см. [19]) и $\mathrm{lct}(X, S_5) = \mathrm{lct}(X, A_5) = 2$ (см. [14]).

ПРИМЕР 1.16. Пусть X – кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, которая задана уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \subset \mathbb{P}^3 \cong \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t]),$$

и пусть $G = \mathrm{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}_3^3 \rtimes S_4$. Тогда $\mathrm{lct}(X, G) = 4$ (см. [14]).

²Рациональность числа $\mathrm{lct}(X)$ не установлена даже в случае, когда X – поверхность дель Пеццо с факторособенностями.

В работах [3], [20], [21] доказан следующий результат (ср. приложение А).

ТЕОРЕМА 1.17. *Предположим, что многообразие Фано X имеет факторособенности и группа G компактна. Если*

$$\mathrm{lct}(X, G) > \frac{\dim X}{\dim X + 1},$$

то многообразие X допускает орбифолдную метрику Кэлера–Эйнштейна.

Теорема 1.17 имеет многочисленные применения (см. работу [20] и примеры 1.6 и 1.7).

ПРИМЕР 1.18. Пусть X – многообразие Фано, полученное раздутием $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении двух прямых. В работе [20] показано, что $\mathrm{lct}(X, G) \geq 1$, где G – максимальная компактная подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$. По теореме 1.46 выполнено равенство $\mathrm{lct}(X) = 1/3$.

Если многообразие, имеющее не более чем факторособенности, допускает орбифолдную метрику Кэлера–Эйнштейна, то существует три возможности: либо его канонический дивизор численно тривиален, либо его канонический дивизор обилен, либо его антиканонический дивизор обилен (многообразие Фано). На многообразии с факторособенностями, чей канонический класс численно тривиален или обилен, существует метрика Кэлера–Эйнштейна (см. [22]–[24]).

Известно несколько препятствий для существования метрики Кэлера–Эйнштейна на многообразии Фано X . Например, если многообразие Фано X неособо, то X не обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна в случае, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является редуктивной (см. [25]);
- касательное расслоение многообразия X не является прямой суммой расслоений, стабильных относительно антиканонического дивизора $-K_X$ (см. [26]);
- характер Футаки голоморфных векторных полей на X не обращается в нуль тождественно (см. [27]).

ПРИМЕР 1.19. Метрика Кэлера–Эйнштейна не существует на следующих многообразиях: раздутие $\mathbb{P}^2$ в одной или двух различных точках (см. [25]); неособое трехмерное многообразие Фано $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ (см. [28]), неособое четырехмерное многообразие Фано $\mathbb{P}(\alpha^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \oplus \beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)))$ (см. [27]), где $\alpha: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\beta: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – проекции.

Проблема существования метрик Кэлера–Эйнштейна на неособых торических многообразиях Фано решена. Имеет место следующий результат (см. [29]–[32]).

ТЕОРЕМА 1.20. *Пусть X – неособое торическое многообразие Фано. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (а) *многообразие Фано X обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна;*
- (б) *инвариант Футаки голоморфных векторных полей на X обращается в нуль;*
- (с) *барицентр рефлексивного многогранника многообразия X есть начало координат.*

Отметим, что утверждение теоремы 1.17 дает только достаточное условие для существования метрики Кэлера–Эйнштейна на многообразии Фано X .

ПРИМЕР 1.21. Пусть X – общая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, которая обладает одной точкой Эккарда (см. определение 3.1). Тогда, согласно работе [14], $\text{lct}(X, \text{Aut}(X)) = 2/3$, где $\text{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}_2$ (см. [19]). Однако каждая неособая поверхность дель Пеццо, имеющая редуктивную группу автоморфизмов, обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна (см. [33]).

ПРИМЕР 1.22. Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1^5, 3)$ степени 6. Тогда выполнено равенство $\text{lct}(X, \text{Aut}(X)) = 1/2$ (см. пример 1.9), где $\text{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}_2$ (см. [34]), но многообразие X обладает метрикой Кэлера–Эйнштейна (см. [35]).

Числа $\text{lct}(X)$ и $\text{lct}(X, G)$ играют важную роль в бирациональной геометрии.

ПРИМЕР 1.23. Предположим, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho} & \bar{V} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ Z & \xlongequal{\quad} & Z \end{array}$$

такая, что V и $\bar{V}$ – многообразия, имеющие не более чем терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, Z – неособая кривая, π и $\bar{\pi}$ – плоские морфизмы, а ρ – бирациональное отображение, которое индуцирует изоморфизм $V \setminus X \cong \bar{V} \setminus \bar{X}$, где X и $\bar{X}$ – схемные слои над точкой $O \in Z$ морфизмов π и $\bar{\pi}$ соответственно. Предположим, что схемные слои X и $\bar{X}$ неприводимы и приведены, дивизоры $-K_V$ и $-K_{\bar{V}}$ являются π -обильным и $\bar{\pi}$ -обильным соответственно, многообразия X и $\bar{X}$ имеют не более чем лог-терминальные особенности, а ρ не является изоморфизмом. Тогда из работ [36] и [17] следует, что

$$\text{lct}(X) + \text{lct}(\bar{X}) \leq 1, \quad (1.1)$$

где X и $\bar{X}$ являются многообразиями Фано по формуле присоединения.

В общем случае неравенство (1.1) нельзя усилить.

ПРИМЕР 1.24. Пусть $\pi: V \rightarrow Z$ – сюръективный плоский морфизм неособого трехмерного многообразия V на неособую кривую Z такой, что дивизор $-K_V$ является π -обильным, и пусть X – схемный слой морфизма π над точкой $O \in Z$. Предположим, что X – неособая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, которая содержит прямые L_1, L_2, L_3 , пересекающиеся в одной точке $P \in V$. В работе [37] показано, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{\psi} & \bar{U} & \\ \alpha \swarrow & & & & \searrow \beta \\ V & \xrightarrow{\rho} & & \bar{V} & \\ \pi \searrow & & & & \swarrow \bar{\pi} \\ & Z & \xlongequal{\quad} & Z & \end{array}$$

где α – раздутие точки P , отображение ψ является антифлипом в собственных прообразах прямых L_1, L_2, L_3 , а β – стягивание собственного прообраза поверхности X . Тогда бирациональное отображение ρ не является изоморфизмом, многообразие $\bar{V}$ имеет терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, дивизор $-K_{\bar{V}}$ является $\bar{\pi}$ -обильным дивизором Картье, отображение ρ индуцирует изоморфизм $V \setminus X \cong \bar{V} \setminus \bar{X}$, где $\bar{X}$ – схемный слой морфизма $\bar{\pi}$ над точкой O . Тогда $\bar{X}$ – кубическая поверхность с одной особой точкой типа $\mathbb{D}_4$, откуда $\text{lct}(X) = 2/3$ и $\text{lct}(\bar{X}) = 1/3$ (см. примеры 1.10 и 1.11).

С помощью глобальных лог-канонических порогов можно доказывать нерациональность некоторых многомерных многообразий Фано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25. Многообразие Фано X бирационально сверхжестко, если выполнено следующее:

- (i) $\text{rk Pic}(X) = 1$;
- (ii) многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности;
- (iii) не существует доминантного рационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ с рационально связными слоями такого, что $0 \neq \dim Y < \dim X$;
- (iv) не существует бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что Y имеет терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и $\text{rk Pic}(Y) = 1$;
- (v) группы $\text{Bir}(X)$ и $\text{Aut}(X)$ совпадают.

Следующий результат известен как неравенство Нётера–Фано (см. [38]).

ТЕОРЕМА 1.26. *Многообразие X бирационально сверхжестко тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\text{rk Pic}(X) = 1$, многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и для каждой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, лог-пара $(X, \mathcal{M})$ канонична, где $K_X + \lambda\mathcal{M} \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одна часть требуемого утверждения хорошо известна (см. [38]), поэтому мы докажем только другую половину. Предположим, что X бирационально сверхжестко и при этом на X существует линейная система $\mathcal{M}$ такая, что $\mathcal{M}$ не имеет неподвижных компонент, а особенности лог-пары $(X, \lambda\mathcal{M})$ не каноничны, где $K_X + \lambda\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

Рассмотрим такой бирациональный морфизм $\pi: V \rightarrow X$, что многообразие V неособо и собственный прообраз системы $\mathcal{M}$ на многообразии V не имеет базисных точек. Пусть $\mathcal{B}$ – собственный прообраз системы $\mathcal{M}$ на многообразии V . Тогда

$$K_V + \lambda\mathcal{B} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(K_X + \lambda\mathcal{M}) + \sum_{i=1}^r a_i E_i \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^r a_i E_i,$$

где E_i – исключительный дивизор морфизма π и $a_i \in \mathbb{Q}$.

Из работы [39] следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \rho \swarrow & & \searrow \pi \\ U & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

такой, что ρ – бирациональное отображение, морфизм φ бирационален, дивизор

$$K_U + \lambda\rho(\mathcal{B}) \sim_{\mathbb{Q}} \varphi^*(K_X + \lambda\mathcal{M}) + \sum_{i=1}^r a_i \rho(E_i) \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^r a_i \rho(E_i)$$

численно эффективен относительно морфизма φ , многообразие U имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, а лог-пара $(U, \lambda\rho(\mathcal{B}))$ имеет терминальные особенности.

Отметим, что φ не является изоморфизмом. Действительно, из [40; п. 1.1] следует, что

$$a_i > 0 \implies \dim(\rho(E_i)) \leq \dim X - 2,$$

а поскольку особенности лог-пары $(X, \lambda\mathcal{M})$ не являются каноническими по предположению, из конструкции отображения ρ следует существование $k \in \{1, \dots, r\}$ такого, что выполнено неравенство $a_k < 0$ и подмногообразие $\rho(E_k)$ является дивизором в U .

Таким образом, мы видим, что дивизор $K_U + \lambda\rho(\mathcal{B})$ не является псевдоэффективным. В этом случае из работы [39] следует существование диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & & Z \end{array}$$

такой, что ψ – бирациональное отображение, морфизм τ является Мори расслоенным пространством (см. [41]), а дивизор $-(K_Y + \lambda(\psi \circ \rho)(\mathcal{B}))$ обилен относительно морфизма τ .

Многообразие Y имеет терминальные и $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, и выполнено равенство $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(Y/Z) = 1$. Тогда отображение $\psi \circ \rho \circ \pi^{-1}$ не является изоморфизмом, поскольку $K_X + \lambda\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} 0$, но общий слой морфизма τ рационально связан (см. [4]), что противоречит сделанному ранее предположению о том, что многообразие X является бирационально сверхжестким. Утверждение теоремы доказано.

Бирационально сверхжесткие многообразия Фано нерациональны (см. [38]), откуда следует, что $\dim(X) \neq 2$, если X бирационально сверхжестко (ср. [42]).

ПРИМЕР 1.27. Общая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ степени $n \geq 4$ и в $\mathbb{P}(1^{n+1}, n)$ степени $2n \geq 6$ бирационально сверхжестка (см. [43], [7]).

Следующий результат доказан в работе [7].

ТЕОРЕМА 1.28. Пусть $X_1, \dots, X_r$ – бирационально сверхжесткие многообразия Фано такие, что выполнены неравенства $\mathrm{lct}(X_i) \geq 1$, $i = 1, \dots, r$. Тогда

(а) многообразие $X_1 \times \dots \times X_r$ нерационально и

$$\mathrm{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \mathrm{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r),$$

(b) для каждого рационального доминантного отображения $\rho: X_1 \times \cdots \times X_r \dashrightarrow Y$, чей общий слой является рационально связным многообразием, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_r & & \\ \pi \downarrow & \searrow \rho & \\ X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_k} & \xrightarrow[\xi]{\quad} & Y \end{array}$$

для некоторого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, где ξ – бирациональное отображение, а π – проекция.

Из примеров 1.6 и 1.27 следует, что многообразия, удовлетворяющие всем условиям теоремы 1.28, действительно существуют. Примеры таких многообразий можно строить явно.

ПРИМЕР 1.29. Пусть X – гиперповерхность, заданная уравнением

$$w^2 = x^6 + y^6 + z^6 + t^6 + x^2 y^2 z t \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = \text{wt}(t) = 1$ и $\text{wt}(w) = 3$. Тогда X является неособым и бирационально сверхжестким (см. [44]), а из работы [8] следует, что $\text{lct}(X) = 1$.

Предположим дополнительно, что подгруппа $G \subset \text{Aut}(X)$ конечна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30. Многообразие Фано X называется G -бирационально сверхжестким, если выполнены следующие условия:

- G -инвариантная подгруппа группы $\text{Cl}(X)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$;
- многообразие X имеет терминальные особенности;
- не существует такого доминантного G -эквивариантного рационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ с рационально связными слоями, что $0 \neq \dim Y < \dim X$;
- не существует такого небирегулярного G -эквивариантного бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$, что многообразие Y имеет не более чем терминальные особенности, а G -инвариантная подгруппа группы $\text{Cl}(Y)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

Из доказательства теоремы 1.26 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.31. Многообразие X является G -бирационально сверхжестким, если и только если G -инвариантная подгруппа группы $\text{Cl}(X)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$, многообразие X имеет терминальные особенности и для каждой G -инвариантной линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , которая не имеет неподвижных компонент, лог-пара $(X, \lambda\mathcal{M})$ имеет канонические особенности, где $K_X + \lambda\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

Из доказательства теоремы 1.28 вытекает следующий результат (см. [14]).

ТЕОРЕМА 1.32. Пусть X_i – многообразие Фано, и пусть $G_i \subset \text{Aut}(X_i)$ – конечная подгруппа такая, что многообразие X_i является G_i -бирационально сверхжестким и выполнено неравенство $\text{lct}(X_i, G_i) \geq 1$ при $i = 1, \dots, r$. Тогда

- (а) многообразие $X_1 \times \cdots \times X_r$ не обладает $G_1 \times \cdots \times G_r$ -эquivариантным бирациональным отображением $\rho: X_1 \times \cdots \times X_r \dashrightarrow \mathbb{P}^n$;
- (б) каждый $G_1 \times \cdots \times G_r$ -эquivариантный бирациональный автоморфизм многообразия $X_1 \times \cdots \times X_r$ является bireгулярным;
- (с) для каждого $G_1 \times \cdots \times G_r$ -эquivариантного рационального доминантного отображения $\rho: X_1 \times \cdots \times X_r \dashrightarrow Y$, чей общий слой является рационально связным многообразием, существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_r & & \\ \pi \downarrow & \searrow \rho & \\ X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_k} & \xrightarrow{\xi} & Y \end{array}$$

для некоторого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$, где ξ является бирациональным отображением, а π является естественной проекцией.

Многообразия, удовлетворяющие условиям теоремы 1.32, существуют (см. пример 1.16).

ПРИМЕР 1.33. Простая группа A_6 является группой автоморфизмов кривой

$$10x^3y^3 + 9zx^5 + 9zy^5 + 27z^6 = 45x^2y^2z^2 + 135xyz^4 \subset \mathbb{P}^2 \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z]),$$

что индуцирует вложение $A_6 \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Тогда $\mathbb{P}^2$ является A_6 -бirationально сверхжесткой поверхностью такой, что $\text{lct}(\mathbb{P}^2, A_6) = 2$ (см. [14]). По теореме 1.32 существует индуцированное вложение $A_6 \times A_6 \cong \Omega \subset \text{Bir}(\mathbb{P}^4)$ такое, что Ω не сопряжена подгруппам в $\text{Aut}(\mathbb{P}^4)$.

Теперь мы рассмотрим многообразия Фано, чья бирациональная геометрия очень похожа на бирациональную геометрию бирационально сверхжестких многообразий Фано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.34. Многообразие X бирационально жестко, если:

- выполнено равенство $\text{rk Pic}(X) = 1$;
- многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные и терминальные особенности;
- не существует рационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ с рационально связными слоями такого, что $0 \neq \dim Y < \dim X$;
- не существует бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$ такого, что $Y \not\cong X$, многообразие Y имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и $\text{rk Pic}(Y) = 1$.

Из доказательства теоремы 1.26 вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.35. Многообразие X бирационально жестко, если и только если $\text{rk Pic}(X) = 1$, многообразие X имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и для каждой непустой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, существует $\xi \in \text{Bir}(X)$ такой, что лог-пара $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ канонична, где $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Бирационально жесткие многообразия Фано нерациональны (см. [38]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.36. Пусть X бирационально жестко. Подмножество $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$ откручивает все максимальные особенности, если для каждой линейной системы $\mathcal{M}$ на многообразии X , не имеющей неподвижных компонент, существует $\xi \in \Gamma$ такое, что лог-пара $(X, \lambda\xi(\mathcal{M}))$ канонична, где λ – такое рациональное число, что $K_X + \lambda\xi(\mathcal{M}) \equiv 0$.

Из бирациональной жесткости многообразия X и существования подмножества $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$, которое откручивает все максимальные особенности, следует, что $\text{Bir}(X) = \langle \Gamma, \text{Aut}(X) \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.37. Многообразие X называется *универсально бирационально жестким*, если для любого многообразия U многообразие $X \otimes \text{Spec}(\mathbb{C}(U))$ бирационально жестко над полем рациональных функций $\mathbb{C}(U)$ многообразия U .

Отметим, что определение 1.34 обобщается на многообразия Фано, определенные над произвольным совершенным полем (см. [42], [19]).

ПРИМЕР 1.38. Пусть X – трехмерное многообразие такое, что существует конечный морфизм $\pi: X \rightarrow Q \subset \mathbb{P}^3$, где Q – неособая трехмерная квадрика, а π – двойное накрытие с ветвлением в неособой поверхности $S \subset Q$ степени 8. Существует однопараметрическое семейство кривых

$$\mathcal{C} = \{C \subset X \mid C \text{ – неособая кривая такая, что } -K_X \cdot C = 1\},$$

и для каждой кривой $C \in \mathcal{C}$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & Q \\ \psi_C \downarrow & & \downarrow \varphi_C \\ \mathbb{P}^2 & \xlongequal{\quad} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где φ_C – проекция из прямой $\pi(C)$. Тогда общий слой отображения ψ_C – неособая эллиптическая кривая. Рациональное отображение ψ_C задает эллиптическое расслоение с сечением, которое индуцирует бирациональную инволюцию τ_C . Известно, что

$$\psi_C \in \text{Aut}(X) \iff C \subset S$$

и в случае, когда многообразие X достаточно общее, поверхность S не содержит кривых из семейства $\mathcal{C}$. В работе [44] показано, что существует точная последовательность групп

$$1 \rightarrow \Gamma \rightarrow \text{Bir}(X) \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow 1,$$

где Γ – свободное произведением подгрупп, порожденных бирациональными небирегулярными инволюциями τ_C , $C \in \mathcal{C}$. Тогда X универсально бирационально жестко.

Бирационально сверхжесткие многообразия Фано универсально бирационально жестки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.39. Предположим, что X универсально бирационально жестко. Подмножество $\Gamma \subset \text{Bir}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если для любого многообразия U индуцированное подмножество

$$\Gamma \subset \text{Bir}(X) \subseteq \text{Bir}(X \otimes \text{Spec}(\mathbb{C}(U)))$$

откручивает все максимальные особенности на многообразии $X \otimes \text{Spec}(\mathbb{C}(U))$.

Легко видеть, что любое подмножество в $\text{Aut}(X)$ универсально откручивает все максимальные особенности, если многообразие Фано X является бирационально сверхжестким.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.40. Пусть X – бирационально жесткое многообразие Фано. Рассмотрим произвольное подмножество $\Gamma \subseteq \text{Bir}(X)$ и предположим, что $\dim X \neq 1$. Тогда из работы [45] следует, что следующие условия эквивалентны:

- подмножество Γ универсально откручивает все максимальные особенности;
- подмножество Γ откручивает все максимальные особенности, а группа $\text{Bir}(X)$ счетна.

ПРИМЕР 1.41. В обозначениях и предположениях примера 1.7 предположим, что гиперповерхность X общая. Тогда:

- гиперповерхность X является универсально бирационально жесткой (см. [46]),
- существуют инволюции $\tau_1, \dots, \tau_k \in \text{Bir}(X)$ такие, что последовательность групп

$$1 \rightarrow \langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle \rightarrow \text{Bir}(X) \rightarrow \text{Aut}(X) \rightarrow 1$$

- точна (см. [46], [47]), где $\langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$ – подгруппа, порожденная $\tau_1, \dots, \tau_k$,
- $\langle \tau_1, \dots, \tau_k \rangle$ универсально откручивает все максимальные особенности (см. [46]),

а все соотношения между инволюциями $\tau_1, \dots, \tau_k$ найдены в работе [47].

Пусть $X_1, \dots, X_r$ – многообразия Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями такие, что $\text{rk Pic}(X_1) = \dots = \text{rk Pic}(X_r) = 1$. Рассмотрим проекцию

$$\pi_i: X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_i \times X_{i+1} \times \dots \times X_r \rightarrow X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r$$

и обозначим символом $\mathcal{X}_i$ общий слой проекции π_i в схемном смысле; многообразие $\mathcal{X}_i$ определено над полем $\mathbb{C}(X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times \widehat{X_i} \times X_{i+1} \times \dots \times X_r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.42. Существуют естественные вложения групп

$$\prod_{i=1}^r \text{Bir}(X_i) \subseteq \langle \text{Bir}(\mathcal{X}_1), \dots, \text{Bir}(\mathcal{X}_r) \rangle \subseteq \text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r).$$

В работе [11] доказано следующее обобщение теоремы 1.28.

ТЕОРЕМА 1.43. *Предположим, что $X_1, \dots, X_r$ универсально бирационально жестки и выполнены неравенства $\text{lct}(X_i) \geq 1$, $i = 1, \dots, r$. Тогда*

(а) *многообразие $X_1 \times \dots \times X_r$ нерационально и*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \langle \text{Bir}(\mathcal{X}_1), \dots, \text{Bir}(\mathcal{X}_r), \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r) \rangle,$$

(b) *для любого рационального доминантного отображения $\rho: X_1 \times \dots \times X_r \dashrightarrow Y$ такого, что общий слой отображения ρ рационально связан, существуют подмножество $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, r\}$ и коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_r & \xrightarrow{\sigma} & X_1 \times \dots \times X_r \\ \pi \downarrow & & \searrow \rho \\ X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k} & \xrightarrow{\xi} & Y \end{array}$$

где π – естественная проекция, а ξ и σ – бирациональные отображения.

СЛЕДСТВИЕ 1.44. *Предположим, что существует подгруппа $\Gamma_i \subseteq \text{Bir}(X_i)$, универсально откручивающая все максимальные особенности, и $\text{lct}(X_i) \geq 1$ для всех $i = 1, \dots, r$. Тогда*

$$\text{Bir}(X_1 \times \dots \times X_r) = \left\langle \prod_{i=1}^r \Gamma_i, \text{Aut}(X_1 \times \dots \times X_r) \right\rangle.$$

В частности, с помощью примеров 1.7 и 1.41 мы получаем следующий пример.

ПРИМЕР 1.45 (ср. с примером 1.41). Пусть X – общая гиперповерхность в $\mathbb{P}(1, 1, 4, 5, 10)$ степени 20. Тогда существует точная последовательность групп

$$1 \rightarrow \prod_{i=1}^m (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Bir}(\underbrace{X \times \dots \times X}_{m \text{ сомножителей}}) \rightarrow S_m \rightarrow 1,$$

где S_m – группа перестановок, а $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ – бесконечная группа диэдра.

Предположим, что X является неособым трехмерным многообразием Фано (см. [2]). Неособое трехмерное многообразие Фано X принадлежит одному из 105 деформационных семейств (см. [48]–[52]). Обозначим символом

$$\mathfrak{J}(X) \in \{1.1, 1.2, \dots, 1.17, 2.1, \dots, 2.36, 3.1, \dots, 3.31, 4.1, \dots, 4.13, 5.1, \dots, 5.8\}$$

порядковый номер деформационного типа многообразия X в обозначениях таблицы 1 (см. приложение В). Основная цель настоящей работы – доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.46. *Выполнены следующие утверждения:*

- (а) $\text{lct}(X) = 1/5$, если $\mathfrak{J}(X) \in \{2.36, 3.29\}$;
- (b) $\text{lct}(X) = 1/4$, если $\mathfrak{J}(X) \in \{1.17, 2.28, 2.30, 2.33, 2.35, 3.23, 3.26, 3.30, 4.12\}$;
- (c) $\text{lct}(X) = 1/3$, если $\mathfrak{J}(X) \in \{1.16, 2.29, 2.31, 2.34, 3.9, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.24, 3.25, 3.28, 3.31, 4.4, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 5.1, 5.2\}$;

- (d) $\text{lct}(X) = 3/7$, если $\mathfrak{I}(X) = 4.5$;
- (e) $\text{lct}(X) = 1/2$, если $\mathfrak{I}(X) \in \{1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 2.1, 2.3, 2.18, 2.25, 2.27, 2.32, 3.4, 3.10, 3.11, 3.12, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.24, 3.27, 4.1, 4.2, 4.3, 4.6, 4.7, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8\}$;
- (f) если многообразие X является общим в своем деформационном классе, то
- $\text{lct}(X) = 1/3$, если $\mathfrak{I}(X) = 2.23$,
 - $\text{lct}(X) = 1/2$, если $\mathfrak{I}(X) \in \{2.5, 2.8, 2.10, 2.11, 2.14, 2.15, 2.19, 2.24, 2.26, 3.2, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 4.13\}$,
 - $\text{lct}(X) = 2/3$, если $\mathfrak{I}(X) = 3.3$,
 - $\text{lct}(X) = 3/4$, если $\mathfrak{I}(X) \in \{2.4, 3.1\}$,
 - $\text{lct}(X) = 1$, если $\mathfrak{I}(X) = 1.1$.

В общем случае условие общности в теореме 1.46 существенно.

ПРИМЕР 1.47. Предположим, что $\mathfrak{I}(X) = 4.13$. Отметим, что данный деформационный класс был по ошибке пропущен в работе [50], но он был найден позднее в работе [51]. Существует бирациональный морфизм $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такой, что α стягивает некоторую неособую и неприводимую поверхность $E \subset X$ на кривую C такую, что $C \cdot F_1 = C \cdot F_2 = 1$ и $C \cdot F_3 = 3$, где $F_1 \cong F_2 \cong F_3 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ являются слоями трех различных естественных проекций $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Из теоремы 1.46 следует, что $\text{lct}(X) = 1/2$ в случае, когда X является общим. Отметим, что существует единственная поверхность $G \in |F_1 + F_2|$ такая, что $C \subset G$. Тогда $-K_X \sim 2\bar{G} + E + \bar{F}_3$, где $\bar{F}_3 \subset X \supset \bar{G}$ – собственные прообразы поверхностей F_3 и G соответственно. При этом $\text{lct}(X) \leq 1/2$, но $\text{lct}(X) \leq \text{lct}(X, 2\bar{G} + E + \bar{F}_3) \leq 4/9 < 1/2$ в случае, когда $|F_3 \cap C| = 1$.

Настоящая работа организована следующим образом. В разделах 2, 3 и 4 мы рассматриваем вспомогательные результаты, которые будут использованы при доказательстве теоремы 1.46. В разделе 5 мы находим глобальный лог-канонический порог торических многообразий Фано. В разделе 6 мы доказываем теорему 1.46 для неособых трехмерных многообразий Фано индекса 2, т. е. для $\mathfrak{I}(X) \in \{1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 2.32, 2.35, 3.27\}$. В разделе 7 мы доказываем теорему 1.46 в случае, когда $\text{rk Pic}(X) = 2$. В разделе 8 мы доказываем теорему 1.46 в случае, когда $\text{rk Pic}(X) = 3$. В разделе 9 мы доказываем теорему 1.46 в случае, когда $\text{rk Pic}(X) \geq 4$. В разделе 10 мы находим верхние оценки для числа $\text{lct}(X)$ в случае, когда

$$\mathfrak{I}(X) \in \{1.8, 1.9, 1.10, 2.2, 2.7, 2.9, 2.12, 2.13, 2.16, 2.17, 2.20, 2.21, 2.22, 3.13\}.$$

В приложении А, которое написано Ж.-П. Демайи, показана связь между глобальными лог-каноническими порогами неособых многообразий Фано и α -инвариантами неособых многообразий Фано, которые были введены в работе [3] для изучения вопроса существования метрик Кэлера–Эйнштейна на неособых многообразиях Фано. В приложении В мы приводим таблицу 1, которая содержит список всех неособых трехмерных многообразий Фано вместе с известными значениями и оценками их глобальных лог-канонических порогов.

Мы будем использовать стандартное обозначение $D_1 \sim D_2$ (соответственно $D_1 \sim_{\mathbb{Q}} D_2$) для линейно эквивалентных (соответственно $\mathbb{Q}$ -линейно эквивалентных) дивизоров (соответственно $\mathbb{Q}$ -дивизоров). Если дивизор (соответственно $\mathbb{Q}$ -дивизор) D является линейно эквивалентным некоторому линейному расслоению $\mathcal{L}$ (соответственно является $\mathbb{Q}$ -линейно эквивалентным дивизору, который линейно эквивалентен линейному расслоению $\mathcal{L}$), то мы используем обозначение $D \sim \mathcal{L}$ (соответственно $D \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{L}$). Отметим, что $\mathbb{Q}$ -линейная эквивалентность совпадает с численной эквивалентностью для многообразий Фано, имеющих лог-терминальные особенности. Под проективизацией $\mathbb{P}_Y(\mathcal{E})$ векторного расслоения $\mathcal{E}$ на многообразии Y подразумевается многообразие гиперплоскостей в слоях $\mathcal{E}$. Символ $\mathbb{F}_n$ обозначает поверхность Хирцебруха $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$. Мы всегда рассматриваем неособое трехмерное многообразие Фано X в совокупности с порядковым номером $\mathfrak{I}(X)$ соответствующего деформационного класса, который введен в таблице 1.

Мы очень признательны Ж.-П. Демайи за приложение А, а также А. Илиеву, А. Г. Кузнецову и Ю. Г. Прохорову за полезные обсуждения. Мы благодарны Институту высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт, Франция) и Математическому институту им. Макса Планка (Бонн, Германия) за гостеприимство.

2. Предварительные сведения

Пусть X – многообразие, имеющее не более чем лог-терминальные особенности. Рассмотрим дивизор $B_X = \sum_{i=1}^r a_i B_i$, где B_i – неприводимый дивизор Вейля на многообразии X , а a_i – неотрицательное рациональное число. Предположим, что B_X является дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье и $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим бирациональный морфизм $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ такой, что $\bar{X}$ неособо. Положим $B_{\bar{X}} = \sum_{i=1}^r a_i \bar{B}_i$, где $\bar{B}_i$ – собственный прообраз B_i на многообразии $\bar{X}$. Тогда

$$K_V + B_{\bar{X}} \equiv \pi^*(K_X + B_X) + \sum_{i=1}^n c_i E_i,$$

где $c_i \in \mathbb{Q}$, а E_i – исключительный дивизор морфизма π . Предположим дополнительно, что дивизор $(\bigcup_{i=1}^r \bar{B}_i) \cup (\bigcup_{i=1}^n E_i)$ есть дивизор с простыми нормальными пересечениями, и положим $B^{\bar{X}} = B_{\bar{X}} - \sum_{i=1}^n c_i E_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Лог-пара (X, B_X) имеет лог-канонические (соответственно лог-терминальные) особенности, если

- выполнено $a_i \leq 1$ (соответственно $a_i < 1$) для всех $i = 1, \dots, r$,
- выполнено $c_j \geq -1$ (соответственно $c_j > -1$) для всех $j = 1, \dots, n$.

Известно, что определение 2.1 не зависит от выбора морфизма $\pi: \bar{X} \rightarrow X$. Положим

$$\text{LCS}(X, B_X) = \left(\bigcup_{a_i \geq 1} B_i \right) \cup \left(\bigcup_{c_i \leq -1} \pi(E_i) \right) \subsetneq X$$

и будем называть $\text{LCS}(X, B_X)$ множеством лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Собственное неприводимое подмногообразие $Y \subsetneq X$ называется центром лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) , если

- либо выполнено неравенство $a_i \geq 1$ и $Y = B_i$,
- либо выполнено неравенство $c_i \leq -1$ и $Y = \pi(E_i)$ для некоторого морфизма $\pi: \bar{X} \rightarrow X$.

Обозначим символом $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ множество, состоящее из всех центров лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) . Тогда

$$Y \in \mathbb{LCS}(X, B_X) \implies Y \subseteq \text{LCS}(X, B_X)$$

и $\mathbb{LCS}(X, B_X) = \emptyset \iff \text{LCS}(X, B_X) = \emptyset \iff$ лог-пара (X, B_X) лог-терминальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Пусть $\mathcal{H}$ – линейная система на многообразии X , не имеющая базисных точек, пусть H – достаточно общий дивизор в линейной системе $\mathcal{H}$, и пусть $Y \subsetneq X$ – неприводимое подмногообразие. Положим $Y|_H = \sum_{i=1}^m Z_i$, где $Z_i \subset H$ – неприводимое подмногообразие. Тогда из определения 2.2 следует (ср. с теоремой 2.19), что

$$Y \in \mathbb{LCS}(X, B_X) \iff \{Z_1, \dots, Z_m\} \subseteq \mathbb{LCS}(H, B_X|_H).$$

ПРИМЕР 2.4. Пусть $\alpha: V \rightarrow X$ – раздутие неособой точки $O \in X$. Тогда $B_V \equiv \alpha^*(B_X) - \text{mult}_O(B_X)E$, где $\text{mult}_O(B_X) \in \mathbb{Q}$, а E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда $\text{mult}_O(B_X) > 1$, если лог-пара (X, B_X) не лог-канонична в точке O . Положим

$$B^V = B_V + (\text{mult}_O(B_X) - \dim(X) + 1)E$$

и предположим, что $\text{mult}_O(B_X) \geq \dim(X) - 1$. Тогда $O \in \mathbb{LCS}(X, B_X)$, если и только если

- либо $E \in \mathbb{LCS}(V, B^V)$, т. е. $\text{mult}_O(B_X) \geq \dim(X)$,
- либо существует подмногообразие $Z \subsetneq E$ такое, что $Z \in \mathbb{LCS}(V, B^V)$.

На множестве $\text{LCS}(X, B_X)$ можно ввести структуру схемы (см. [20], [40]). Положим

$$\mathcal{S}(X, B_X) = \pi_* \left(\sum_{i=1}^n [c_i] E_i - \sum_{i=1}^r [a_i] \bar{B}_i \right),$$

и пусть $\mathcal{L}(X, B_X)$ – подсхема, ассоциированная с пучком идеалов $\mathcal{S}(X, B_X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Для данной лог-пары (X, B_X) будем называть подсхему $\mathcal{L}(X, B_X)$ подсхемой лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) и пучок идеалов $\mathcal{S}(X, B_X)$ – пучком множительных идеалов лог-пары (X, B_X) .

Из конструкции подсхемы $\mathcal{L}(X, B_X)$ немедленно следует, что

$$\text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X)) = \text{LCS}(X, B_X) \subset X.$$

Следующий результат называется теоремой Шокурова об обращении в нуль (см. [40]) или теоремой Надея об обращении в нуль (см. [53; теорема 9.4.8]).

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть H – численно эффективный и объемный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что выполнена эквивалентность $K_X + B_X + H \equiv D$ для некоторого дивизора Картье D на многообразии X . Тогда для всех $i \geq 1$

$$H^i(X, \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D) = 0.$$

Для дивизора Картье D на многообразии X рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(X, B_X) \otimes D \rightarrow \mathcal{O}_X(D) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D) \rightarrow 0$$

и соответствующую точную последовательность групп когомологий

$$H^0(\mathcal{O}_X(D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}(D)) \rightarrow H^1(\mathcal{I}(X, B_X) \otimes D).$$

ТЕОРЕМА 2.7. Если $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен, то множество $\text{LCS}(X, B_X)$ связно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $D = 0$. Тогда из теоремы 2.6 следует, что последовательность

$$\mathbb{C} = H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}) \rightarrow H^1(\mathcal{I}(X, B_X)) = 0$$

точна, если дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен, откуда следует, что

$$\text{LCS}(X, B_X) = \text{Supp}(\mathcal{L}(X, B_X))$$

связно в случае, когда дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен.

Рассмотрим несколько элементарных применений теоремы 2.7 (ср. с примером 1.10).

ЛЕММА 2.8. Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, где $X \cong \mathbb{P}^n$ и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого рационального числа $0 < \lambda < n/(n+1)$. Тогда выполнено неравенство $\dim(\text{LCS}(X, B_X)) \geq 1$, а подсхема $\mathcal{L}(X, B_X)$ не содержит изолированных нульмерных компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O \in X$ – точка такая, что $\text{LCS}(X, \lambda B_X) = O \cup \Sigma$, где $\Sigma \subset X$ – (возможно, пустое) подмножество такое, что $O \notin \Sigma$.

Пусть H – общая прямая в $X \cong \mathbb{P}^2$. Тогда множество $\text{LCS}(X, \lambda B_X + H) = O \cup H \cup \Sigma$ несвязно, но дивизор $-(K_X + \lambda B_X + H)$ является обильным, что противоречит теореме 2.7.

ЛЕММА 2.9. Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, где $X \cong \mathbb{P}^3$ и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого рационального числа $0 < \lambda < 1/2$. Тогда $\text{LCS}(X, B_X)$ содержит поверхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X)$ не содержит поверхностей. Пусть S – общая плоскость в $\mathbb{P}^3$. Тогда множество $\text{LCS}(\mathbb{P}^3, B_X + S)$ связно по теореме 2.7. Значит, лог-пара $(S, B_X|_S)$ не лог-терминальна согласно замечанию 2.3. С другой стороны, множество $\text{LCS}(S, B_X|_S)$ состоит из конечного числа точек, что противоречит лемме 2.8.

ЛЕММА 2.10. *Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, где X – гладкая трехмерная квадратика в $\mathbb{P}^4$ и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого рационального числа $0 < \lambda < 1/2$. Тогда $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ содержит поверхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \subset X$ – общая прямая, пусть $P_1 \in L \ni P_2$ – две общие точки, пусть H_1 и H_2 – гиперплоские сечения квадратика $X \subset \mathbb{P}^4$, касающиеся ее в точках P_1 и P_2 соответственно. Тогда множество

$$\text{LCS}\left(X, \lambda B_X + \frac{3}{4}(H_1 + H_2)\right) = \text{LCS}(X, \lambda B_X) \cup L$$

несвязно, что противоречит утверждению теоремы 2.7.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Утверждения лемм 2.9, 2.10 (и 2.28) можно доказать другим способом. Предположим, что $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{Q}$ такого, что $0 < \lambda < 1/2$, где X есть либо $\mathbb{P}^3$, либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, либо гладкая трехмерная квадратика. Допустим, что множество $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ не содержит поверхностей. Тогда $\text{LCS}(X, B_X) \subseteq \Sigma$, где $\Sigma \subset X$ является (возможно, приводимой) кривой. Для общего автоморфизма $\varphi \in \text{Aut}(X)$ имеем $\varphi(\Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$, откуда следует, что $\text{LCS}(X, \varphi(B_X)) \cap \text{LCS}(X, B_X) = \emptyset$. Можно показать, что если φ общий, то

$$\text{LCS}(X, \varphi(B_X) + B_X) = \text{LCS}(X, \varphi(B_X)) \cup \text{LCS}(X, B_X),$$

что противоречит теореме 2.7, поскольку $\lambda < 1/2$.

ЛЕММА 2.12. *Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, где X является раздутием $\mathbb{P}^3$ в одной точке, и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого рационального числа $0 < \lambda < 1/2$. Тогда множество $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ содержит поверхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ не содержит поверхностей. Пусть $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутие точки, и пусть E – исключительный дивизор раздутия α . В случае, когда $\text{LCS}(X, \lambda B_X) \not\subseteq E$, мы можем применить лемму 2.9 к лог-паре $(\mathbb{P}^3, \alpha(B_X))$ и сразу получить противоречие. Таким образом, можно считать, что $\text{LCS}(X, B_X) \subseteq E$.

Пусть $H \subset \mathbb{P}^3$ – общая гиперплоскость, и пусть $H_1 \subset \mathbb{P}^3 \supset H_2$ – общие гиперплоскости, проходящие через точку $\alpha(E)$. Обозначим символами $\bar{H}$, $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ собственные прообразы гиперплоскостей H , H_1 и H_2 на многообразии X соответственно. Тогда множество

$$\text{LCS}\left(X, B_X + \frac{1}{2}(\bar{H}_1 + \bar{H}_2 + 2\bar{H})\right)$$

несвязно, что противоречит теореме 2.7.

ЛЕММА 2.13. *Пусть X – конус в $\mathbb{P}^4$ над неособой двумерной квадратикой. Предположим, что $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого рационального числа $0 < \lambda < 1/3$. Тогда $\mathbb{LCS}(X, B_X) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$. Пусть S – общее гиперплоское сечение конуса $X \subset \mathbb{P}^4$. Тогда $\text{LCS}(S, B_X|_S) = \emptyset$, поскольку $S \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ (см. пример 1.10). Таким образом, согласно замечанию 2.3, $|\text{LCS}(X, B_X)| < +\infty$. Тогда множество $\text{LCS}(X, B_X + S)$ несвязно, что противоречит теореме 2.7.

Следующий результат является следствием теоремы 2.6 (см. [20; теорема 4.1]).

ЛЕММА 2.14. *Предположим, что дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемен и $\dim(\text{LCS}(X, B_X)) = 1$. Тогда:*

- (а) множество $\text{LCS}(X, B_X)$ является связным объединением гладких рациональных кривых,
- (б) каждые две неприводимые компоненты множества $\text{LCS}(X, B_X)$ пересекаются не более чем в одной точке,
- (в) каждая пара пересекающихся неприводимых компонент множества $\text{LCS}(X, B_X)$ пересекается трансверсально,
- (г) никакие три неприводимые компоненты множества $\text{LCS}(X, B_X)$ не пересекаются в одной точке,
- (д) множество $\text{LCS}(X, B_X)$ не содержит циклов (“колес”), состоящих из неособых рациональных кривых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая как в доказательстве теоремы 2.7, мы видим, что $\text{LCS}(X, B_X)$ является связным деревом неособых рациональных кривых, которые пересекаются трансверсально.

ЛЕММА 2.15 [43]. *Пусть X – гладкая гиперповерхность в $\mathbb{P}^m$ и выполнена эквивалентность $B_X \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)|_X$. Пусть $S \subsetneq X$ – неприводимое подмногообразие такое, что $\dim(S) \geq k$. Тогда $\text{mult}_S(B_X) \leq 1$.*

Теперь рассмотрим одно простое применение теоремы 2.7 и леммы 2.15.

ЛЕММА 2.16. *Пусть X – кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, имеющая не более чем изолированные особенности. Предположим, что $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$, но существует некоторое положительное рациональное число $\lambda < 1/2$ такое, что $\text{LCS}(X, \lambda B_X) \neq \emptyset$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda B_X) = L$, где L – прямая в $X \subset \mathbb{P}^4$ такая, что $L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – общее гиперплоское сечение кубики X . Тогда

$$S \cup \text{LCS}(X, \lambda B_X) \subseteq \text{LCS}(X, \lambda B_X + S),$$

откуда по теореме 2.7 следует, что $\dim(\text{LCS}(X, \lambda B_X)) \geq 1$. Поэтому множество $\text{LCS}(S, \lambda B_X|_S)$ непусто согласно замечанию 2.3. С другой стороны, по лемме 2.15 множество $\text{LCS}(S, \lambda B_X|_S)$ состоит из конечного числа точек. Таким образом, по теореме 2.7 существует единственная точка $O \in S$ такая, что $\text{LCS}(S, \lambda B_X|_S) = O$. Теперь из замечания 2.3 следует, что существует прямая $L \subset X$ такая, что $\text{LCS}(X, \lambda B_X) = L$.

Рассуждая как в доказательстве леммы 2.15, мы видим, что $L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.

По аналогии с леммой 2.16 можно доказать следующий результат.

ЛЕММА 2.17. *Пусть дано двулистное накрытие $\tau: X \rightarrow \mathbb{P}^3$, которое разветвлено над неприводимой приведенной поверхностью $R \subset \mathbb{P}^3$ степени 4, имеющей не более чем обыкновенные двойные точки. Предположим, что выполнена эквивалентность $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$, но $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, где $\lambda < 1/2$. Тогда $\text{Sing}(X) \neq \emptyset$ и $\text{LCS}(X, B_X) = L$, где L – неприводимая кривая на многообразии X такая, что $-K_X \cdot L = 2$ и $L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $-K_X \sim 2H$, где H – дивизор Картье на многообразии X такой, что $H \sim \tau^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. Многообразие X является трехмерным многообразием Фано и $H^3 = 2$. В частности, по теореме 2.7 множество $\text{LCS}(X, B_X + H)$ обязано быть связным. Значит, существует кривая $C \in \text{LCS}(X, B_X)$, откуда следует, что $\text{mult}_C(B_X) \geq 1/\lambda > 2$.

Пусть S – общая поверхность в $|H|$. Положим $B_S = B_X|_S$. Тогда выполнена эквивалентность $-\lambda K_S \sim_{\mathbb{Q}} B_S$, но лог-пара (S, B_S) не является лог-канонической в каждой точке пересечения $S \cap \text{LCS}(X, B_X)$.

Поверхность H является неособой гиперповерхностью в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ степени 4.

Пусть P – любая точка в $S \cap \text{LCS}(X, B_X)$. Тогда существует бирациональный морфизм $\rho: S \rightarrow \bar{S}$ такой, что $\bar{S}$ – кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, а ρ – изоморфизм в окрестности точки P . В частности, особенности лог-пары $(\bar{S}, \rho(B_S))$ не являются лог-терминальными в точке $\rho(P)$. Таким образом, $\text{LCS}(\bar{S}, \rho(B_S)) \neq \emptyset$, но

$$\frac{1}{\lambda} \rho(B_S) \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\bar{S}} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_{\bar{S}},$$

откуда по лемме 2.15 и теореме 2.7 следует, что $\text{LCS}(\bar{S}, \rho(B_S))$ состоит из одной точки. Тогда

$$P = S \cap C = S \cap \text{LCS}(X, B_X),$$

если точка P выбрана достаточно общим образом. Значит, $\text{LCS}(X, B_X) = C$, кривая C неприводима и $-K_X \cdot C = 2$. В частности, кривая $\tau(C) \subset \mathbb{P}^3$ является прямой.

Предположим, что $C \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Покажем, что это предположение приводит к противоречию.

Предположим, что $\tau(C) \subset R$. Рассмотрим общую точку $O \in C$. Рассмотрим плоскость $\tau(O) \in \Pi \subset \mathbb{P}^3$, которая касается поверхности R в точке $\tau(O)$. Рассуждая как в доказательстве леммы 2.15 (см. [43]), мы видим, что схема $R|_{\Pi}$ приведена в общей точке кривой $\tau(C)$, поскольку $\tau(C) \cap \text{Sing}(R) = \emptyset$. Зафиксируем общую прямую $\Gamma \subset \Pi \subset \mathbb{P}^3$ такую, что $\tau(O) \in \Gamma$. Пусть $\bar{\Gamma} \subset X$ – неприводимая кривая такая, что $\tau(\bar{\Gamma}) = \Gamma$. Тогда $\bar{\Gamma} \not\subset \text{Supp}(B_X)$, так как прямая Γ заметает плотное подмножество в $\mathbb{P}^3$ при варьировании точки $O \in C$ и прямой $\Gamma \subset \Pi$. Отметим, что либо $H \cdot \bar{\Gamma} = 1$, либо $H \cdot \bar{\Gamma} = 2$. В последнем случае $\text{mult}_O(\bar{\Gamma}) = 2$. Тогда

$$H \cdot \bar{\Gamma} > 2\lambda H \cdot \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma} \cdot B_X \geq \text{mult}_O(\bar{\Gamma}) \text{mult}_C(B_X) \geq H \cdot \bar{\Gamma},$$

что является противоречием. Итак, показано, что $\tau(C) \not\subset R$.

Существует неприводимая приведенная кривая $\bar{C} \subset X$ такая, что $\tau(\bar{C}) = \tau(C) \subset \mathbb{P}^3$, но $\bar{C} \neq C$. Пусть Y – общая поверхность в $|H|$, проходящая через кривые $\bar{C}$ и C . Тогда поверхность Y неособа, поскольку $C \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Легко видеть, что $\bar{C} \cdot \bar{C} = C \cdot C = -2$ на поверхности Y . Очевидно, что $Y \not\subset \text{Supp}(B_X)$. Положим $B_Y = B_X|_Y$. Тогда

$$B_Y = \text{mult}_{\bar{C}}(B_X)\bar{C} + \text{mult}_C(B_X)C + \Delta,$$

где Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности Y такой, что

$$\bar{C} \not\subset \text{Supp}(\Delta) \not\subset C.$$

С другой стороны, $B_Y \sim_{\mathbb{Q}} 2\lambda(\bar{C} + C)$, откуда следует, в частности, что

$$\begin{aligned} (2\lambda - \text{mult}_C(B_X))C \cdot C &= (\text{mult}_{\bar{C}}(B_X) - 2\lambda)\bar{C} \cdot C + \Delta \cdot C \\ &\geq (\text{mult}_{\bar{C}}(B_X) - 2\lambda)\bar{C} \cdot C \geq 0, \end{aligned}$$

так как $\Delta \cdot C \geq 0$ и $\bar{C} \cdot C \geq 0$. Тогда $\text{mult}_{\bar{C}}(B_X) \geq 2\lambda$, поскольку $C \cdot C < 0$. Отсюда

$$-\Delta \sim_{\mathbb{Q}} (\text{mult}_{\bar{C}}(B_X) - 2\lambda)\bar{C} + (\text{mult}_C(B_X) - 2\lambda)C,$$

что является противоречием, так как $\text{mult}_C(B_X) > 2\lambda$, а поверхность Y проективна.

Утверждение теоремы 2.7 можно обобщить следующим образом (см. [40; лемма 5.7]).

ТЕОРЕМА 2.18. Пусть $\psi: X \rightarrow Z$ — морфизм. Тогда $\text{LCS}(\bar{X}, B^{\bar{X}})$ связано в окрестности каждого слоя морфизма $\psi \circ \pi: X \rightarrow Z$, если выполнены следующие условия:

- (а) морфизм ψ сюръективен и имеет связные слои,
- (б) дивизор $-(K_X + B_X)$ численно эффективен и объемлен относительно ψ .

Рассмотрим одно важное применение теоремы 2.18 (см. [41; теорема 5.50]).

ТЕОРЕМА 2.19. Пусть B_1 — дивизор Картье, $a_1 = 1$, а многообразие B_1 имеет лог-терминальные особенности. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (а) лог-пара (X, B_X) имеет лог-канонические особенности в окрестности дивизора B_1 ;
- (б) особенности лог-пары $(B_1, \sum_{i=2}^r a_i B_i|_{B_1})$ лог-канонические.

Простое применение теоремы 2.19 дает интересный результат (см. [41; следствие 5.57]).

ЛЕММА 2.20. Предположим, что $\dim(X) = 2$ и $a_1 \leq 1$. Тогда выполнено неравенство $(\sum_{i=2}^r a_i B_i)B_1 > 1$, если лог-пара (X, B_X) не лог-канонична в точке $O \in B_1$ такой, что $O \notin \text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(B_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (X, B_X) не является лог-канонической в точке $O \in B_1$. По теореме 2.19 имеем

$$\left(\sum_{i=2}^r a_i B_i \right) \cdot B_1 \geq \text{mult}_O \left(\sum_{i=2}^r a_i B_i|_{B_1} \right) > 1,$$

если $O \notin \text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(B_1)$, поскольку $(X, B_1 + \sum_{i=2}^r a_i B_i)$ не лог-канонична в точке O .

Рассмотрим еще одно применение теоремы 2.19 (ср. с леммой 2.29).

ЛЕММА 2.21. Пусть X — многообразие Фано, имеющее не более чем лог-терминальные особенности. Тогда $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times X) = \min(1/2, \text{lct}(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства $1/2 \geq \text{lct}(V \times U) \leq \text{lct}(X)$ очевидны. Предположим, что выполнено неравенство $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times X) < \min(1/2, \text{lct}(X))$. Покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}^1 \times X}$ такой, что лог-пара $(\mathbb{P}^1 \times X, \lambda D)$ не является лог-канонической в некоторой точке $P \in \mathbb{P}^1 \times X$, где $\lambda < \min(1/2, \text{lct}(X))$.

Пусть F – слой естественной проекции $\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow \mathbb{P}^1$ такой, что $P \in F$. Тогда $D = \mu F + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на $\mathbb{P}^1 \times X$ такой, что $F \not\subset \text{Supp}(\Omega)$.

Пусть L – общий слой естественной проекции $\mathbb{P}^1 \times X \rightarrow X$. Тогда

$$2 = D \cdot L = \mu + \Omega \cdot L \geq \mu,$$

откуда следует, что лог-пара $(\mathbb{P}^1 \times X, F + \lambda \Omega)$ также не лог-канонична в точке P . Тогда лог-пара $(F, \lambda \Omega|_F)$ не лог-канонична в точке P по теореме 2.19, но $\Omega|_F \sim_{\mathbb{Q}} -K_F$, что является противоречием, поскольку $X \cong F$ и $\lambda < \text{lct}(X)$.

Пусть P – точка многообразия X . Рассмотрим некоторый эффективный дивизор

$$\Delta = \sum_{i=1}^r \varepsilon_i B_i \sim_{\mathbb{Q}} B_X,$$

где ε_i – неотрицательное рациональное число. Предположим, что дивизор Δ является $\mathbb{Q}$ -Картье дивизором, выполнена эквивалентность $\Delta \sim_{\mathbb{Q}} B_X$ и особенности лог-пары (X, Δ) являются лог-каноническими в точке $P \in X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.22. Предположим, что лог-пара (X, B_X) не лог-канонична в точке $P \in X$. Положим $\alpha = \min\{a_i/\varepsilon_i \mid \varepsilon_i \neq 0\}$, где число α корректно определено, поскольку не все числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ обращаются в нуль. Тогда $\alpha < 1$, а особенности лог-пары

$$\left(X, \sum_{i=1}^r \frac{a_i - \alpha \varepsilon_i}{1 - \alpha} B_i\right)$$

не являются лог-каноническими в точке $P \in X$. При этом

$$\sum_{i=1}^r \frac{a_i - \alpha \varepsilon_i}{1 - \alpha} B_i \sim_{\mathbb{Q}} B_X \sim_{\mathbb{Q}} \Delta,$$

но по крайней мере одна неприводимая компонента дивизора $\text{Supp}(\Delta)$ не содержится в

$$\text{Supp}\left(\sum_{i=1}^r \frac{a_i - \alpha \varepsilon_i}{1 - \alpha} B_i\right).$$

Утверждение замечания 2.22 очевидно, но тем не менее оно очень полезно.

ЛЕММА 2.23. *Предположим, что $X \cong C_1 \times C_2$, где C_1 и C_2 – гладкие кривые. Предположим, что $B_X \sim_{\mathbb{Q}} \lambda E + \mu F$, где $E \cong C_1$ и $F \cong C_2$ – кривые на поверхности X такие, что $E \cdot E = F \cdot F = 0$ и $E \cdot F = 1$, а λ и μ – неотрицательные рациональные числа. Тогда*

- (а) лог-пара (X, B_X) имеет лог-терминальные особенности, если выполнены неравенства $\lambda < 1$ и $\mu < 1$,

- (b) лог-пара (X, B_X) имеет лог-канонические особенности, если выполнены неравенства $\lambda \leq 1$ и $\mu \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение (a). Предположим, что $\lambda, \mu < 1$, но особенности лог-пары (X, B_X) не являются лог-терминальными в некоторой точке $P \in X$. Тогда $\text{mult}_P(B_X) \geq 1$ и, согласно замечанию 2.22, мы можем считать, что либо $E \not\subset \text{Supp}(B_X)$, либо $F \not\subset \text{Supp}(B_X)$. С другой стороны, $E \cdot B_X = \mu$ и $F \cdot B_X = \lambda$, откуда сразу следует противоречие с $\text{mult}_P(B_X) \geq 1$.

Пусть $[B_X]$ – класс $\mathbb{Q}$ -рациональной эквивалентности дивизора B_X . Положим

$$\text{lct}(X, [B_X]) = \inf\{\text{lct}(X, D) \mid D - \text{эффективный } \mathbb{Q}\text{-дивизор такой, что } D \sim_{\mathbb{Q}} B_X\} \geq 0$$

и будем считать, что $\text{lct}(X, [B_X]) = +\infty$, если $B_X = 0$. Отметим, что B_X – эффективный дивизор.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.24. Выполнено равенство $\text{lct}(X, [-K_X]) = \text{lct}(X)$ (см. определение 1.2).

Рассуждая как в доказательстве леммы 2.21, можно получить следующий результат.

ЛЕММА 2.25. Пусть $\varphi: X \rightarrow Z$ – сюръективный морфизм со связными слоями такой, что $\dim Z = 1$. Пусть F – слой морфизма φ , который имеет не более чем лог-терминальные особенности. Тогда либо $\text{lct}_F(X, B_X) \geq \text{lct}(F, [B_X|_F])$, либо существует рациональное число $0 < \varepsilon < \text{lct}(F, [B_X|_F])$ такое, что $F \subseteq \text{LCS}(X, \varepsilon B_X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{lct}_F(X, B_X) < \text{lct}(F, [B_X|_F])$. Тогда существует рациональное число $\varepsilon < \text{lct}(F, [B_X|_F])$ такое, что особенности лог-пары $(X, \varepsilon B_X)$ не являются лог-каноническими в некоторой точке $P \in F$. Положим $B_X = \mu F + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на многообразии X такой, что $F \not\subset \text{Supp}(\Omega)$.

Можно считать, что $\varepsilon\mu \leq 1$. Тогда лог-пара $(X, F + \varepsilon\Omega)$ не лог-канонична в точке P . Особенности лог-пары $(F, \varepsilon\Omega|_F)$ также не являются лог-каноническими в точке P по теореме 2.19, но $\Omega|_F \sim_{\mathbb{Q}} B_X|_F$, что является противоречием.

Приведем одно несложное применение леммы 2.25.

ЛЕММА 2.26. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – конус над гладкой квадратичной поверхностью, и пусть $\alpha: X \rightarrow Q$ – раздутие неособой коники $C \subset Q \setminus \text{Sing}(Q)$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – общее гиперплоское сечение конуса $Q \subset \mathbb{P}^4$, которое содержит кривую C , и пусть $\bar{H}$ – собственный прообраз поверхности H на многообразии X . Тогда $-K_X \sim 3\bar{H} + 2E$, где E – исключительный дивизор раздутия α . В частности, имеет место неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-канони-

ческими для некоторого положительного рационального числа $\lambda < 1/3$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ Q & \dashrightarrow \psi & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

где β – морфизм, заданный линейной системой $|\overline{H}|$, а ψ – проекция из двумерного линейного подпространства, которое содержит конику C .

Предположим, что $\text{LCS}(X, \lambda D)$ содержит поверхность $M \subset X$. Тогда $D = \mu M + \Omega$, где $\mu \geq 1/\lambda$, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $M \notin \text{Supp}(\Omega)$.

Пусть F – общий слой морфизма β . Тогда $F \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $D|_F \sim_{\mathbb{Q}} -K_F$, откуда сразу следует, что M – слой морфизма β , но $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_Q \sim 3\alpha(M)$, что является противоречием, поскольку $\mu \geq 1/\lambda > 3$. Значит, множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей.

Существует слой S морфизма β такой, что $S \neq S \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$, откуда по лемме 2.25 следует, что S особа, поскольку $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$.

Значит, поверхность S является неприводимым квадратичным конусом в $\mathbb{P}^3$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq S$ по теореме 2.7. Более того, поскольку лог-пара $(X, S + \frac{2}{3}E)$ имеет лог-канонические особенности и выполнена эквивалентность $3S + 2E \sim_{\mathbb{Q}} D$, мы можем считать, согласно замечанию 2.22, что либо $S \notin \text{Supp}(D)$, либо $E \notin \text{Supp}(D)$.

Положим $\Gamma = E \cap S$. Кривая Γ является неприводимой коникой. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \Gamma$ по лемме 2.13. Пересекая D с общей образующей конуса $S \subset \mathbb{P}^3$ и с общим слоем проекции $E \rightarrow C$, мы видим, что $\Gamma \not\subseteq \text{LCS}(X, \lambda D)$, откуда по теореме 2.7 сразу следует, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит ровно из одной точки $O \in \Gamma$.

Пусть R – общая поверхность в линейной системе $|\alpha^*(H)|$. Тогда

$$\text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{1}{2}(\overline{H} + 2R)\right) = R \cup O,$$

что противоречит теореме 2.7, поскольку $-K_X \sim \overline{H} + 2R \sim_{\mathbb{Q}} D$ и $\lambda < 1/3$.

Следующее обобщение леммы 2.25 вытекает из [54; предложение 5.19] (ср. [6]).

ТЕОРЕМА 2.27. Пусть $\varphi: X \rightarrow Z$ – сюръективный плоский морфизм со связными слоями такой, что Z имеет рациональные особенности, а схемные слои морфизма φ имеют не более чем канонические горнштейновы особенности. Пусть F – схемный слой морфизма φ . Тогда либо $\text{lct}_F(X, B_X) \geq \text{lct}(F, [B_X|_F])$, либо существует положительное рациональное число $\varepsilon < \text{lct}(F, [B_X|_F])$ такое, что $F \subseteq \text{LCS}(X, \varepsilon B_X)$.

Приведем одно элементарное применение теоремы 2.27.

ЛЕММА 2.28. Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, где $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ и выполнена эквивалентность $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\lambda K_X$ для некоторого $0 < \lambda < 1/2$. Тогда множество $\text{LCS}(X, B_X)$ содержит поверхность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что множество $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ не содержит поверхностей. Из теорем 2.7 и 2.27 следует, что $\mathbb{LCS}(X, B_X) = F$, где F – некоторый слой естественной проекции $\pi_2: X \rightarrow \mathbb{P}^2$. Пусть S – общая поверхность в линейной системе $|\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, и пусть M_1 и M_2 – общие слои естественной проекции $\pi_1: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Тогда множество

$$\mathbb{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{1}{2}(M_1 + M_2 + 3S)\right) = F \cup S$$

несвязно, что по теореме 2.7 является противоречием.

ЛЕММА 2.29. Пусть V и U – многообразия Фано, имеющие не более чем канонические горюшительновы особенности. Тогда $\text{lct}(V \times U) = \min(\text{lct}(V), \text{lct}(U))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенства $\text{lct}(V) \geq \text{lct}(V \times U) \leq \text{lct}(U)$ очевидны. Предположим, что выполнено неравенство $\text{lct}(V \times U) < \min(\text{lct}(V), \text{lct}(U))$, и покажем, что сделанное предположение приводит к противоречию.

Существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_{V \times U}$ такой, что лог-пара $(V \times U, \lambda D)$ не является лог-канонической в некоторой точке $P \in V \times U$, где $\lambda < \min(\text{lct}(V), \text{lct}(U))$.

Отождествим V со слоем проекции $V \times U \rightarrow U$, который содержит P . Неравенства

$$\text{lct}(V) > \lambda > \text{lct}_V(V \times U, D) \geq \text{lct}(V, [D|_V]) = \text{lct}(V, [-K_V]) = \text{lct}(V)$$

несовместны. Поэтому из теоремы 2.27 следует, что особенности лог-пары $(V \times U, \lambda D)$ не являются лог-каноническими в каждой точке слоя $V \subset V \times U$.

Отождествим U с общим слоем проекции $V \times U \rightarrow V$. Тогда $D|_U \sim_{\mathbb{Q}} -K_U$, а лог-пара $(U, \lambda D|_U)$ не является лог-канонической в точке $U \cap V$ по замечанию 2.3 (примененному $\dim V$ раз). Полученное утверждение противоречит неравенству $\lambda < \text{lct}(U)$.

По-видимому, утверждение леммы 2.29 остается верным и для многообразий Фано с лог-терминальными особенностями (ср. с леммой 2.21).

3. Кубические поверхности

Пусть X – кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, имеющая не более чем одну особую точку, которая является обыкновенной двойной точкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Точка $O \in X$ называется *точкой Эккарда*, если $O \notin \text{Sing}(X)$ и $O = L_1 \cap L_2 \cap L_3$, где L_1, L_2, L_3 – различные прямые на поверхности $X \subset \mathbb{P}^3$.

На общей кубической поверхности нет точек Эккарда. Из примеров 1.10 и 1.11 следует, что

$$\text{lct}(X) = \begin{cases} 3/4, & \text{если } X \text{ не обладает точкой Эккарда и } \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 2/3, & \text{если } X \text{ обладает точкой Эккарда или } \text{Sing}(X) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Пусть D – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$, и пусть $\omega \in \mathbb{Q}_{>0}$ – число такое, что $\omega < 3/4$. В данном разделе мы докажем следующий результат (ср. [5], [14]).

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что особенности лог-пары $(X, \omega D)$ не лог-канонические. Тогда $\text{LCS}(X, \omega D) = O$, где $O \in X$ является либо особой точкой, либо точкой Эккарда.*

Предположим, что лог-пара $(X, \omega D)$ не лог-канонична. Пусть P – произвольная точка множества $\text{LCS}(X, \omega D)$. Предположим, что P не является для поверхности X ни особой точкой, ни точкой Эккарда.

ЛЕММА 3.3. $\text{LCS}(X, \omega D) = P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\text{LCS}(X, \omega D) \neq P$. Тогда, согласно теореме 2.7, существует кривая $C \subset X$ такая, что $P \in C \subseteq \text{LCS}(X, \omega D)$. Значит, существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор Ω на поверхности X такой, что $C \not\subset \text{Supp}(\Omega)$ и $D = \mu C + \Omega$, где $\mu \geq 1/\omega$. Пусть H – общее гиперплоское сечение поверхности X . Тогда

$$3 = H \cdot D = \mu H \cdot C + H \cdot \Omega \geq \mu \deg C,$$

откуда следует, что либо $\deg C = 1$, либо $\deg C = 2$.

Пусть $\deg C = 1$. Пусть Z – общая коника на X такая, что $-K_X \sim C + Z$. Тогда

$$2 = Z \cdot D = \mu Z \cdot C + Z \cdot \Omega \geq \mu Z \cdot C = \begin{cases} 2\mu, & \text{если } C \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3\mu/2, & \text{если } C \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases}$$

откуда следует, что $\mu \leq 4/3$, что является противоречием, поскольку $\mu \geq 1/\omega > 4/3$.

Показано, что $\deg C = 2$. Пусть L – прямая на X такая, что $-K_X \sim C + L$. Тогда $D = \mu C + \lambda L + \Upsilon$, где Υ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $C \not\subset \text{Supp}(\Upsilon) \not\subset L$. Имеем

$$\begin{aligned} 1 &= L \cdot D = \mu L \cdot C + \lambda L \cdot L + L \cdot \Upsilon \geq \mu L \cdot C + \lambda L \cdot L \\ &= \begin{cases} 2\mu - \lambda, & \text{если } C \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3\mu/2 - \lambda/2, & \text{если } C \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mu \leq 7/6 < 4/3$, так как $\lambda \leq 4/3$ (см. случай $\deg C = 1$). Таким образом, получено противоречие, поскольку выполнено неравенство $\mu > 4/3$.

Пусть $\pi: U \rightarrow X$ – раздутие точки P , и пусть E – исключительная кривая раздутия π . Тогда $\bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(D) + \text{mult}_P(D)E$, где $\text{mult}_P(D) \geq 1/\omega$, а $\bar{D}$ – собственный прообраз дивизора D на поверхности U . Особенности лог-пары $(U, \omega \bar{D} + (\omega \text{mult}_P(D) - 1)E)$ не являются лог-каноническими в некоторой точке $Q \in E$. Тогда либо $\text{mult}_P(D) \geq 2/\omega$, либо

$$\text{mult}_Q(\bar{D}) + \text{mult}_P(D) \geq 2/\omega > 8/3, \quad (3.1)$$

поскольку дивизор $\omega \bar{D} + (\omega \text{mult}_P(D) - 1)E$ эффективен.

Пусть T – единственное гиперплоское сечение поверхности X , которое имеет особенность в точке P . Согласно замечанию 2.22, можно считать, что $\text{Supp}(T) \not\subseteq \text{Supp}(D)$, поскольку лог-пара $(X, \omega T)$ лог-канонична. Кривая T приведена. Таким образом, возможны следующие случаи: кривая T является неприводимой и приведенной кубической кривой; кривая T является объединением прямой и неприводимой коники; кривая T является объединением трех различных прямых. Отметим, что $\text{mult}_P(T) = 2$, поскольку P не является точкой Эккарда. В оставшейся части этого раздела мы исключим все эти три случая по отдельности.

ЛЕММА 3.4. *Кривая T приводима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что кривая T является неприводимой кубической кривой. В этом случае существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \pi \swarrow & & \searrow \psi \\ X & \dashrightarrow_{\rho} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ψ – двулистное накрытие, разветвленное над кривой степени 4, а ρ – проекция из P .

Пусть $\bar{T}$ – собственный прообраз кривой T на U . Предположим, что $Q \in \bar{T}$. Тогда

$$\begin{aligned} 3 - 2 \text{mult}_P(D) &= \bar{T} \cdot \bar{D} \geq \text{mult}_Q(\bar{T}) \text{mult}_Q(\bar{D}) \\ &> \text{mult}_Q(\bar{T}) (8/3 - \text{mult}_P(D)) \geq 8/3 - \text{mult}_P(D), \end{aligned}$$

откуда $\text{mult}_P(D) \leq 1/3$. Последнее неравенство абсурдно. Значит, мы показали, что $Q \notin \bar{T}$.

Пусть $\tau \in \text{Aut}(U)$ – естественная инволюция³, индуцированная двулистным накрытием ψ . В работе [42] показано, что

$$\tau^*(\pi^*(-K_X)) \sim \pi^*(-2K_X) - 3E$$

и $\tau(\bar{T}) = E$. Положим $\check{Q} = \pi \circ \tau(Q)$. Тогда $\check{Q} \neq P$, поскольку $Q \notin \bar{T}$.

Пусть H – гиперплоское сечение поверхности X , которое имеет особенность в точке $\check{Q}$. Тогда $T \neq H$, поскольку $P \neq \check{Q}$, а кривая T неособа вне точки P . Следовательно, $P \notin H$, так как в противном случае

$$3 = H \cdot T \geq \text{mult}_P(H) \text{mult}_P(T) + \text{mult}_{\check{Q}}(H) \text{mult}_{\check{Q}}(T) \geq 4.$$

Пусть $\bar{H}$ – собственный прообраз кривой H на поверхности U . Положим $\bar{R} = \tau(\bar{H})$ и $R = \pi(\bar{R})$. Тогда $\bar{R} \sim \pi^*(-2K_X) - 3E$, а кривая $\bar{R}$ обязана быть особой в точке Q .

Предположим, что кривая R неприводима. Принимая во внимания все возможные особенности кривой $\bar{R}$, мы видим, что особенности лог-пары $(X, \frac{3}{8}R)$ являются лог-каноническими. Значит, согласно замечанию 2.22, мы можем считать, что $R \not\subseteq \text{Supp}(D)$. Тогда

$$6 - 3 \text{mult}_P(D) = \bar{R} \cdot \bar{D} \geq \text{mult}_Q(\bar{R}) \text{mult}_Q(\bar{D}) > 2(8/3 - \text{mult}_P(D)),$$

³Инволюция τ индуцирует инволюцию в $\text{Bir}(X)$, которую называют инволюцией Гейзера.

откуда следует, что $\text{mult}_P(D) < 2/3$. Последнее неравенство абсурдно, поскольку $\text{mult}_P(D) > 4/3$. Итак, показано, что кривая R приводима.

Кривые R и H приводимы. Значит, существует прямая $L \subset X$ такая, что $P \notin L \ni \check{Q}$.

Пусть $\bar{L}$ – собственный прообраз прямой L на U . Положим $\bar{Z} = \tau(\bar{L})$. Тогда $\bar{L} \cdot E = 0$ и $\bar{L} \cdot \bar{T} = \bar{L} \cdot \pi^*(-K_X) = 1$, откуда $\bar{Z} \cdot E = 1$ и $\bar{Z} \cdot \pi^*(-K_X) = 2$. Имеем $Q \in \bar{Z}$. Тогда

$$2 - \text{mult}_P(D) = \bar{Z} \cdot \bar{D} \geq \text{mult}_Q(\bar{D}) > 8/3 - \text{mult}_P(D) > 2 - \text{mult}_P(D)$$

в случае, когда $\bar{Z} \not\subseteq \text{Supp}(\bar{D})$. Таким образом, мы видим, что $\bar{Z} \subseteq \text{Supp}(\bar{D})$.

Положим $Z = \pi(\bar{Z})$. Тогда Z является неприводимой коникой такой, что $P \in Z$ и $-K_X \sim L + Z$, откуда следует, что объединение $L \cup Z$ высекается плоскостью $\mathbb{P}^3$, которая содержит Z . Положим $D = \varepsilon Z + \Upsilon$, где Υ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $Z \not\subseteq \text{Supp}(\Upsilon)$.

Можно считать, что $L \not\subseteq \text{Supp}(\Upsilon)$ (см. замечание 2.22). Тогда

$$1 = L \cdot D = \varepsilon Z \cdot L + L \cdot \Upsilon \geq \varepsilon Z \cdot L = \begin{cases} 2\varepsilon, & \text{если } Z \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3\varepsilon/2, & \text{если } Z \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases}$$

откуда следует, что $\varepsilon \leq 2/3$.

Пусть $\bar{\Upsilon}$ – собственный прообраз дивизора Υ на поверхности U . Тогда особенности лог-пары $(U, \varepsilon\omega\bar{Z} + \omega\bar{\Upsilon} + (\omega \text{mult}_P(D) - 1)E)$ не лог-каноничны в точке $Q \in \bar{Z}$. Следовательно,

$$\omega\bar{\Upsilon} \cdot \bar{Z} + (\omega \text{mult}_P(D) - 1) = (\omega\bar{\Upsilon} + (\omega \text{mult}_P(D) - 1)E) \cdot \bar{Z} > 1$$

по лемме 2.20, поскольку $\varepsilon \leq 2/3$. В частности, мы видим, что

$$\begin{aligned} 8/3 - \text{mult}_P(D) &< \bar{Z} \cdot \bar{\Upsilon} = 2 - \text{mult}_P(D) - \varepsilon\bar{Z} \cdot \bar{Z} \\ &= \begin{cases} 2 - \text{mult}_P(D) + \varepsilon, & \text{если } Z \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 2 - \text{mult}_P(D) + \varepsilon/2, & \text{если } Z \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда следует, что $\varepsilon > 2/3$. Но ранее мы уже показали, что $\varepsilon \leq 2/3$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.4.

Таким образом, существует прямая $L_1 \subset X$ такая, что $P \in L_1$. Положим $D = m_1 L_1 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $L_1 \not\subseteq \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$4/3 < 1/\omega < \Omega \cdot L_1 = 1 - m_1 L_1 \cdot L_1 = \begin{cases} 1 + m_1, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 1 + m_1/2, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Выполнено неравенство*

$$m_1 > \begin{cases} 1/3, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 2/3, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Предположим, что поверхность X является особой. Положим $O = \text{Sing}(X)$. Из работы [16] следует, что $O = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_4 \cap \Gamma_5 \cap \Gamma_6$, где $\Gamma_1, \dots, \Gamma_6$ – различные прямые на поверхности $X \subset \mathbb{P}^3$. Более того, выполнена эквивалентность $-2K_X \sim \sum_{i=1}^6 \Gamma_i$. Предположим, что $L_1 = \Gamma_1$. Пусть $\Pi_2, \dots, \Pi_6 \subset \mathbb{P}^3$ – плоскости такие, что $L_1 \subset \Pi_i \supset \Gamma_i$, и пусть $\Lambda_2, \dots, \Lambda_6$ – прямые на поверхности X такие, что

$$L_1 \cup \Gamma_i \cup \Lambda_i = \Pi_i \cap X \subset X \subset \mathbb{P}^3,$$

откуда следует, что $-K_X \sim L_1 + \Gamma_i + \Lambda_i$. Тогда

$$-5K_X \sim 4L_1 + \sum_{i=2}^6 \Lambda_i + \left(L_1 + \sum_{i=2}^6 \Gamma_i \right) \sim 4L_1 + \sum_{i=2}^6 \Lambda_i - 2K_X,$$

откуда следует, что $-3K_X \sim 4L_1 + \sum_{i=2}^6 \Lambda_i$. С другой стороны, особенности лог-пары

$$\left(X, L_1 + \frac{\sum_{i=2}^6 \Lambda_i}{3} \right)$$

являются лог-каноническими в точке P . Из замечания 2.22 следует, что для завершения доказательства теоремы 3.2 мы можем считать, что

$$\text{Supp} \left(\sum_{i=2}^6 \Lambda_i \right) \not\subseteq \text{Supp}(D),$$

так как $L_1 \subseteq \text{Supp}(D)$. Значит, существует прямая Λ_k такая, что

$$1 = D \cdot \Lambda_k = (m_1 L_1 + \Omega) \cdot \Lambda_k = m_1 + \Omega \cdot \Lambda_k \geq m_1,$$

поскольку $O \notin \Lambda_k$. Для завершения доказательства теоремы 3.2 мы можем считать, что $m_1 \leq 1$, если $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.

Из доказательства леммы 2.15 несложно вывести, что $m_1 \leq 1$, если $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$.

ЛЕММА 3.7. *Существует прямая $L_2 \subset X$ такая, что $L_1 \neq L_2$ и $P \in L_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что не существует прямой $L_2 \subset X$ такой, что $L_1 \neq L_2$ и $P \in L_2$. Тогда $T = L_1 + C$, где C – неприводимая коника на X такая, что $P \in C$.

Из замечания 2.22 следует, что мы можем считать, что $C \not\subseteq \text{Supp}(\Omega)$, поскольку $m_1 \neq 0$.

Пусть $\bar{L}_1$ и $\bar{C}$ – собственные прообразы кривых L_1 и C на U соответственно. Тогда

$$\bar{D} \sim_{\mathbb{Q}} m_1 \bar{L}_1 + \bar{\Omega} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(m_1 L_1 + \Omega) - (m_1 + \text{mult}_P(\Omega))E \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(D) - \text{mult}_P(D)E,$$

где $\bar{\Omega}$ – собственный прообраз дивизора Ω на поверхности U . Имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{C} \cdot \bar{\Omega} &= 2 - \text{mult}_P(D) + m_1 \bar{C} \cdot \bar{L} < 2/3 - m_1 \bar{C} \cdot \bar{L}_1 \\ &= \begin{cases} 2/3 - m_1, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 2/3 - m_1/2, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда следует, что $m_1 < 2/3$, если $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Из неравенства (3.1) вытекает, что

$$\text{mult}_Q(\bar{\Omega}) > 8/3 - \text{mult}_P(\Omega) - m_1(1 + \text{mult}_Q(\bar{L}_1)).$$

Предположим, что $Q \in \bar{L}_1$. Тогда из леммы 2.20 следует, что

$$\begin{aligned} 8/3 < \bar{L}_1 \cdot (\bar{\Omega} + (\text{mult}_P(\Omega) + m_1)E) &= 1 - m_1 \bar{L}_1 \cdot \bar{L}_1 \\ &= \begin{cases} 1 + 2m_1, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 1 + 3m_1/2, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

что является противоречием, поскольку $m_1 \leq 1$, если $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$ (см. замечание 3.6).

Итак, показано, что $Q \notin \bar{L}_1$. Предположим, что $Q \in \bar{C}$. Тогда

$$2 - \text{mult}_P(\Omega) - m_1 - m_1 \bar{C} \cdot \bar{L}_1 = \bar{C} \cdot \bar{\Omega} > 8/3 - \text{mult}_P(\Omega) - m_1,$$

что является противоречием, поскольку $m_1 \bar{C} \cdot \bar{L}_1 \geq 0$. Мы видим, что $Q \notin \bar{C}$.

Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\zeta} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ζ – бирациональный морфизм, который стягивает кривую $\bar{L}_1$, морфизм ψ является двулиственным накрытием, которое разветвлено над плоской кривой степени 4, а рациональное отображение ρ – линейная проекция из точки $P \in X$.

Пусть τ – бирациональная инволюция поверхности U , которая индуцирована двулистным накрытием ψ . Тогда

- инволюция τ бирегулярна $\iff L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$,
- если $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$, то инволюция τ бирегулярна на $U \setminus \bar{L}_1$,
- из конструкции инволюции τ следует, что $\tau(E) = \bar{C}$,
- если $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$, то

$$\tau^*(\bar{L}_1) \sim \bar{L}_1, \quad \tau^*(E) \sim \bar{C}, \quad \tau^*(\pi^*(-K_X)) \sim \pi^*(-2K_X) - 3E - \bar{L}_1.$$

Пусть H – гиперплоское сечение кубической поверхности X , особое в точке $\pi \circ \tau(Q) \in C$. Тогда $P \notin H$, поскольку кривая C неособа. Пусть $\bar{H}$ – собственный прообраз кривой H на поверхности U . Тогда $\bar{L}_1 \not\subseteq \text{Supp}(\bar{H}) \not\supseteq \bar{C}$.

Положим $\bar{R} = \tau(\bar{H})$ и $R = \pi(\bar{R})$. Кривая $\bar{R}$ имеет особенность в точке Q , и

$$\bar{R} \sim \pi^*(-2K_X) - 3E - \bar{L}_1,$$

поскольку R не проходит через особую точку поверхности X при $\text{Sing}(X) \neq \emptyset$.

Предположим, что R неприводима. Тогда $R + L_1 \sim -2K_X$, но лог-пара $(X, \frac{3}{8}(R + L_1))$ лог-канонична. Значит (см. замечание 2.22), мы можем считать, что $R \not\subseteq \text{Supp}(D)$. Тогда

$$\begin{aligned} 5 - 2(m_1 + \text{mult}_P(\Omega)) + m_1(1 + \bar{L}_1 \cdot \bar{L}_1) \\ = \bar{R} \cdot \bar{\Omega} \geq 2 \text{mult}_Q(\bar{\Omega}) > 2(8/3 - m_1 - \text{mult}_P(\Omega)), \end{aligned}$$

откуда следует, что $m_1 < 0$. Противоречие. Показано, что R приводима.

Из приводимости кривой R сразу следует, что существует прямая $L \subset X$ такая, что $P \notin L$ и $\pi \circ \tau(Q) \in L$. Тогда $L \cap L_1 = \emptyset$, поскольку $\pi \circ \tau(Q) \in C$ и $(C + L_1) \cdot L = T \cdot L = 1$. Значит, существует единственная коника $Z \subset X$ такая, что $-K_X \sim L + Z$ и $P \in Z$. Коника Z неприводима и $P = Z \cap L_1$, поскольку $(L + Z) \cdot L_1 = 1$.

Пусть $\bar{L}$ и $\bar{Z}$ – собственные прообразы кривых L и Z на U соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{L} \cdot \bar{C} &= \bar{Z} \cdot E = 1, & \bar{L}_1 \cdot \bar{Z} &= \bar{L} \cdot E = \bar{L} \cdot \bar{L}_1 = 0, \\ \bar{Z} \cdot \bar{Z} &= 1 - \bar{L} \cdot \bar{Z}, & \bar{L} \cdot \bar{Z} &= \begin{cases} 2, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3/2, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

По построению $\tau(\bar{Z}) = \bar{L}$. Тогда $Q \in \bar{Z}$. Предположим, что $\bar{Z} \not\subseteq \text{Supp}(\bar{\Omega})$. Тогда

$$2 - m_1 - \text{mult}_P(\Omega) = \bar{Z} \cdot \bar{\Omega} > 8/3 - m_1 - \text{mult}_P(\Omega),$$

что является противоречием. Показано, что $\bar{Z} \subseteq \text{Supp}(\bar{\Omega})$. Лог-пара $(X, \omega(L + Z))$ имеет лог-канонические особенности в точке P . Таким образом, мы можем считать, что $\bar{L} \not\subseteq \text{Supp}(\bar{\Omega})$ (см. замечание 2.22). Положим $D = \varepsilon Z + m_1 L_1 + \Upsilon$, где Υ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $Z \not\subseteq \text{Supp}(\Upsilon) \not\supseteq L_1$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= L \cdot D = \varepsilon L \cdot Z + m_1 L \cdot L_1 + L \cdot \Upsilon = \varepsilon L \cdot Z + L \cdot \Upsilon \geq \varepsilon L \cdot Z \\ &= \begin{cases} 2\varepsilon, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3\varepsilon/2, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда следует, что $\varepsilon \leq 2/3$. Но $\bar{Z} \cap \bar{L}_1 = \emptyset$. Поэтому, из леммы 2.20 следует, что

$$2 - \text{mult}_P(D) - \varepsilon \bar{Z} \cdot \bar{Z} = \bar{Z} \cdot \bar{\Upsilon} > 8/3 - \text{mult}_P(D),$$

где $\bar{\Upsilon}$ – собственный прообраз дивизора Υ на поверхности U . Мы видим, что $\varepsilon > 2/3$, но $\varepsilon \leq 2/3$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.7.

Итак, показано, что $T = L_1 + L_2 + L_3$, где L_3 – прямая такая, что $P \notin L_3$. Положим $D = m_1 L_1 + m_2 L_2 + \Delta$, где Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $L_1 \not\subseteq \text{Supp}(\Delta) \not\supseteq L_2$.

Отметим, что, согласно следствию 3.5, выполнены неравенства $m_1 > 1/3$ и $m_2 > 1/3$. Значит, по замечанию 2.22 мы можем считать, что $L_3 \not\subseteq \text{Supp}(\Delta)$. Если на L_1 или L_2 лежит особая точка поверхности X , то без ограничения общности можно считать, что она лежит на L_1 . Таким образом, $L_3 \cdot L_2 = 1$ и $L_3 \cdot L_1 = 1/2$ в случае, когда $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$. Аналогично, мы видим, что $L_3 \cdot L_2 = L_3 \cdot L_1 = 1$ в случае, когда $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Тогда $1 - m_1 L_1 \cdot L_3 - m_2 = L_3 \cdot \Delta \geq 0$.

Пусть $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_3$ – собственные прообразы прямых L_1 и L_2 на U соответственно. Тогда

$$m_1 \bar{L}_1 + m_2 \bar{L}_2 + \bar{\Delta} \sim_{\mathbb{Q}} \pi^*(m_1 L_1 + m_2 L_2 + \Delta) - (m_1 + m_2 + \text{mult}_P(\Delta))E,$$

где $\bar{\Delta}$ – собственный прообраз дивизора Δ на U . Из неравенства (3.1) следует, что

$$\text{mult}_Q(\bar{\Delta}) > 8/3 - \text{mult}_P(\Delta) - m_1(1 + \text{mult}_Q(\bar{L}_1)) - m_1(1 + \text{mult}_Q(\bar{L}_2)). \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.8. *Кривая $\bar{L}_2$ не содержит точку Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q \in \bar{L}_2$. Тогда

$$1 - \text{mult}_P(\Delta) - m_1 + m_2 = \bar{L}_2 \cdot \bar{\Delta} > 8/3 - \text{mult}_P(\Delta) - m_1 - m_2$$

по лемме 2.20. Значит, $m_2 > 5/6$. С другой стороны, из леммы 2.20 следует, что

$$1 - m_2 - m_1 L_1 \cdot L_1 = \Delta \cdot L_1 > 4/3 - m_2.$$

Но $L_1 \cdot L_1 = -1$, если $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$, и $L_1 \cdot L_1 = -1/2$, если $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$. Тогда по следствию 3.5

$$m_1 > \begin{cases} 1/3, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 2/3, & \text{если } L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases}$$

что невозможно, поскольку $m_2 > 5/6$ и $1 > m_1 L_1 \cdot L_3 + m_2$.

ЛЕММА 3.9. *Кривая $\bar{L}_1$ не содержит точку Q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $Q \in \bar{L}_1$. Рассуждая как в доказательстве леммы 3.8, мы видим, что $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$, откуда $\bar{L}_1 \cdot \bar{L}_1 = -1/2$. Тогда $m_1 > 10/9$, так как

$$1 + 3m_1/2 = \bar{L}_2 \cdot (\bar{\Delta} + (\text{mult}_P(\Delta) - m_1 - m_2)E) > 8/3$$

по лемме 2.20. С другой стороны, по замечанию 3.6 выполнено неравенство $m_1 \leq 1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Итак, показано, что $\bar{L}_1 \not\ni Q \notin \bar{L}_2$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\zeta} & W \\ \pi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ζ – бирациональный морфизм, который стягивает кривые $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$, морфизм ψ является двулистным накрытием, которое разветвлено над плоской кривой степени 4, а рациональное отображение ρ является линейной проекцией из точки P .

Пусть τ – бирациональная инволюция поверхности U , которая индуцирована двулистным накрытием ψ . Тогда

- инволюция τ бигегулярна $\iff L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$,
- если $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$, то инволюция τ бигегулярна на $U \setminus \bar{L}_1$,
- из конструкции инволюции τ следует, что $\tau(\bar{L}_2) = \bar{L}_2$,
- если $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$, то $\tau(\bar{L}_1) = \bar{L}_1$ и

$$\tau^*(\pi^*(-K_X)) \sim \pi^*(-2K_X) - 3E - \bar{L}_1 - \bar{L}_2.$$

Обозначим через $\bar{L}_3$ собственный прообраз прямой L_3 на поверхности U . Тогда $\tau(E) = \bar{L}_3$ и

$$L_1 \cup L_2 \not\subset \pi \circ \tau(Q) \in L_3.$$

ЛЕММА 3.10. *Прямая L_3 является единственной прямой на X , которая проходит через точку $\pi \circ \tau(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует прямая $L \subset X$ такая, что $L \neq L_3$ и $\pi \circ \tau(Q) \in L$. Тогда $L \cap L_1 = L \cap L_2 = \emptyset$, поскольку $\pi \circ \tau(Q) \in L_3$ и $(L_1 + L_2 + L_3) \cdot L = 1$. Значит, существует единственная коника $Z \subset X$ такая, что $-K_X \sim L + Z$ и $P \in Z$. Коника Z неприводима, поскольку $P \notin L$ и P не является точкой Эккарда.

Пусть $\bar{L}$ и $\bar{Z}$ – собственные прообразы кривых L и Z на U соответственно. Тогда

$$\bar{L} \cdot \bar{L}_3 = \bar{Z} \cdot E = 1, \quad \bar{Z} \cdot \bar{Z} = 1 - \bar{L} \cdot \bar{Z}, \quad \bar{L} \cdot \bar{Z} = \begin{cases} 2, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3/2, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases}$$

и $\bar{L}_1 \cdot \bar{Z} = \bar{L}_2 \cdot \bar{Z} = \bar{L} \cdot E = \bar{L} \cdot \bar{L}_1 = \bar{L} \cdot \bar{L}_2 = 0$. Из конструкции инволюции τ следует, что $\tau(\bar{Z}) = \bar{L}$. Тогда $Q \in \bar{Z}$, откуда следует, что $\bar{Z} \subseteq \text{Supp}(\bar{\Delta})$, поскольку

$$2 - \text{mult}_P(\Delta) - m_1 - m_2 = \bar{Z} \cdot \bar{\Omega} > 8/3 - \text{mult}_P(\Delta) - m_1 - m_2$$

в случае, когда $\bar{Z} \not\subseteq \text{Supp}(\bar{\Delta})$. С другой стороны, лог-пара $(X, \omega(L + Z))$ имеет лог-канонические особенности в точке P . Таким образом, согласно замечанию 2.22, можно считать, что $\bar{L} \not\subseteq \text{Supp}(\bar{\Delta})$. Положим $D = \varepsilon Z + m_1 L_1 + m_2 L_2 + \Upsilon$, где Υ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $Z \not\subseteq \text{Supp}(\Upsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= L \cdot D = \varepsilon L \cdot Z + m_1 L \cdot L_1 + L \cdot \Upsilon = \varepsilon L \cdot Z + L \cdot \Upsilon \geq \varepsilon L \cdot Z \\ &= \begin{cases} 2\varepsilon, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) = \emptyset, \\ 3\varepsilon/2, & \text{если } L \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда следует, что выполнено неравенство $\varepsilon \leq 2/3$. С другой стороны, мы знаем, что $\bar{Z} \cap \bar{L}_1 = \emptyset$. Таким образом, из леммы 2.20 следует, что

$$2 - \text{mult}_P(D) - \varepsilon \bar{Z} \cdot \bar{Z} = \bar{Z} \cdot \bar{\Upsilon} > 8/3 - \text{mult}_P(D),$$

где $\bar{\Upsilon}$ – собственный прообраз дивизора Υ на U . Мы видим, что $\varepsilon > 2/3$, но ранее было показано, что $\varepsilon \leq 2/3$. Противоречие. Утверждение леммы доказано.

Итак, существует единственная неприводимая коника $C \subset X$ такая, что $-K_X \sim L_3 + C$ и $\pi \circ \tau(Q) \in C$. Тогда $C + L_3$ – гиперплоское сечение поверхности X , которое имеет особенность в точке $\pi \circ \tau(Q)$. Пусть $\bar{C}$ – собственный прообраз коники C на U . Положим $\bar{Z} = \tau(\bar{C})$ и $Z = \pi(\bar{Z})$.

ЛЕММА 3.11. *Выполнено неравенство $L_1 \cap \text{Sing}(X) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $L_1 \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Тогда $C \cap L_1 = C \cap L_2 = \emptyset$, поскольку $(L_1 + L_2 + L_3) \cdot C = L_3 \cdot C = 2$. Легко видеть, что $\bar{Z} \sim \pi^*(-2K_X) - 4E - \bar{L}_1 - \bar{L}_2$, а кривая Z имеет особенность в точке P . Тогда $-2K_X \sim Z + L_1 + L_2$, но особенности лог-пары $(U, \frac{1}{2}(Z + L_1 + L_2))$ лог-канонические в точке P . Значит (см. замечание 2.22), мы можем считать, что $Z \not\subseteq \text{Supp}(D)$. По построению $Q \in \bar{Z}$ и $\bar{Z} \cdot E = 2$. Из неравенства (3.1) следует, что

$$4 - 2 \text{mult}_P(D) = \bar{Z} \cdot \bar{D} \geq \text{mult}_Q(\bar{D}) > 8/3 - \text{mult}_P(D),$$

откуда $\text{mult}_P(D) < 4/3$, что невозможно, поскольку $\text{mult}_P(D) > 4/3$. Лемма доказана.

Итак, показано, что $L_1 \cap L_3 = \text{Sing}(X) \neq \emptyset$. Тогда $L_1 \cap L_2 \in C$, откуда следует, что

$$\bar{Z} \sim \pi^*(-2K_X) - 4E - 2\bar{L}_1 - \bar{L}_2,$$

а Z – гладкая рациональная кубика. Тогда $-2K_X \sim Z + 2L_1 + L_2$, но особенности лог-пары $(U, \frac{1}{2}(Z + 2L_1 + L_2))$ лог-канонические в точке P . Значит, можно считать, что $\bar{Z} \not\subseteq \text{Supp}(D)$ (см. замечание 2.22). Имеем $Q \in \bar{Z}$ и $\bar{Z} \cdot E = \bar{L}_1 = 1$. Из неравенства (3.1) получаем

$$3 - \text{mult}_P(\Delta) - 2m_1 - m_2 = \bar{Z} \cdot \bar{\Delta} \geq \text{mult}_Q(\bar{\Delta}) > 8/3 - \text{mult}_P(\Delta) - m_1 - m_2,$$

откуда следует, что $m_1 < 1/3$. С другой стороны, $m_1 > 2/3$ по следствию 3.5. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.2.

4. Поверхности дель Пеццо

Пусть X – поверхность дель Пеццо, которая имеет не более чем канонические особенности, пусть O – некоторая точка поверхности X , и пусть B_X – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на поверхности X . Предположим, что точка O является либо гладкой, либо обыкновенной двойной точкой поверхности X , а поверхность X неособа вне точки $O \in X$.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $\text{Sing}(X) = O$, $K_X^2 = 2$ и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\mu K_X$, где $0 < \mu < 2/3$. Тогда $\mathbb{LCS}(X, \mu B_X) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{LCS}(X, \mu B_X) \neq \emptyset$. Тогда существует кривая $\mathbb{P}^1 \cong L \subset X$ такая, что $\text{LCS}(X, \mu B_X) \not\subseteq L$, выполнено равенство $L \cdot L = -1$ и $L \cap \text{Sing}(X) = \emptyset$. Следовательно, существует бирациональный морфизм $\pi: X \rightarrow S$, который стягивает кривую L . Тогда $\mathbb{LCS}(S, \mu\pi(B_X)) \neq \emptyset$ в силу выбора кривой $L \subset X$. С другой стороны, выполнена эквивалентность $-K_S \sim_{\mathbb{Q}} \pi(B_X)$, а поверхность S является кубической поверхностью в $\mathbb{P}^3$, которая имеет не более чем одну обыкновенную двойную точку, что является противоречием (см. примеры 1.11 и 1.10).

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что $\text{Sing}(X) = \emptyset$ и выполнены равенство $K_X^2 = 5$ и эквивалентность $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\mu K_X$, где $\mu \in \mathbb{Q}$ таково, что $0 < \mu < 2/3$. Предположим, что $\mathbb{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$. Тогда либо множество $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ содержит кривую, либо существуют кривая $\mathbb{P}^1 \cong L \subset X$ и точка $P \in L$ такие, что $L \cdot L = -1$ и $\text{LCS}(X, B_X) = P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathbb{LCS}(X, B_X)$ не содержит кривых. Тогда из теоремы 2.7 следует, что $\mathbb{LCS}(X, B_X) = P$ для некоторой точки $P \in X$. Можно считать, что точка P не содержится ни в одной кривой $\mathbb{P}^1 \cong L \subset X$ такой, что $L \cdot L = -1$. Тогда существует бирациональный морфизм $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, который является изоморфизмом в окрестности точки P . При этом $\varphi(P) \in \mathbb{LCS}(\mathbb{P}^2, \varphi(B_X))$, множество $\mathbb{LCS}(\mathbb{P}^2, \varphi(B_X))$ не содержит кривых и выполнена эквивалентность $\varphi(B_X) \sim_{\mathbb{Q}} -\mu K_{\mathbb{P}^2}$, что сразу приводит к противоречию с леммой 2.8, поскольку $\mu < 2/3$.

ПРИМЕР 4.3. Предположим, что $O = \text{Sing}(X)$ и $K_X^2 = 5$. Пусть $\alpha: V \rightarrow X$ – раздутие точки O , и пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда существует бирациональный морфизм $\omega: V \rightarrow \mathbb{P}^2$ такой, что морфизм ω стягивает кривые E_1, E_2, E_3, E_4 , а кривая $\omega(E)$ является прямой в $\mathbb{P}^2$, которая содержит точки $\omega(E_1), \omega(E_2), \omega(E_3)$, но $\omega(E) \not\ni \omega(E_4)$.

Пусть Z – прямая в $\mathbb{P}^2$ такая, что $\omega(E_1) \in Z \ni \omega(E_4)$. Тогда

$$2E + \bar{Z} + 2E_1 + E_2 + E_3 \sim -K_V,$$

где $\bar{Z}$ – собственный прообраз прямой Z на поверхности V . Имеем

$$\text{lct}(X, \alpha(\bar{Z}) + 2\alpha(E_1) + \alpha(E_2) + \alpha(E_3)) = 1/2,$$

откуда следует, что $\text{lct}(X) \leq 1/2$. Предположим, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} 2B_X$, но особенности лог-пары (X, B_X) не являются лог-каноническими. Тогда

$$K_V + B_V + mE \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(K_X + B_X)$$

для некоторого $m \geq 0$, где B_V – собственный прообраз дивизора B_X на поверхности V . Следовательно, особенности лог-пары $(V, B_V + mE)$ не являются лог-каноническими в некоторой точке $P \in V$. Существует бирациональный морфизм $\pi: V \rightarrow U$, являющийся изоморфизмом в окрестности точки $P \in X$, такой, что поверхность U является гладкой поверхностью дель Пеццо и $K_U^2 = 6$, откуда следует, что лог-пара $(U, \pi(B_V) + m\pi(E))$ не лог-канонична в точке $\pi(P)$. С другой стороны, выполнена эквивалентность $\pi(B_V) + m\pi(E) \sim_{\mathbb{Q}} -(1/2)K_U$, что является противоречием, поскольку $\text{lct}(U) = 1/2$ (см. пример 1.10). Итак, показано, что $\text{lct}(X) = 1/2$.

ПРИМЕР 4.4. Предположим, что $K_X^2 = 4$. Принимая во внимание рассуждения в примере 4.3, мы видим, что

$$\text{lct}(X) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } O = \text{Sing}(X), \\ 2/3, & \text{если } \text{Sing}(X) = \emptyset. \end{cases}$$

Предположим, что $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$, но особенности лог-пары $(X, \lambda B_X)$ не являются лог-каноническими в некоторой точке $P \in X \setminus O$. Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \text{---} \text{---} \text{---} & U \\ & \psi & \end{array}$$

где U – кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$, которая имеет не более чем канонические особенности, морфизм α является раздутием точки P , морфизм β бирационален, а рациональное отображение ψ является линейной проекцией из точки $P \in X$. Тогда

$$K_V + \lambda B_V + (\lambda \operatorname{mult}_P(B_X) - 1)E \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(K_X + \lambda B_X),$$

где E – исключительный дивизор раздутия α , а B_V – собственный прообраз дивизора B_X на поверхности V . Особенности лог-пары

$$(V, \lambda B_V + (\lambda \operatorname{mult}_P(B_X) - 1)E)$$

не являются лог-каноническими в некоторой точке $Q \in E$, и выполнено неравенство $\operatorname{mult}_P(B_X) > 1/\lambda$. Тогда особенности лог-пары

$$(V, \lambda B_V + (\lambda \operatorname{mult}_P(B_X) - \lambda)E)$$

также не являются лог-каноническими в точке $Q \in E$, но выполнена эквивалентность

$$B_V + (\operatorname{mult}_P(B_X) - 1)E \sim_{\mathbb{Q}} -K_V + \alpha^*(K_X + B_X) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V.$$

Предположим, что P не лежит ни на одной прямой, содержащейся в X . Тогда

- морфизм $\beta: V \rightarrow U$ является изоморфизмом,
- кубическая поверхность U неособа вне точки $\psi(O)$,
- точка $\psi(O)$ является обыкновенной двойной точкой поверхности U ,

откуда следует, что выполнено неравенство $\lambda > 2/3$ (см. пример 1.11).

Предположим, что $\lambda = 3/4$. Тогда по теореме 3.2 точка $\psi(Q) \in U \subset \mathbb{P}^3$ обязана быть точкой Эккарда поверхности U (см. определение 3.1). С другой стороны, кривая $\beta(E) \subset U$ является прямой. Таким образом, поверхность X содержит две неприводимые коники $C_1 \neq C_2$ такие, что $P = C_1 \cap C_2$ и $C_1 + C_2 \sim -K_X$.

ЛЕММА 4.5. *Предположим, что $O = \operatorname{Sing}(X)$, $K_X^2 = 6$ и существует диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где β – раздутие трех различных точек $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$, которые лежат на одной прямой $L \subset \mathbb{P}^2$, а α – бирациональный морфизм, который стягивает неприводимую кривую $\bar{L}$ в точку O такую, что $\beta(\bar{L}) = L$. Тогда $\operatorname{LCS}(X, \lambda B_X) = O$ в случае, когда $\operatorname{LCS}(X, \lambda B_X) \neq \emptyset$, $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ и $\lambda < 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\emptyset \neq \operatorname{LCS}(X, \lambda B_X) \neq O$, но $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$. Пусть M – общая прямая в $\mathbb{P}^2$, и пусть $\bar{M}$ – собственный прообраз прямой M на поверхности V . Тогда $-K_X \sim 2\alpha(\bar{M})$ и $O \in \alpha(\bar{M})$. Значит, множество $\operatorname{LCS}(X, \lambda B_X)$ содержит кривую, поскольку в противном случае $\operatorname{LCS}(X, \lambda B_X + \alpha(\bar{M}))$ было бы несвязно, что невозможно по теореме 2.7.

Пусть C – неприводимая кривая на поверхности X такая, что $C \subseteq \text{LCS}(X, \lambda B_X)$. Тогда $B_X = \varepsilon C + \Omega$, где $\varepsilon > 2$, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $C \not\subseteq \text{Supp}(\Omega)$.

Пусть Γ_i – собственный прообраз на поверхности X достаточно общей прямой в $\mathbb{P}^2$, которая проходит через точку P_i . Тогда $O \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ и $-K_X \cdot \Gamma_1 = -K_X \cdot \Gamma_2 = -K_X \cdot \Gamma_3 = 2$. С другой стороны, выполнена эквивалентность $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, откуда сразу следует, что $C \cdot \Gamma_m \neq 0$ для некоторого $m \in \{1, 2, 3\}$. Тогда

$$2 = B_X \cdot \Gamma_m = (\varepsilon C + \Omega) \cdot \Gamma_m \geq \varepsilon C \cdot \Gamma_m \geq \varepsilon > 2,$$

поскольку $\Gamma_m \not\subseteq \text{Supp}(B_X)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Предположим, что $O = \text{Sing}(X)$ и $K_X^2 = 6$. Пусть отображение $\alpha: V \rightarrow X$ является раздутием точки $O \in X$, и пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда

$$K_V + B_V + mE \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*(K_X + B_X)$$

для некоторого $m \geq 0$, где B_V – собственный прообраз дивизора B_X на поверхности V . Заметим, что $\text{lct}(X) \leq 1/3$. Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$, т. е. найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \frac{1}{3}B_X)$ не являются лог-каноническими. Тогда особенности лог-пары $(V, \frac{1}{3}(B_V + mE))$ не являются лог-каноническими в некоторой точке $P \in V$. Существует бирациональный морфизм $\pi: V \rightarrow U$ такой, что либо $U \cong \mathbb{F}_1$, либо $U \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, а бирациональный морфизм π является изоморфизмом в окрестности точки $P \in X$. Тогда особенности лог-пары $(U, \frac{1}{3}(\pi(B_V) + m\pi(E)))$ не являются лог-каноническими в точке $\pi(P)$. С другой стороны, выполнена эквивалентность $-K_U \sim_{\mathbb{Q}} \pi(B_V) + m\pi(E)$, откуда сразу следует противоречие с примером 1.10. Таким образом, мы видим, что $\text{lct}(X) = 1/3$.

ЛЕММА 4.7. *Предположим, что $X \cong \mathbb{P}(1, 1, 2)$, выполнена эквивалентность $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ и существует точка $P \in X$ такая, что $O \neq P \in \text{LCS}(X, \lambda B_X)$ для некоторого неотрицательного рационального числа $\lambda < 1/2$. Пусть L – единственная кривая в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,2)}(1)|$ такая, что $P \in L$. Тогда $L \subseteq \text{LCS}(X, \lambda B_X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует кривая $\Gamma \in \text{LCS}(X, \lambda B_X)$ такая, что $P \in \Gamma \neq L$. Тогда $B_X = \mu\Gamma + \Omega$, где $\mu > 2$, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $\Gamma \not\subseteq \text{Supp}(\Omega)$. Следовательно, $\mu\Gamma + \Omega \sim_{\mathbb{Q}} 4L$ и выполнена эквивалентность $\Gamma \sim mL$, где $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. С другой стороны, поскольку $P \in \Gamma \neq L$, то выполнено неравенство $m \geq 2$, откуда сразу следует противоречие.

Предположим, что $L \not\subseteq \text{LCS}(X, \lambda B_X)$. Тогда из теоремы 2.7 следует, что $\text{LCS}(X, \lambda B_X) = P$, поскольку множество $\text{LCS}(X, \lambda B_X)$ не содержит кривых, которые проходят через P .

Пусть C – общая кривая в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,2)}(1)|$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda B_X + C) = P \cup C$, что противоречит теореме 2.7.

ЛЕММА 4.8. *Предположим, что $X \cong \mathbb{F}_1$. Тогда существуют $0 \leq \mu \in \mathbb{Q} \ni \lambda \geq 0$ такие, что выполнено соотношение $B_X \sim_{\mathbb{Q}} \mu C + \lambda L$, где C и L – неприводимые кривые на X такие, что $C \cdot C = -1$, $C \cdot L = 1$ и $L \cdot L = 0$. Предположим, что $\mu < 1$ и $\lambda < 1$. Тогда $\text{LCS}(X, B_X) = \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что множество $\text{LCS}(X, B_X)$ не содержит кривых, поскольку кривые L и C порождают конус эффективных дивизоров поверхности X . Предположим, что множество $\text{LCS}(X, B_X)$ содержит точку $O \in X$. Тогда

$$K_X + B_X + ((1 - \mu)C + (2 - \lambda)L) \sim_{\mathbb{Q}} -(L + C),$$

так как $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} 2C + 3L$. С другой стороны, из теоремы 2.6 следует, что отображение

$$0 = H^0(\mathcal{O}_X(-L - C)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{L}(X, B_X)}) \neq 0$$

сюрьективно, поскольку дивизор $(1 - \mu)C + (2 - \lambda)L$ обилен. Противоречие.

ЛЕММА 4.9. *Предположим, что $\text{Sing}(X) = \emptyset$ и $K_X^2 = 7$. Тогда*

$$L_1 \cdot L_1 = L_2 \cdot L_2 = L_3 \cdot L_3 = -1, \quad L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_3 = 1, \quad L_1 \cdot L_3 = 0,$$

где L_1, L_2, L_3 – исключительные кривые на поверхности X . Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq \emptyset$, но $B_X \sim_{\mathbb{Q}} -\mu K_X$, где $\mu < 1/2$. Тогда $\text{LCS}(X, B_X) = L_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – любая точка множества $\text{LCS}(X, B_X)$. Тогда $P \in L_2$, поскольку $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ и существует бирациональный морфизм $X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, который стягивает только кривую L_2 .

Предположим, что $\text{LCS}(X, B_X) \neq L_2$. Тогда $\text{LCS}(X, B_X) = P$ по теореме 2.7.

Можно считать, что $P \notin L_3$. Тогда существует бирациональный морфизм $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, который стягивает кривые L_1 и L_3 . Пусть C_1 и C_3 – собственные прообразы на поверхности X достаточно общих прямых в $\mathbb{P}^2$, которые проходят через точки $\varphi(L_1)$ и $\varphi(L_3)$ соответственно. Тогда $-K_X \sim C_1 + 2C_3 + L_3$, но $C_1 \not\equiv P \notin C_3$. Мы видим, что

$$C_3 \cup P \subseteq \text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{1}{2}(C_1 + 2C_3 + L_3)\right) \subseteq C_3 \cup P \cup L_3,$$

что невозможно по теореме 2.7, поскольку $P \notin L_3$.

ЛЕММА 4.10. *Предположим, что $O = \text{Sing}(X)$, $K_X^2 = 7$ и $B_X \sim_{\mathbb{Q}} C + (4/3)L$, где $L \cong \mathbb{P}^1 \cong C$ – кривые на поверхности X такие, что $L \cdot L = -1/2$, $C \cdot C = -1$, $C \cdot L = 1$, но особенности лог-пары (X, B_X) не являются лог-каноническими в некоторой точке $P \in C$. Тогда $P \in L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – квадратичный конус в $\mathbb{P}^3$. Тогда $S \cong \mathbb{P}(1, 1, 2)$ и существует бирациональный морфизм $\varphi: X \rightarrow S \subset \mathbb{P}^3$, который стягивает кривую C в неособую точку $Q \in S$. Тогда $Q \in \varphi(L) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,2)}(1)|$.

Предположим, что $P \notin L$. Тогда из замечания 2.22 следует, что для завершения доказательства можно считать, что либо $C \not\subset \text{Supp}(B_X)$, либо $L \not\subset \text{Supp}(B_X)$, так как лог-пара $(X, C + (4/3)L)$ имеет лог-канонические особенно-

сти в точке $P \in X$. Предположим, что $C \not\subset \text{Supp}(B_X)$. Тогда $1/3 = B_X \times C \geq \text{mult}_P(B_X) > 1$, что является противоречием. Итак, показано, что $C \subset \text{Supp}(B_X)$. Значит, мы можем считать, что $L \not\subset \text{Supp}(B_X)$.

Положим $B_X = \varepsilon C + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $C \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда $1/3 = B_X \cdot L = \varepsilon + \Omega \cdot L \geq \varepsilon$, откуда следует, что выполнено неравенство $\varepsilon \leq 1/3$. Тогда $1 < \Omega \cdot C = 1/3 + \varepsilon \leq 2/3$ по лемме 2.20. Противоречие. Лемма доказана.

5. Торические многообразия

Основная цель данного раздела – доказать лемму 5.1 (ср. [30], [55]).

Пусть $N = \mathbb{Z}^n$ – решетка ранга n , а $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ – двойственная решетка. Положим $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ и $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Пусть X – торическое многообразие, заданное полным веером $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$; обозначим через $\Delta_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ множество примитивных векторов на одномерных гранях веера Σ . Пусть

$$\Delta = \{w \in M \mid \langle w, v_i \rangle \geq -1 \text{ для всех } i = 1, \dots, m\}.$$

Положим $T = (\mathbb{C}^*)^n \subset \text{Aut}(X)$. Пусть $\mathcal{N}$ – нормализатор тора T в $\text{Aut}(X)$ и $\mathcal{W} = \mathcal{N}/T$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $G \subset \mathcal{W}$ – подгруппа. Предположим, что многообразие X является $\mathbb{Q}$ -факториальным. Тогда

$$\text{lct}(X, G) = \frac{1}{1 + \max\{\langle w, v \rangle \mid w \in \Delta^G, v \in \Delta_1\}},$$

где Δ^G – множество точек в Δ , неподвижных относительно действия группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mu = 1 + \max\{\langle w, v \rangle \mid w \in \Delta^G, v \in \Delta_1\}$. Тогда $\mu \in \mathbb{Q}$ – наибольшее число такое, что $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} \lambda R + H$, где R является $T \rtimes G$ -инвариантным эффективным дивизором Вейля, а H – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор. Следовательно, $\text{lct}(X, G) \leq 1/\mu$.

Предположим, что $\text{lct}(X, G) < 1/\mu$. Тогда найдется G -инвариантный эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/\mu$.

Существует семейство $\{D_t \mid t \in \mathbb{C}\}$ G -инвариантных эффективных $\mathbb{Q}$ -дивизоров такое, что

- $D_t \sim_{\mathbb{Q}} D$ при всех $t \in \mathbb{C}$,
- $D_1 = D$,
- для любого $t \neq 0$ существует автоморфизм $\varphi_t \in \text{Aut}(X)$ такой, что $D_t = \varphi_t(D) \cong D$,
- дивизор D_0 является T -инвариантным,

откуда следует, что лог-пара $(X, \lambda D_0)$ не лог-канонична (см. [21]).

С другой стороны, никакая компонента $\text{Supp}(D_0)$ не входит в D_0 с кратностью, большей μ ; следовательно, лог-пара $(X, \lambda D_0)$ лог-канонична (см. [56]), противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $X = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-a_k))$, где $a_i \geq 0$ при всех $i = 1, \dots, k$. Тогда

$$\text{lct}(X) = \frac{1}{1 + \max\{k, n + \sum_{i=1}^k a_i\}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что X является торическим многообразием, и множество Δ_1 состоит из следующих векторов:

$$\begin{aligned} &(\overbrace{1, 0, \dots, 0}^k, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^n), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0), \\ &(-1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0), \\ &(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1), \\ &(-a_1, \dots, -a_k, -1, \dots, -1), \end{aligned}$$

откуда по лемме 5.1 следует требуемое утверждение.

Применяя следствие 5.2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.3. В обозначениях раздела 1 выполнено равенство $\text{lct}(X) = 1/4$, если $\mathfrak{J}(X) \in \{2.33, 2.35\}$, и $\text{lct}(X) = 1/5$, если $\mathfrak{J}(X) = 2.36$.

Несложные вычисления с применением леммы 5.1 приводят к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. В обозначениях раздела 1 выполнено равенство

$$\text{lct}(X) = \begin{cases} 1/3, & \text{если } \mathfrak{J}(X) \in \{3.25, 3.31, 4.9, 4.11, 5.2\}, \\ 1/4, & \text{если } \mathfrak{J}(X) \in \{3.26, 3.30, 4.12\}, \\ 1/5, & \text{если } \mathfrak{J}(X) = 3.29. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Пусть торическое многообразие X является симметрическим, т. е. $\Delta^{\mathscr{W}} = \{0\}$ (см., например, [30]). Тогда по лемме 5.1 глобальный лог-канонический порог $\text{lct}(X, \mathscr{W})$ равен 1. Заметим, что в работах [30] и [55] это утверждение было получено при дополнительном предположении, что многообразие X неособо.

6. Многообразия дель Пеццо

На протяжении этого раздела мы будем пользоваться предположениями и обозначениями, введенными в разделе 1. Предположим, что $-K_X \sim 2H$, где H – дивизор Картье, неделимый в группе $\text{Pic}(X)$. Цель данного раздела – доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.1. Выполнено равенство $\text{lct}(X) = 1/2$, за исключением случая $\mathfrak{J}(X) = 2.35$, когда $\text{lct}(X) = 1/4$.

Из [2; теоремы 3.1.14 и 3.3.1] следует, что $\mathfrak{J}(X) \in \{1.11, \dots, 1.15, 2.32, 2.35, 3.27\}$. Согласно [5] и [13] (см. также лемму 2.17), равенство $\text{lct}(X) = 1/2$ выполнено при $\mathfrak{J}(X) \in \{1.12, 1.13\}$. Из леммы 2.29 следует, что $\text{lct}(X) = 1/2$ при $\mathfrak{J}(X) = 3.27$. По лемме 5.1 при $\mathfrak{J}(X) = 2.35$ выполнено $\text{lct}(X) = 1/4$.

Остается разобрать следующие случаи: $\mathfrak{I}(X) \in \{1.11, 1.14, 1.15, 2.32\}$, причем неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/2$ очевидно, так как линейная система $|H|$ непуста.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.32$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} H$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1$.

Многообразие X является дивизором бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Имеются два естественных $\mathbb{P}^1$ -расслоения $\pi_1: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $\pi_2: X \rightarrow \mathbb{P}^2$; применяя к ним теорему 2.27, немедленно получаем противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Пусть $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$ и существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} H$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1$. Положим $D = \varepsilon S + \Omega \sim_{\mathbb{Q}} H$, где S – (неприводимая) поверхность, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $\text{Supp}(\Omega) \not\supset S$. Тогда $\varepsilon \leq 1$, так как $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}[H]$, откуда следует, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей. Более того, для любого дивизора $H \in |H|$ множество $\text{LCS}(X, \lambda D + H)$ связно по теореме 2.7. Пусть H – общая поверхность в линейной системе $|H|$. Из связности множества $\text{LCS}(X, \lambda D + H)$ следует, что $\text{LCS}(X, \lambda D + H)$ не содержит изолированных нульмерных компонент вне базисного множества линейной системы $|H|$. При этом линейная система $|H|$ не имеет базисных точек, за исключением случая $\mathfrak{I}(X) = 1.11$, когда базисное множество линейной системы $|H|$ состоит из единственной точки O . Заметим, что в последнем случае $O \notin \text{LCS}(X, \lambda D)$, так как многообразие X покрывается кривыми антиканонической степени 2, проходящими через точку O . Следовательно, множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ никогда не имеет изолированных нульмерных компонент и, в частности, содержит некоторую (неприводимую) кривую C . Положим $D|_H = \bar{D}$. Тогда $-K_H \sim_{\mathbb{Q}} \bar{D}$ и при этом лог-пара $(H, \lambda \bar{D})$ не является лог-канонической в каждой точке пересечения $H \cap C$. Множество $\text{LCS}(H, \lambda \bar{D})$ должно быть связно по теореме 2.7. Но схема $\mathcal{L}(H, \lambda \bar{D})$ нульмерна, так что $H \cdot C = |H \cap C| = 1$, и множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит других кривых, кроме C .

ЛЕММА 6.4. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 1.14$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} H$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1$.

Линейная система $|H|$ задает вложение $X \subset \mathbb{P}^5$ такое, что X является полным пересечением двух квадрик. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит из одной прямой $C \subset X$ по замечанию 6.3.

Из [2; предложение 3.4.1] следует, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \text{---} & \mathbb{P}^3 \\ & \psi & \end{array}$$

где ψ – проекция из прямой C , морфизм α – раздутие прямой C , а β – раздутие неособой кривой $Z \subset \mathbb{P}^3$ степени 5 рода 2.

Пусть S – исключительный дивизор раздутия β , а L – слой морфизма β над общей точкой кривой Z . Положим $\bar{S} = \alpha(S)$ и $\bar{L} = \alpha(L)$. Тогда $\bar{S} \sim 2H$, кривая $\bar{L}$ является прямой и $\text{mult}_C(\bar{S}) = 3$. При этом лог-пара $(X, (1/2)\bar{S})$ лог-канонична, т.е. можно предполагать (см. замечание 2.22), что $\text{Supp}(D) \not\subset \bar{S}$. Тогда $1 = \bar{L} \cdot D \geq \text{mult}_C(D) > 1$, противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Пусть $V \subset \mathbb{P}^5$ – полное пересечение двух квадрик, имеющее изолированные особенности, и пусть B_V – эффе́ктивный $\mathbb{Q}$ -дивизор на V такой, что $B_V \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$ и при этом $\text{LCS}(V, \mu B_V) \neq \emptyset$, где $\mu < 1/2$. Рассуждая как в доказательстве леммы 6.4, получаем, что $\text{LCS}(V, \mu B_V) \subseteq L$, где $L \subset V$ – такая прямая, что $L \cap \text{Sing}(V) \neq \emptyset$.

ЛЕММА 6.6. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 1.15$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично доказательству леммы 6.4.

ЛЕММА 6.7. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 1.11$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффе́ктивный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} H$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1$.

Напомним, что многообразие X может быть задано уравнением

$$w^2 = t^3 + t^2 f_2(x, y, z) + t f_4(x, y, z) + f_6(x, y, z) \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3) \\ \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, t, w]),$$

где $\text{wt}(x) = \text{wt}(y) = \text{wt}(z) = 1$, $\text{wt}(t) = 2$, $\text{wt}(w) = 3$, а f_i – многочлен степени i .

По замечанию 6.3 множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит из кривой $C \subset X$ такой, что $H \cdot C = 1$.

Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – естественная проекция. Тогда ψ не определена в точке O , заданной уравнениями $x = y = z = 0$. Кривая C не проходит через точку O , так как иначе

$$1 = \Gamma \cdot D \geq \text{mult}_O(D) \text{mult}_O(\Gamma) \geq \text{mult}_C(D) > 1/\lambda > 1,$$

где Γ – общий слой проекции ψ . Таким образом, $\psi(C) \subset \mathbb{P}^2$ – прямая.

Пусть S – (единственная) поверхность из линейной системы $|H|$, проходящая через кривую C . Пусть L – общий слой рационального отображения ψ , пересекающий кривую C . Тогда $L \subset \text{Supp}(D)$, так как иначе $1 = D \cdot L \geq \text{mult}_C(D) > 1/\lambda > 1$.

Согласно замечанию 2.22, можно считать, что $D = S$. Тогда S имеет каспидальную особенность вдоль кривой C . Можно считать, что поверхность S задана на X уравнением $x = 0$, а кривая C – уравнениями $w = t = x = 0$. Тогда S задается как

$$w^2 = t^3 + t^2 f_2(0, y, z) + t f_4(0, y, z) \subset \mathbb{P}(1, 1, 2, 3) \cong \text{Proj}(\mathbb{C}[y, z, t, w]),$$

причем $f_6(x, y, z) = x f_5(x, y, z)$, где $f_5(x, y, z)$ – однородный многочлен степени 5.

Так как поверхность S особа вдоль кривой C , то $f_4(x, y, z) = xf_3(x, y, z)$, где $f_3(x, y, z)$ – однородный многочлен степени 3. Тогда каждая точка множества

$$x = f_5(x, y, z) = t = w = 0 \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$$

должна быть особой на X , что невозможно, так как многообразие X гладкое.

Таким образом, утверждение теоремы 6.1 полностью доказано.

7. Многообразия с числом Пикара $\rho = 2$

На протяжении этого раздела мы будем пользоваться предположениями и обозначениями, введенными в разделе 1.

ЛЕММА 7.1. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.1$ или $\mathfrak{I}(X) = 2.3$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует бирациональный морфизм $\alpha: X \rightarrow V$, стягивающий поверхность $E \subset X$ на неособую эллиптическую кривую $C \subset V$, где V – одно из следующих многообразий Фано: неособая гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$; неособая гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$.

Кривая C содержится в поверхности $H \subset V$ такой, что $\text{Pic}(V) = \mathbb{Z}[H]$ и $-K_X \sim 2H$. При этом C является полным пересечением двух дивизоров из линейной системы $|H|$ и $-K_X \sim 2\bar{H} + E$, где E – исключительный дивизор бирационального морфизма α , а $\bar{H}$ – собственный прообраз поверхности H на многообразии X . В частности, выполнено неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. В этом случае $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(V) = 1/2$ по теореме 6.1 и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} 2H \sim -K_V$.

Положим $k = H \cdot C$. Тогда $k = H^3 \in \{1, 2\}$. Заметим, что

$$\mathcal{N}_{C/V} \cong \mathcal{O}_C(H|_C) \oplus \mathcal{O}_C(H|_C),$$

откуда следует $E \cong C \times \mathbb{P}^1$. Пусть $Z \cong C$ и $L \cong \mathbb{P}^1$ – кривые на E такие, что $Z \cdot Z = L \cdot L = 0$ и $Z \cdot L = 1$. Тогда $\alpha^*(H)|_E \sim kL$, и так как

$$-2Z \sim K_E \sim (K_X + E)|_E \sim (2E - 2\alpha^*(H))|_E \sim -2kL + 2E|_E,$$

то $E|_E \sim -Z + kL$. Положим $D = \mu E + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $E \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Пара $(X, E + \lambda\Omega)$ не лог-канонична в окрестности E . Следовательно, пара $(E, \lambda\Omega|_E)$ также не лог-канонична по теореме 2.19. Но

$$\Omega|_E \sim_{\mathbb{Q}} (-K_X - \mu E)|_E \sim_{\mathbb{Q}} (2\alpha^*(H) - (1 + \mu)E)|_E \sim_{\mathbb{Q}} (1 + \mu)Z + k(1 - \mu)L,$$

и $0 \leq \lambda k(1 - \mu) \leq 1$, что противоречит лемме 2.23.

ЛЕММА 7.2. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.4$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 3/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \mathbb{P}^3 & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & \mathbb{P}^1 \\ & \psi & \end{array}$$

где ψ – рациональное отображение, α – раздутие неособой кривой $C \subset \mathbb{P}^3$ такой, что $C = H_1 \cdot H_2$ для некоторых $H_1, H_2 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|$, а β – расслоение на кубические поверхности.

Пусть $\mathcal{P}$ – пучок в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)|$, порожденный H_1 и H_2 . Тогда ψ задается пучком $\mathcal{P}$.

Предположим, что X удовлетворяет следующим условиям общности: любая поверхность в $\mathcal{P}$ имеет не более одной обыкновенной двойной точки; кривая C не содержит точек Экарда ⁴ (см. определение 3.1) никакой поверхности из пучка $\mathcal{P}$.

Пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда

$$\frac{4}{3} \bar{H}_1 + \frac{1}{3} E \sim_{\mathbb{Q}} \frac{4}{3} \bar{H}_2 + \frac{1}{3} E \sim_{\mathbb{Q}} -K_X,$$

где $\bar{H}_i$ – собственный прообраз H_i на многообразии X . В частности, выполнено неравенство $\text{lct}(X) \leq 3/4$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 3/4$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 3/4$.

Допустим, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ содержит (неприводимую) поверхность $S \subset X$. Тогда $D = \varepsilon S + \Delta$, где $\varepsilon \geq 1/\lambda$, а Δ – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $S \not\subset \text{Supp}(\Delta)$. Тогда по замечанию 2.3 лог-пара $(\bar{H}_1, D|_{\bar{H}_1})$ не лог-канонична, если $S \cap \bar{H}_1 \neq \emptyset$. Но $D|_{\bar{H}_1} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\bar{H}_1}$. Можно считать, что $\bar{H}_1$ – гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$. Таким образом, по теореме 3.2 $S \cap \bar{H}_1 = \emptyset$ и, в частности, $S \sim \bar{H}_1$. Следовательно, $\alpha(S)$ является поверхностью из пучка $\mathcal{P}$. Тогда $\varepsilon \alpha(S) + \alpha(\Delta) \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$, что невозможно, так как $\varepsilon \geq 1/\lambda > 4/3$.

Пусть F – такой слой отображения β , что $F \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$. Положим $D = \mu F + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $F \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда лог-пара $(F, \lambda \Omega|_F)$ не лог-канонична по теореме 2.19, так как $\lambda \mu < 1$. Из теоремы 3.2 следует, что $\text{LCS}(F, \lambda \Omega|_F) = O$, где O – либо точка Экарда поверхности F , либо ее особая точка. По теореме 2.7

$$\text{LCS}(X, \lambda D) = \text{LCS}(X, \lambda \mu F + \lambda \Omega D) = O,$$

так как по теореме 2.19 лог-пара $(X, F + \lambda \Omega D)$ не лог-канонична в точке O , но лог-канонична в проколотой окрестности O . Но $O \notin E$ по условию общности. Следовательно,

$$\alpha(O) \subset \text{LCS}(\mathbb{P}^3, \lambda \alpha(D)) \subseteq \alpha(O) \cup C,$$

где $\alpha(O) \notin C$. С другой стороны, $\lambda < 3/4$, что противоречит лемме 2.8.

ЛЕММА 7.3. Пусть $\mathfrak{I}(X) \in \{2.5, 2.10, 2.14\}$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ V & \text{---} \text{---} \text{---} \psi \text{---} \text{---} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

⁴Заметим, что кривая C также не содержит особых точек поверхностей из пучка $\mathcal{P}$, так как C является полным пересечением двух таких поверхностей.

где V – неособое многообразие Фано с $-K_V \sim 2H$ для некоторого $H \in \text{Pic}(V)$ и $\mathfrak{I}(V) \in \{1.13, 1.14, 1.15\}$, морфизм α является раздутием неособой кривой $C \subset V$ такой, что $C = H_1 \cdot H_2$ для некоторых $H_1, H_2 \in |H|$, $H_1 \neq H_2$, морфизм β является расслоением на поверхности дель Пеццо, а ψ – проекцией из кривой C .

Пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда выполнены эквивалентности $2\bar{H}_1 + E \sim 2\bar{H}_2 + E \sim -K_X$, где $\bar{H}_i$ – собственный прообраз H_i на многообразии X . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/2$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$ и $\text{lct}(V) = 1/2$ по теореме 6.1.

Допустим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: каждый слой расслоения β имеет не более одной обыкновенной двойной особой точки.

Пусть F – такой слой отображения β , что $F \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$. Положим $D = \mu F + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $F \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$\alpha(D) = \mu\alpha(F) + \alpha(\Omega) \sim_{\mathbb{Q}} 2\alpha(F) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V,$$

откуда следует $\mu \leq 2$. Заметим, что пара $(F, \lambda\Omega|_F)$ не лог-канонична по теореме 2.19. Но выполнено соотношение $\Omega|_F \sim_{\mathbb{Q}} -K_F$, откуда $\text{lct}(F) \leq \lambda < 1/2$. С другой стороны, F имеет не более одной обыкновенной двойной особенности и $K_F^2 = H^3 \leq 5$, откуда следует неравенство $\text{lct}(F) \geq 1/2$ (см. примеры 1.10, 1.11, 4.3 и 4.4), противоречие.

ЛЕММА 7.4. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.8$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O \in \mathbb{P}^3$ и $\alpha: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутие точки O . Тогда $V_7 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ и существует $\mathbb{P}^1$ -расслоение $\pi: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Пусть E – исключительный дивизор бирационального морфизма α . Тогда E является сечением расслоения π .

Существует двумерная квартика $R \subset \mathbb{P}^3$ такая, что $\text{Sing}(R) = O$, точка O является обыкновенной двойной точкой поверхности R и существует коммутативная диаграмма

где ω – двойное накрытие, разветвленное в R , морфизм η – двойное накрытие, разветвленное в собственном прообразе R , морфизм β бирационален и стягивает поверхность $\bar{E}$ такую, что $\eta(\bar{E}) = E$, в особую точку многообразия V_2 , $\omega(\text{Sing}(V_2)) = O$, отображение ψ – проекция из точки O , а φ – расслоение на коники.

Предположим, что X удовлетворяет следующему условию общности: точка O является обыкновенной двойной особой точкой поверхности R . Тогда $\bar{E} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Пусть $\bar{H}$ – собственный прообраз на X общей плоскости в $\mathbb{P}^3$, проходящей через O . Тогда выполнено соотношение $-K_X \sim 2\bar{H} + \bar{E}$, откуда $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Из леммы 2.17 следует, что $\text{LCS}(X, D) \cap \bar{E} \neq \emptyset$. Положим $D = \mu\bar{E} + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $\bar{E} \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = (\mu\bar{E} + \Omega) \cdot \Gamma = 2\mu + \Omega \cdot \Gamma \geq 2\mu,$$

где Γ – общий слой расслоения φ . Следовательно, лог-пара $(\bar{E}, \lambda\Omega|_{\bar{E}})$ не лог-канонична по теореме 2.19, так как $\text{LCS}(X, D) \cap \bar{E} \neq \emptyset$. При этом выполнена эквивалентность $\Omega|_{\bar{E}} \sim_{\mathbb{Q}} -((1 + \mu)/2)K_{\bar{E}}$, что невозможно по лемме 2.23.

ЛЕММА 7.5. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.11$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$. Тогда многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X & \dashrightarrow \psi & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где морфизм α – стягивание поверхности $E \subset X$ на прямую $L \subset V$, отображение ψ – проекция из прямой L , а морфизм β – расслоение на коники.

Предположим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: нормальное расслоение $\mathcal{N}_{L/V}$ к прямой L на V изоморфно $\mathcal{O}_L \oplus \mathcal{O}_L$.

Пусть H – гиперплоское сечение кубики V такое, что $L \subset H$. Тогда выполнена эквивалентность $-K_X \sim 2\bar{H} + E$, где $\bar{H} \subset X$ – собственный прообраз поверхности H . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/2$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(V) = 1/2$ и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$. Заметим, что $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ по условию общности.

Пусть $F \subset E$ – слой естественной проекции $E \rightarrow L$, а $Z \subset E$ – сечение этой проекции с самопересечением $Z \cdot Z = 0$. Тогда $\alpha^*(H)|_E \sim F$ и $E|_E \sim -Z$, так как

$$-2Z - 2F \sim K_E \sim (K_X + E)|_E \sim 2(E - \alpha^*(H))|_E \sim -2F + 2E|_E.$$

Положим $D = \mu E + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X и $E \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = \mu E \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma \geq \mu E \cdot \Gamma = 2\mu,$$

где Γ – общий слой расслоения на коники β . Таким образом, $\mu \leq 1$. Лог-пара $(E, \lambda\Omega|_E)$ не лог-канонична по теореме 2.19. Но

$$\Omega|_E \sim_{\mathbb{Q}} (-K_X - \mu E)|_E \sim_{\mathbb{Q}} (1 + \mu)Z + 2F,$$

что противоречит лемме 2.23, так как $\mu \leq 1$ и $\lambda < 1/2$.

ЛЕММА 7.6. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.15$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует бирациональный морфизм $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^3$, который стягивает поверхность $E \subset X$ на неособую кривую $C \subset \mathbb{P}^3$, являющуюся полным пересечением (неприводимой, но, возможно, особой) квадрики $Q \subset \mathbb{P}^3$ и кубики $F \subset \mathbb{P}^3$.

Предположим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: квадрики Q неособа.

Пусть $\bar{Q}$ – собственный прообраз Q на многообразии X . Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \mathbb{P}^3 & \xleftarrow{\gamma} & V \end{array}$$

где V – кубика в $\mathbb{P}^4$ с одной обыкновенной двойной особенностью $P \in V$, морфизм β стягивает поверхность $\bar{Q}$ в точку P , а γ является проекцией из точки P .

Пусть E – исключительный дивизор бирационального морфизма α . Тогда $-K_X \sim 2\bar{Q} + E$ и поверхность $\beta(E) \subset V$ содержит все прямые на V , проходящие через P . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Из леммы 2.16 следует, что либо $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \bar{Q}$, либо множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ содержит слой естественной проекции $E \rightarrow C$. В обоих случаях мы видим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \cap \bar{Q} \neq \emptyset$.

По условию общности $\bar{Q} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Положим $D = \mu\bar{Q} + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $\bar{Q} \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} \mu Q + \alpha(\Omega) \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}^3}$, откуда $\mu \leq 2$. Лог-пара $(\bar{Q}, \lambda\Omega|_{\bar{Q}})$ не лог-канонична по теореме 2.19. Но $\Omega|_{\bar{Q}} \sim_{\mathbb{Q}} -((1+\mu)/2)K_{\bar{Q}}$, откуда по лемме 2.23 следует неравенство $\mu > 1$.

По замечанию 2.22 можно предполагать, что $E \not\subset \text{Supp}(D)$. Тогда

$$1 = D \cdot F = \mu\bar{Q} \cdot F + \Omega \cdot F = \mu + \Omega \cdot F \geq \mu,$$

где F – общий слой естественной проекции $E \rightarrow C$. Но $\mu > 1$, противоречие.

ЛЕММА 7.7. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.18$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует неособый дивизор $B \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(2, 2)$ такой, что многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow \varphi_1 & \downarrow \pi & \searrow \varphi_2 & \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где π – двойное накрытие, разветвленное в B , морфизмы π_1 и π_2 – естественные проекции, φ_1 – расслоение на квадратики, а φ_2 – расслоение на коники.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, так как $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$ и $\text{lct}(V) = 1/2$ по теореме 6.1.

Пусть F – слой проекции $E \rightarrow L$, а Z – сечение этой проекции с самопересечением $Z \cdot Z = 0$. Тогда $\alpha^*(H)|_E \sim F$ и $E|_E \sim -Z$, так как

$$-2Z - 2F \sim K_E \sim (K_X + E)|_E \sim 2(E - \alpha^*(H))|_E \sim 2E|_E - 2F.$$

Согласно замечанию 2.22, можно считать, что либо $E \not\subset \text{Supp}(D)$, либо $R \not\subset \text{Supp}(D)$, так как лог-пара $(X, \lambda(R + 2E))$ лог-канонична и $-K_X \sim R + 2E$. Положим $D = \mu E + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $E \not\subset \text{Supp}(\Omega)$.

Допустим, что $\mu \leq 1$. Тогда особенности лог-пары $(X, E + \lambda \Omega)$ не являются лог-каноническими. Значит, лог-пара $(E, \lambda \Omega|_E)$ также не лог-канонична по теореме 2.19. Но

$$\Omega|_E \sim_{\mathbb{Q}} (-K_X - \mu E)|_E \sim_{\mathbb{Q}} (1 + \mu)Z + 2F,$$

что противоречит лемме 2.23, поскольку $\mu \leq 1$ и $\lambda < 1/2$.

Таким образом, $\mu > 1$. Поэтому можно считать, что $R \not\subset \text{Supp}(D)$.

Пусть Γ – общий слой проекции $R \rightarrow C$. Тогда $\Gamma \not\subset \text{Supp}(D)$ и

$$1 = -K_X \cdot \Gamma = \mu E \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma = \mu + \Omega \cdot \Gamma \geq \mu,$$

противоречие.

ЛЕММА 7.9. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 2.23$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует бирациональный морфизм $\alpha: X \rightarrow Q$ на неособую квадрику $Q \subset \mathbb{P}^4$, стягивающий поверхность $E \subset X$ на неособую кривую $C \subset Q$, являющуюся полным пересечением гиперплоского сечения $H \subset Q$ и дивизора $F \in |\mathcal{O}_Q(2)|$.

Предположим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: двумерная квадрика H неособа.

Пусть $\bar{H}$ – собственный прообраз H на X . Существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ Q & \dashleftarrow \gamma \dashrightarrow & V \end{array}$$

где V – полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с одной обыкновенной двойной особенностью $P \in V$, морфизм β – стягивание $\bar{H}$ в точку P , а γ – проекция из точки P .

Пусть E – исключительный дивизор морфизма α . Тогда $-K_X \sim 3\bar{H} + 2E$ и поверхность $\beta(E) \subset V$ содержит все прямые, лежащие на V и проходящие через P . Имеем $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/3$.

Из замечания 6.5 следует, что либо $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \bar{H}$, либо множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ содержит слой естественной проекции $E \rightarrow C$. В обоих случаях $\text{LCS}(X, \lambda D) \cap \bar{H} \neq \emptyset$.

По условию общности $\bar{H} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Положим $D = \mu \bar{H} + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $\bar{H} \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} \mu H + \alpha(\Omega) \sim_{\mathbb{Q}} -K_Q$, откуда $\mu \leq 3$. Лог-пара $(\bar{H}, \lambda \Omega|_{\bar{H}})$ не лог-канонична по теореме 2.19. Но $\Omega|_{\bar{H}} \sim_{\mathbb{Q}} -((1 + \mu)/2)K_{\bar{H}}$, откуда $\mu > 1$ по лемме 2.23. По замечанию 2.22 можно считать, что $E \not\subset \text{Supp}(D)$, так как особенности лог-пары $(X, \lambda(3\bar{H} + 2E))$ являются лог-каноническими. Пусть F – общий слой естественной проекции $E \rightarrow C$. Тогда

$$1 = D \cdot F = \mu \bar{H} \cdot F + \Omega \cdot F = \mu + \Omega \cdot F \geq \mu,$$

что невозможно, так как $\mu > 1$.

ЛЕММА 7.10. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 2.24$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X является дивизором бистепени $(1, 2)$ в $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Пусть H_i – поверхность в линейной системе $|\pi_i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, где отображение $\pi_i: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция X на i -й сомножитель $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, $i \in \{1, 2\}$. Тогда выполнено соотношение $-K_X \sim 2H_1 + H_2$, откуда следует неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/2$. Заметим, что π_1 является расслоением на коники, а π_2 является $\mathbb{P}^1$ -расслоением. Пусть $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ – кривая вырождения расслоения на коники π_1 . Тогда Δ является плоской кубикой.

Предположим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: кривая Δ неприводима.

Допустим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$.

Предположим, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ содержит поверхность $S \subset X$. Положим $D = \mu S + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $S \not\subset \text{Supp}(\Omega)$, и $\mu > 1/\lambda$. Пусть F_i – общий слой расслоения π_i , $i \in \{1, 2\}$. Тогда

$$2 = D \cdot F_i = \mu S \cdot F_i + \Omega \cdot F_i \geq \mu S \cdot F_i,$$

но при этом либо $S \cdot F_1 \geq 1$, либо $S \cdot F_2 \geq 1$. Таким образом, $\mu \leq 2$, противоречие.

По теореме 2.27 и теореме 2.7 существует слой Γ_2 $\mathbb{P}^1$ -расслоения такой, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = \Gamma_2$, так как множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей.

Применяя теорему 2.27 к расслоению на коники π_1 , получаем $\pi_1(\Gamma_2) \subset \Delta$, что невозможно, так как $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая кубическая кривая, а $\pi_1(\Gamma_2) \subset \mathbb{P}^2$ – прямая.

ЛЕММА 7.11. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 2.25$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что X может быть получено как раздутие $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ проективного пространства в нормальной эллиптической кривой C степени 4.

Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ – общая квадрака, содержащая C , а $\bar{Q} \subset X$ – собственный прообраз квадраки Q . Тогда $-K_X \sim 2\bar{Q} + E$, где E – исключительный дивизор раздутия α . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Заметим, что линейная система $|\bar{Q}|$ определяет расслоение на квадрики $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ с неприводимыми слоями, причем по теореме 2.27 лог-пара $(X, \lambda D)$ лог-канонична вдоль любого неособого слоя $\bar{Q}$ расслоения φ , поскольку выполнено неравенство $\text{lct}(\bar{Q}) = 1/2$ (см. пример 1.10).

Множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит слоев расслоения φ , так как $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} 2Q$ и все слои φ неприводимы. Таким образом, $\dim(\text{LCS}(X, \lambda D)) \leq 1$.

Пусть $Z \in \text{LCS}(X, \lambda D)$. Тогда для некоторого особого слоя $\bar{Q}_1$ расслоения φ выполнено $Z \subset \bar{Q}_1$. Заметим, что у φ всего четыре особых слоя и каждый из них является собственным прообразом квадратичного конуса в $\mathbb{P}^3$ с вершиной, не лежащей на кривой C .

Пусть $\bar{Q}_2$ – особый слой расслоения φ , отличный от $\bar{Q}_1$; пусть $\bar{H}$ – собственный прообраз общей плоскости в $\mathbb{P}^3$, касающейся конуса $\alpha(\bar{Q}_2) \subset \mathbb{P}^3$ вдоль какой-либо его образующей $L \subset \alpha(\bar{Q}_2)$; пусть $\bar{R}$ – собственный прообраз достаточно общей плоскости в $\mathbb{P}^3$. Положим

$$\Delta = \lambda D + \frac{1}{2}((1 + \varepsilon)\bar{Q}_2 + (2 - \varepsilon)\bar{H} + 3\varepsilon R)$$

для некоторого положительного рационального числа $\varepsilon < 1 - 2\lambda$. Тогда

$$\Delta \sim_{\mathbb{Q}} -\left(\lambda + \frac{1}{2}(1 + \varepsilon)\right)K_X \sim_{\mathbb{Q}} -\frac{1 + \varepsilon + 2\lambda}{2}K_X,$$

откуда следует, что дивизор $-(K_X + \Delta)$ обилен.

Пусть $\bar{L}$ – собственный прообраз на X прямой L . Тогда

$$Z \cup \bar{L} \subset \text{LCS}(X, \Delta) \subset \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2,$$

что невозможно по теореме 2.7, так как дивизор $-(K_X + \Delta)$ обилен.

ЛЕММА 7.12. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 2.26$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – трехмерное многообразие Фано с $-K_V \sim 2H$ и $\text{Pic}(V) = \mathbb{Z}[H]$, где H – дивизор Картье такой, что $H^3 = 5$ (т. е. $\mathfrak{J}(V) = 1.15$). Тогда линейная система $|H|$ задает вложение $X \subset \mathbb{P}^6$.

Из [2; предложение 3.4.1] следует, что существует прямая $L \subset X \subset \mathbb{P}^6$ такая, что многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ V & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & Q \\ & \psi & \end{array}$$

где Q – неособая квадрика в $\mathbb{P}^4$, морфизм α – раздутие прямой $L \subset V$, морфизм β – раздутие скрученной кубики $\mathbb{P}^1 \cong C \subset Q$, а ψ – проекция из прямой L .

Пусть S – исключительный дивизор раздутия β . Положим $\bar{S} = \alpha(S)$. Тогда $\bar{S} \sim H$ и поверхность $\bar{S}$ особа вдоль прямой L . Пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда $\beta(E) \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)|_Q$, откуда следует, что $\beta(E)$ – неприводимая квадрика.

Предположим, что X удовлетворяет следующему условию общности: поверхность $\beta(E)$ неособа.

Заметим, что $-K_X \sim 2S + 3E$. Более того, лог-пара $(X, (1/3)(2S + 3E))$ лог-канонична, но не лог-терминальна. Таким образом, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/3$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$ и $\text{lct}(V) = 1/2$ по теореме 6.1.

Заметим, что $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ по условию общности. Пусть F – слой проекции $E \rightarrow L$, а Z – сечение этой проекции такое, что $Z \cdot Z = 0$. Тогда $\alpha^*(H)|_E \sim F$ и $E|_E \sim -Z$, так как

$$-2Z - 2F \sim K_E \sim (K_X + E)|_E \sim 2(E - \alpha^*(H))|_E \sim 2E|_E - 2F.$$

Согласно замечанию 2.22, можно считать, что либо $E \not\subset \text{Supp}(D)$, либо $S \not\subset \text{Supp}(D)$. Положим $D = \mu E + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $E \not\subset \text{Supp}(\Omega)$.

Предположим, что $\mu \leq 2$. Тогда лог-пара $(X, E + \lambda \Omega)$ не лог-канонична. Значит, лог-пара $(E, \lambda \Omega|_E)$ также не лог-канонична по теореме 2.19. Но

$$\Omega|_E \sim_{\mathbb{Q}} (-K_X - \mu E)|_E \sim_{\mathbb{Q}} (1 + \mu)Z + 2F,$$

что противоречит лемме 2.23, так как $\mu \leq 2$ и $\lambda < 1/3$.

Таким образом, $\mu > 2$, и можно считать, что $S \not\subset \text{Supp}(D)$.

Пусть Γ – общий слой проекции $S \rightarrow C$. Тогда $\Gamma \not\subset \text{Supp}(D)$ и

$$1 = -K_X \cdot \Gamma = \mu E \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma = \mu + \Omega \cdot \Gamma \geq \mu,$$

противоречие.

ЛЕММА 7.13. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 2.27$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует бирациональный морфизм $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^3$, стягивающий поверхность E на скрученную кубику $C \subset \mathbb{P}^3$, и $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – стабильное векторное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ с $c_1(\mathcal{E}) = 0$ и $c_2(\mathcal{E}) = 2$ такое, что последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow 0$$

точна (см. [58; приложение 1]).

Пусть $Q \subset \mathbb{P}^3$ – общая квадрака, содержащая C , а $\bar{Q} \subset X$ – собственный прообраз Q . Тогда $-K_X \sim 2\bar{Q} + E$, где E – α -исключительный дивизор. Значит, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Допустим, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ содержит поверхность $S \subset X$. Положим $D = \mu F + \Omega$, где $\mu \geq 1/\lambda$, а Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $F \not\subset \text{Supp}(\Omega)$.

Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение. Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = \mu F \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma = \mu F \cdot \Gamma + \Omega \cdot F \geq \mu F \cdot \Gamma,$$

где Γ – общий слой φ . Таким образом, F заматывается слоями расслоения φ . Тогда выполнено соотношение $\alpha(F) \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)$, где $d \geq 2$. Но $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} \mu\alpha(F) + \alpha(\Omega) \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$, противоречие.

Следовательно, множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей. Применяя теорему 2.27 к лог-паре $(X, \lambda D)$ и расслоению φ , получаем, что $L \subseteq \text{LCS}(X, \lambda D)$, где L – слой расслоения φ . Тогда $\alpha(L)$ является секущей прямой скрученной кубики $C \subset \mathbb{P}^3$. Имеем

$$\alpha(L) \subseteq \text{LCS}(\mathbb{P}^3, \lambda\alpha(D)) \subseteq \alpha(\text{LCS}(X, \lambda D)) \cup C,$$

что невозможно по лемме 2.9.

ЛЕММА 7.14. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.28$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что многообразие X может быть получено как раздутие $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ проективного пространства в плоской кубической кривой $C \subset \mathbb{P}^3$. При этом выполнено соотношение $-K_X \sim 4G + 3E$, где E – исключительный дивизор раздутия α , а G – собственный прообраз плоскости в $\mathbb{P}^3$, содержащей кривую C . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/4$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/4$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/4$. Следовательно, $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^4) = 1/4$. Вычисляя пересечения с собственным прообразом общей прямой в $\mathbb{P}^3$, пересекающей кривую C , мы видим, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит дивизор E . Кроме того, по лемме 2.14 любая кривая $\Gamma \in \text{LCS}(X, \lambda D)$ должна быть слоем естественной проекции $\psi: E \rightarrow C$. Таким образом, по теореме 2.7 множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит либо из одной точки, либо из одного слоя проекции ψ .

Пусть R – достаточно общий конус в $\mathbb{P}^3$ над кривой C , а H – достаточно общая плоскость в $\mathbb{P}^3$, проходящая через точку $\text{Sing}(R)$. Тогда

$$\text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{3}{4}(\bar{R} + \bar{H})\right) = \text{LCS}(X, \lambda D) \cup \text{Sing}(\bar{R}),$$

где $\bar{R}$ и $\bar{H}$ – собственные прообразы R и H на многообразии X . При этом дивизор

$$-\left(K_X + \lambda D + \frac{3}{4}(\bar{R} + \bar{H})\right) \sim_{\mathbb{Q}} \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)K_X$$

обилен, что противоречит теореме 2.7.

ЛЕММА 7.15. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.29$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что многообразие X может быть получено как раздутие $\alpha: X \rightarrow Q$ неособой квадрики Q в конике $C \subset Q$.

Пусть H – общее гиперплоское сечение квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$, содержащее кривую C , а $\bar{H}$ – собственный прообраз поверхности H на многообразии X . Тогда $-K_X \sim 3\bar{H} + 2E$, где E – исключительный дивизор раздутия α . В частности, выполнено неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/3$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(Q) = 1/3$ (см. пример 1.3) и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_Q$.

Линейная система $|\bar{H}|$ не имеет базисных точек и определяет морфизм $\beta: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, общий слой которого является гладкой двумерной квадрикой. При этом лог-пара $(X, \lambda D)$ лог-канонична вдоль неособых слоев расслоения β по теореме 2.27 (см. пример 1.10).

Из теоремы 2.7 следует, что существует особый слой $S \sim \bar{H}$ расслоения β такой, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap S$, а $\alpha(S) \subset \mathbb{P}^3$ является квадратичным конусом. Положим $\Gamma = E \cap S$. Тогда Γ – (неприводимая) коника, причем лог-пара $(X, S + (2/3)E)$ имеет лог-канонические особенности и $3S + 2E \sim_{\mathbb{Q}} D$. Таким образом, по замечанию 2.22 для завершения доказательства можно считать, что либо $S \not\subset \text{Supp}(D)$, либо $E \not\subset \text{Supp}(D)$.

Пересекая дивизор D с собственным прообразом общей образующей конуса $\alpha(S) \subset \mathbb{P}^3$ и общим слоем проекции $E \rightarrow C$, мы видим, что $\Gamma \not\subseteq \text{LCS}(X, \lambda D)$, т. е. $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит из единственной точки $O \in \Gamma$ по теореме 2.7.

Пусть R – общая (не проходящая через O) поверхность в $|\alpha^*(H)|$. Тогда

$$\text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{1}{2}(\bar{H} + 2R)\right) = R \cup O,$$

что невозможно по теореме 2.7, так как $-K_X \sim \bar{H} + 2R \sim_{\mathbb{Q}} D$ и $\lambda < 1/3$.

ЛЕММА 7.16. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.30$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ \mathbb{P}^3 & \dashleftarrow \gamma \dashrightarrow & Q \end{array}$$

где Q – неособая квадрика в $\mathbb{P}^4$, морфизм α – раздутие (неособой) коники $C \subset \mathbb{P}^3$, морфизм β – раздутие точки, а отображение γ – проекция из точки.

Пусть G – собственный прообраз на многообразии X единственной плоскости в $\mathbb{P}^3$, содержащей конику C . Тогда поверхность G стягивается морфизмом β и $-K_X \sim 4G + 3E$, где E – исключительный дивизор раздутия α . Таким образом, $\text{lct}(X) \leq 1/4$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/4$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/4$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap G$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^4) = 1/4$ и $\text{lct}(Q) = 1/3$.

Согласно замечанию 2.22, можно считать, что либо $G \not\subset \text{Supp}(X)$, либо $E \not\subset \text{Supp}(X)$.

Пересекая D с прямыми в $G \cong \mathbb{P}^2$ и со слоями проекции $E \rightarrow C$, мы сразу видим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq E \cap G$, т. е. $\text{LCS}(X, \lambda D) = O$ для некоторой точки $O \in E \cap G$ по теореме 2.7.

Пусть R – общая поверхность в линейной системе $|\alpha^*(H)|$, а F – общая поверхность в линейной системе $|\alpha^*(2H) - E|$. Тогда

$$\text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{1}{2}(F + 2R)\right) = R \cup O,$$

что невозможно по теореме 2.7, так как $-K_X \sim F + 2R \sim_{\mathbb{Q}} D$ и $\lambda < 1/4$.

ЛЕММА 7.17. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 2.31$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что многообразие X может быть получено как раздутие $\alpha: X \rightarrow Q$ неособой квадрики Q в прямой $L \subset Q$.

Пусть H – достаточно общее гиперплоское сечение квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$, проходящее через прямую L , а $\bar{H}$ – собственный прообраз поверхности H на X . Тогда $-K_X \sim 3\bar{H} + 2E$, где E – исключительный дивизор раздутия α . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/3$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(Q) = 1/3$ и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_Q$.

Линейная система $|\bar{H}|$ определяет $\mathbb{P}^1$ -расслоение $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ такое, что индуцированный морфизм $E \cong \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ стягивает неприводимую кривую $Z \subset E$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) = Z$ по теореме 2.27. Положим $D = \mu E + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $E \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$2 = D \cdot F = \mu E \cdot F + \Omega \cdot F = \mu + \Omega \cdot F \geq \mu,$$

где F – общий слой расслоения φ . Лог-пара $(X, E + \lambda\Omega)$ не лог-канонична, так как $\lambda < 1/3$. Поэтому лог-пара $(E, \lambda\Omega|_E)$ также не лог-канонична по теореме 2.19.

Пусть C – слой естественной проекции $E \rightarrow L$. Тогда $\Omega|_E \sim_{\mathbb{Q}} 3C + (1 + \mu)Z$; следовательно, лог-пара $(E, \lambda\Omega|_E)$ лог-канонична по лемме 4.8, противоречие.

8. Многообразия с числом Пикара $\rho = 3$

На протяжении этого раздела мы будем пользоваться предположениями и обозначениями, введенными в разделе 1.

ЛЕММА 8.1. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.1$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 3/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует двойное накрытие $\omega: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, которое разветвлено в дивизоре тристепени $(2, 2, 2)$. Проекция $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ на i -й сомножитель индуцирует морфизм $\pi_i: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, слои которого являются поверхностями дель Педро степени 4.

Пусть R_1 – особый слой расслоения π_1 с особой точкой Q ; пусть R_2 и R_3 – слои проекций π_2 и π_3 такие, что $R_2 \ni Q \in R_3$. Тогда $\text{mult}_Q(R_1 + R_2 + R_3) = 4$, откуда следует, что лог-пара $(X, (3/4)(R_1 + R_2 + R_3))$ не лог-терминальна в Q . При этом $-K_X \sim R_1 + R_2 + R_3$. Таким образом, $\text{lct}(X) \leq 3/4$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 3/4$. Существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична в некоторой точке $P \in X$ при некотором $\lambda < 3/4$.

Пусть S_i – слой отображения π_i , содержащий точку P . Так как многообразие X общее, то (возможно, после перенумерации) можно считать, что

- поверхность S_1 неособа в точке P ,
- особенности поверхности S_1 исчерпываются единственной обыкновенной двойной особенностью (если S_1 вообще особа),
- никакая неособая кривая $L \subset S_1$ такая, что $-K_{S_1} \cdot L = 1$, не содержит точку $P \notin L$,
- для любых неособых кривых $C_1 \subset S_1 \supset C_2$ таких, что $-K_{S_1} \cdot C_1 = -K_{S_1} \cdot C_2 = 2$ и $C_1 + C_2 \sim -K_{S_1}$, выполнено $P \notin C_1 \cap C_2$.

Поверхность S_1 является поверхностью дель Пеццо степени 4. Положим $D = \mu S_1 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $S_1 \not\subset \text{Supp}(\Omega)$.

Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники, заданное полной линейной системой $|S_2 + S_3|$, и пусть Γ – общий слой φ . Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = \mu S_1 \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma = 2\mu + \Omega \cdot \Gamma \geq 2\mu,$$

откуда следует неравенство $\mu \leq 1$. Поэтому лог-пара $(X, S_1 + \lambda\Omega)$ не лог-канонична в точке P . Следовательно, лог-пара $(S_1, \lambda\Omega|_{S_1})$ также не лог-канонична в точке P по теореме 2.19. Но $\Omega|_{S_1} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{S_1}$, что невозможно (ср. пример 4.4).

ЛЕММА 8.2. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.2$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что X – примитивное многообразие Фано (см. [52; определение 1.3]). Положим

$$U = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1));$$

пусть $\pi: U \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – естественная проекция, и пусть L – тавтологическое линейное расслоение на U . Тогда $X \in |2L + \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 3))|$.

Покажем, что $\text{lct}(X) \leq 1/2$. Пусть E_1 и E_2 – такие дивизоры на многообразии X , что $\pi(E_1)$ и $\pi(E_2)$ являются дивизорами на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ бистепеней $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Тогда выполнено соотношение $-K_X \sim L|_X + 2E_1 + E_2$, откуда следует $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична в некоторой точке $P \in X$ при некотором $\lambda < 1/2$.

Из [59; предложение 3.8] следует, что X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & \xrightarrow{\gamma_1} & V & \xleftarrow{\gamma_2} & U_2 \\ & \searrow \beta_1 & \uparrow \alpha & \nearrow \beta_2 & \\ & & X & & \\ & \swarrow \varphi_1 & \downarrow \omega & \searrow \varphi_2 & \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

$\psi_1 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \psi_2$

где V – многообразие Фано с единственной обыкновенной двойной особенностью $O \in V$ такое, что $\text{Pic}(V) = \mathbb{Z}[-K_V]$ и $-K_V^3 = 16$, морфизм α стягивает единственную поверхность $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong S \subset X$ такую, что $S \sim L|_X$, в точку $O \in V$, морфизм β_i стягивает S на неособую рациональную кривую, морфизм γ_i

стягивает кривую $\beta_i(S)$ в точку $O \in V$, причем рациональное отображение $\gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}: U_1 \dashrightarrow U_2$ является флопом в $\beta_1(S) \cong \mathbb{P}^1$, морфизм ψ_2 является расслоением на квадратики, а морфизмы ψ_1 , φ_1 и φ_2 являются расслоениями на поверхности дель Пеццо степеней 4, 3 и 6 соответственно. Морфизмы π_1 и π_2 – естественные проекции, и $\omega = \pi|_X$. Заметим, что $\text{Cl}(V) = \mathbb{Z}[\alpha(E_1)] \oplus \mathbb{Z}[\alpha(E_2)]$ и ω является расслоением на коники. Кривая $\beta_1(S)$ является сечением расслоения ψ_1 , а кривая $\beta_2(S)$ является 2-сечением расслоения ψ_2 .

Предположим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: любой слой расслоения φ_2 имеет особенности не хуже, чем $\mathbb{A}_1$.

Применяя лемму 2.25 к расслоению φ_1 , получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq S_1$, где S_1 – особый слой расслоения φ_1 , так как глобальный лог-канонический порог неособой поверхности дель Пеццо степени 6 равен $1/2$ (см. пример 1.10).

Применяя лемму 2.25 к расслоению φ_2 , получаем противоречие с примером 1.11.

ЛЕММА 8.3. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.3$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X является дивизором тристепени $(1, 1, 2)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. В частности, выполнено соотношение $-K_X \sim \pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) + \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) + \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, где $\pi_1: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\pi_2: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоения на поверхности дель Пеццо степени 4, индуцированные проекциями многообразия $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ на первый и второй множитель соответственно, а $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – расслоение на коники, индуцированное проекцией $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Пусть $\alpha_2: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ – бирациональный морфизм, заданный полной линейной системой $|\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) + \varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$. Пусть $H_i \in |\pi_i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))|$ и $R \in |\varphi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ – общие дивизоры. Тогда $H_1 \sim H_2 + 2R - E_2$, где E_2 – исключительный дивизор бирационального морфизма α_2 . Следовательно,

$$-K_X \sim H_1 + H_2 + R \sim_{\mathbb{Q}} \frac{3}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_2 + \frac{1}{2} E_2,$$

откуда вытекает $\text{lct}(X) \leq 2/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 2/3$. Найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической в некоторой точке $P \in X$ при некотором $\lambda < 2/3$.

Пусть S_i – слой расслоения π_i такой, что $P \in S_i$. Так как многообразие X общее, то (возможно, после перенумерации) можно считать, что

- поверхность S_1 неособа в точке P ,
- особенности поверхности S_1 исчерпываются одной обыкновенной двойной особенностью (если S_1 вообще особа),
- для каждой неособой кривой $L \subset S_1$ такой, что $-K_{S_1} \cdot L = 1$, выполнено $P \notin L$, если $\text{Sing}(S_1) \neq \emptyset$.

Положим $D = \mu S_1 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $S_1 \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда лог-пара $(H_2, \lambda \mu S_1|_{H_2} + \lambda \Omega|_{H_2})$ не лог-канонична, так как $\text{lct}(H_2) = 2/3$. Таким образом, $\mu \leq 1/\lambda$. Следовательно, лог-пара $(S_1, \lambda \Omega|_{S_1})$ также не лог-канонична в точке P по теореме 2.19. Но $\Omega|_{S_1} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{S_1}$, что невозможно (см. пример 4.4).

ЛЕММА 8.4. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.4$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O – точка на $\mathbb{P}^2$. Тогда многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где π_i и v – естественные проекции, ω – двойное накрытие, разветвленное в дивизоре $B \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(2, 2)$, морфизм γ_1 – расслоение на квадратики, γ_2 и η_2 – расслоения на коники, β – раздутие точки O , морфизм α – раздутие неособой кривой, являющейся слоем расслоения γ_2 над точкой O , морфизм η_1 – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 6, а φ – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 4.

Пусть H – общий слой расслоения η_1 , а S – общий слой расслоения φ . Тогда $-K_X \sim H + 2S + E$, где E – исключительный дивизор раздутия α . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$ и $\text{lct}(V) = 1/2$ по лемме 7.7.

Пусть Γ – слой расслоения η_2 такой, что $\Gamma \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$. Тогда $\Gamma \subseteq \text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$ по теореме 2.27. Следовательно, лог-пара $(H, \lambda D|_H)$ не лог-канонична в точках пересечения $H \cap \Gamma$. Но $D|_H \sim_{\mathbb{Q}} -K_H$ и $\text{lct}(H) = 1/2$, так как H – поверхность дель Пеццо степени 6, противоречие.

ЛЕММА 8.5. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.5$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует бирациональный морфизм $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, стягивающий поверхность $E \subset X$ на кривую $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(5, 2)$. Пусть $\pi_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\pi_2: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественные проекции. Рассмотрим дивизор $Q \in |\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))|$ такой, что $C \subset Q$. Пусть H_1 – общий слой расслоения π_1 , а H_2 – дивизор из линейной системы $|\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))|$. Тогда $-K_X \sim 2\bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{Q}$, где $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{Q} \subset X$ – собственные прообразы дивизоров H_1, H_2, Q соответственно. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что многообразие X удовлетворяет следующему условию общности: любой слой F отображения $\pi_1 \circ \alpha$ имеет не более одной обыкновенной двойной особенности.

Допустим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Пусть $S \subset X$ – неприводимая поверхность. Положим $D = \mu S + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что S не содержится в $\text{Supp}(\Omega)$. Тогда лог-пара $(\bar{H}_1, (1/2)(\mu S + \Omega)|_{\bar{H}_1})$ лог-канонична (см. пример 1.10). Таким образом, либо $\mu \leq 2$, либо S является слоем отображения $\pi_1 \circ \alpha$.

Пусть $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ – общий слой расслоения на коники $\pi_2 \circ \alpha$. Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = \mu S \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma \geq \mu S \cdot \Gamma,$$

откуда следует неравенство $\mu \leq 2$ в случае, когда S является слоем отображения $\pi_1 \circ \alpha$.

Мы видим, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей. Применяя лемму 2.25 к отображению $\pi_1 \circ \alpha$, получаем противоречие с примером 4.4.

ЛЕММА 8.6. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.6$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутие прямой $L \subset \mathbb{P}^3$. Тогда

$$V \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$$

и V имеет естественную структуру $\mathbb{P}^2$ -расслоения $\eta: V \rightarrow \mathbb{P}^1$. Существует нормальная эллиптическая кривая $C \subset \mathbb{P}^3$ степени 4 такая, что $L \cap C = \emptyset$, и многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\gamma} & X & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^1 \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \beta & \nearrow \eta & \\ \mathbb{P}^3 & \xleftarrow{\delta} & V & & \end{array}$$

где δ – раздутие кривой C , β – раздутие собственного прообраза прямой L , γ – раздутие собственного прообраза кривой C , а φ – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 5.

Предположим, что X удовлетворяет следующему условию общности: любой слой F отображения φ имеет не более одной обыкновенной двойной особенности.

Пусть E и G – исключительные дивизоры раздутий β и γ соответственно; пусть $H \subset \mathbb{P}^3$ – общая плоскость, проходящая через прямую L , а $Q \subset \mathbb{P}^3$ – квадрика, проходящая через кривую C . Тогда $-K_X \sim 2\bar{H} + \bar{Q} + E$, где $\bar{H} \subset X \supset \bar{Q}$ – собственные прообразы поверхностей H и Q соответственно. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Из леммы 7.11 следует, что $\text{lct}(V) = 1/2$. Отсюда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq G$. Заметим, что любой слой расслоения φ – поверхность дель Пеццо степени 5, имеющая не более одной обыкновенной двойной особенности. Таким образом, применяя лемму 2.25 к отображению φ , получаем противоречие с примером 4.3.

ЛЕММА 8.7. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.7$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Тогда $-K_W \sim 2H$, где H – дивизор Картье на W . Многообразие X включается

в коммутативную диаграмму

где φ и ψ – естественные проекции, α – раздутие неособой кривой $C \subset W$ такой, что

$$C = H_1 \cap H_2,$$

где $H_1 \neq H_2$ – дивизоры из линейной системы $|H|$, отображение ρ задается пучком, порожденным H_1 и H_2 , ω – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 6, морфизмы ζ и ξ являются $\mathbb{P}^1$ -расслоениями, а бирациональные морфизмы β и γ стягивают поверхности $\bar{M}_1 \subset X \supset \bar{M}_2$ такие, что $\varphi \circ \beta(\bar{M}_1) = \xi(C)$ и $\psi \circ \gamma(\bar{M}_2) = \zeta(C)$.

Заметим, что $\text{lct}(X) \leq 1/2$, так как $-K_X \sim 2\bar{H}_1 + E$, где $\bar{H}_1 \subset X$ – собственный прообраз поверхности H_1 , а E – исключительный дивизор раздутия α .

Будем считать X настолько общим, что все особые слои расслоения ω удовлетворяют условиям леммы 4.5.

Допустим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(W) = 1/2$ по теореме 6.1. Применяя лемму 2.25, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap F$, где F – особый слой расслоения ω . Напомним, что F – поверхность дель Пеццо степени 6. Положим $D = \mu F + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $F \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда выполнено соотношение $\Omega|_F \sim_{\mathbb{Q}} -K_F$ и поверхность F неособа вдоль кривой $E \cap F$. При этом по теореме 2.19 лог-пара $(F, \lambda \Omega|_F)$ не лог-канонична в некоторой точке $P \in E \cap F$, что невозможно по лемме 4.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.8. В обозначениях и предположениях леммы 8.7 имеем

$$\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap F,$$

где F – особый слой расслоения ω . Применяя теорему 2.27 к отображениям φ и ψ и используя лемму 2.28, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap F \cap \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2$. Независимо от того, насколько особа поверхность F , если многообразие X достаточно общее, то $E \cap F \cap \bar{M}_1 \cap \bar{M}_2 = \emptyset$, т. е. утверждение леммы 8.7 может быть доказано и при другом условии общности.

ЛЕММА 8.9. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.8$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_1: \mathcal{F}_1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{F}_1$ и $\pi_2: \mathcal{F}_1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественные проекции. Тогда $X \in |(\alpha \circ \pi_1)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))|$, где $\alpha: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ –

такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/3$. Положим $D = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $E_1 \not\subseteq \text{Supp}(\Omega) \not\supseteq E_2$.

Пусть Γ – общий слой расслоения на коники $\gamma_1 \circ \beta_1$. Тогда

$$2 = \Gamma \cdot D = \Gamma \cdot (\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \Omega) = \mu_1 + \mu_2 + \Gamma \cdot \Omega \geq \mu_1 + \mu_2,$$

и без ограничения общности можно считать, что $\mu_1 \leq \mu_2$. Тогда $\mu_1 \leq 1$.

Допустим, что существует поверхность $S \in \mathbb{LCS}(X, \lambda D)$. Тогда $S \neq E_1$ и $S \neq G_1$, так как $\alpha_2 \circ \beta_2(G_1) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(4)|$ и $\alpha_2 \circ \beta_2(D) \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(5)|$. Следовательно, $S \cap E_1 \neq \emptyset$. Но

$$-\frac{1}{3} K_{E_1} \sim_{\mathbb{Q}} D|_{E_1} = -\frac{2\mu_1}{3} K_{E_1} + \Omega|_{E_1}$$

и $E_1 \cong \mathbb{P}^2$, что невозможно по теореме 2.19, так как $\lambda < 1/3 = \text{lct}(\mathbb{P}^2)$.

Таким образом, множество $\mathbb{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей. Выберем какую-нибудь точку $P \in \text{LCS}(X, \lambda D)$. Предположим, что $P \notin G_1$. Пусть Z – слой отображения γ_1 , проходящий через точку $\beta_1(P)$. Тогда $Z \subseteq \text{LCS}(U_1, \lambda \beta_1(D))$ по теореме 2.27. Положим $\bar{E}_1 = \beta_1(E_1)$. Тогда $Z \cap \bar{E}_1 \in \text{LCS}(\bar{E}_1, \lambda \Omega|_{\bar{E}_1})$ по теореме 2.19, что невозможно по лемме 2.8, так как $\mu_1 \leq 1$. Таким образом, $\text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq G_1$.

Допустим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq G_1 \cap G_2$. Тогда $|\text{LCS}(X, \lambda D)| = 1$ по лемме 2.14 и теореме 2.7. При этом

$$\text{LCS}(X, \lambda D) \cup \bar{H} \subseteq \text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{1}{3}(E_2 + E_2) + \bar{H}\right) \subset \text{LCS}(X, \lambda D) \cup \bar{H} \cup E_1 \cup E_1,$$

что противоречит теореме 2.7, так как $\bar{H}$ выбрана в линейной системе $|(\beta_1 \circ \gamma_1)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ общим образом и

$$\lambda D + \frac{1}{3}(E_2 + E_2) + \bar{H} \sim_{\mathbb{Q}} \left(\lambda - \frac{1}{3}\right) K_X.$$

Таким образом, $G_1 \supsetneq \mathbb{LCS}(X, \lambda D) \not\subseteq G_1 \cap G_2$. Поэтому

$$\emptyset \neq \text{LCS}(U_2, \lambda \beta_2(D)) \subsetneq \beta_2(G_1),$$

и из теорем 2.7 и 2.27 следует, что $\text{LCS}(U_2, \lambda \beta_2(D)) = L$ для некоторого слоя L расслоения γ_2 .

Пусть B – общий дивизор в линейной системе $|\alpha_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(2))|$. Тогда $\beta_2(D)|_B \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(5)$ и $B \cong \mathbb{P}^2$. При этом $\text{LCS}(B, \lambda \beta_2(D)|_B) = L \cap B$ и $|L \cap B| = 1$, что противоречит лемме 2.8.

ЛЕММА 8.11. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.10$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрака, а $C_1 \subset Q \supset C_2$ – непересекающиеся (неприводимые) коники. Тогда многообразие X включается

в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 \varphi_1 \swarrow & & & \searrow \varphi_2 & \\
 \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\psi_1} & Y_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & Q & \xleftarrow{\alpha_2} & Y_2 & \xrightarrow{\psi_2} & \mathbb{P}^1 \\
 & & \beta_2 \swarrow & & \searrow \beta_1 & & & &
 \end{array}$$

где α_i – раздутие коники C_i , морфизм β_i – раздутие собственного прообраза коники C_i , морфизм ψ_i является расслоением на квадрики, а морфизм φ_i – расслоением на поверхности дель Пеццо степени 6.

Пусть E_i – исключительный дивизор раздутия β_i , а H_i – достаточно общее гиперплоское сечение квадрики Q , проходящее через конику C_i . Тогда $-K_X \sim \bar{H}_1 + 2\bar{H}_2 + E_2$, где $\bar{H}_i \subset X$ – собственный прообраз дивизора H_i . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Используя пример 1.10 и применяя лемму 2.25, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq S_1 \cap S_2$, где S_i – особый слой расслоения φ_i . Следовательно, $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей.

Из теоремы 2.7 следует, что либо $\text{LCS}(X, \lambda D)$ является точкой на $E_1 \cup E_2$, либо

$$\text{LCS}(X, \lambda D) \cap (X \setminus (E_1 \cup E_2)) \neq \emptyset,$$

т. е. по лемме 2.10 можно считать, что $\text{LCS}(X, \lambda D)$ является точкой на E_1 .

Так как ограничение морфизма β_2 на $X \setminus E_2$ является изоморфизмом, то

$$P \in \text{LCS}(Y_1, \lambda \beta_2(D)) \subset P \cup \beta_2(E_2)$$

для некоторой точки $P \in E_1$. Следовательно, $\text{LCS}(Y_1, \lambda \beta_2(D)) = P$ по теореме 2.7, так как $P \notin \beta_2(E_2)$.

Пусть H – общее гиперплоское сечение квадрики Q . Тогда выполнены эквивалентности $-K_{Y_1} \sim \tilde{H}_1 + 2\tilde{H} \sim_{\mathbb{Q}} \beta_2(D)$, где $\tilde{H} \subset Y_1 \supset \tilde{H}_1$ – собственные прообразы поверхностей H и H_1 соответственно. При этом

$$\text{LCS}\left(Y_1, \lambda \beta_2(D) + \frac{1}{2}(\tilde{H}_1 + 2\tilde{H})\right) = P \cup \tilde{H},$$

что невозможно по теореме 2.7, так как $\lambda < 1/2$.

ЛЕММА 8.12. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.11$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O \in \mathbb{P}^3$ – некоторая точка, морфизм $\delta: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^3$ является раздутием точки O и E – исключительный дивизор раздутия δ . Тогда $V_7 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, на V_7 имеется естественная структура $\mathbb{P}^1$ -расслоения $\eta: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и E является сечением η . Существует нормальная эллиптическая

кривая $O \in C \subset \mathbb{P}^3$ степени 4 такая, что многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^3 & \xleftarrow{\delta} & V_7 \\
 & \searrow \alpha & & \nearrow \beta & \downarrow \eta \\
 & & X & & \mathbb{P}^2 \\
 \omega \swarrow & & \searrow \varphi & & \nearrow v \\
 \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\pi_2} &
 \end{array}$$

где π_1 и π_2 – естественные проекции, морфизм γ стягивает поверхность

$$C \times \mathbb{P}^1 \cong G \subset U$$

на кривую C , морфизм α – раздутие слоя морфизма γ над точкой $O \in \mathbb{P}^3$, морфизм β – раздутие собственного прообраза кривой C , морфизм ω – расслоение на квадратики, φ – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 7, а v стягивает поверхность

$$C \times \mathbb{P}^1 \cong F \subset X$$

на эллиптическую кривую $Z \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ такую, что $-K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2} \cdot Z = 13$ и $Z \cong C$.

Пусть H_1 – общий слой расслоения φ , а H_2 – общий дивизор в линейной системе $|(\eta \circ \beta)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$. Тогда $-K_X \sim H_1 + 2H_2$, откуда следует неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \bar{E}$, где $\bar{E}$ – исключительный дивизор раздутия α , так как $\text{lct}(U) = 1/2$ по лемме 7.11.

Пусть $\Gamma \cong \mathbb{P}^2$ – общий слой отображения $\pi_2 \circ v$. Тогда

$$2 = -K_X \cdot \Gamma = D \cdot \Gamma = 2\bar{E} \cdot \Gamma,$$

откуда следует, что $\bar{E} \not\subseteq \text{LCS}(X, \lambda D)$. По лемме 2.25, примененной к лог-паре $(V_7, \lambda \beta(D))$, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \bar{E} \cap G$. Применяя лемму 2.28 к лог-паре $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \lambda v(D))$, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = \bar{E} \cap F \cap G$, причем $|\bar{E} \cap F \cap G| = 1$. Следовательно,

$$\text{LCS}(X, \lambda D + H_2) = \text{LCS}(X, \lambda D) \cup H_2$$

и $H_2 \cap \text{LCS}(X, \lambda D) = \emptyset$. Но дивизор

$$-(K_X + \lambda D + H_2) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)K_X + \frac{1}{2}H_1$$

обилен, что невозможно по теореме 2.7.

ЛЕММА 8.13. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.12$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon: V \rightarrow \mathbb{P}^3$ – раздутие прямой $L \subset \mathbb{P}^3$. На V имеется естественная структура $\mathbb{P}^2$ -расслоения $\eta: V \rightarrow \mathbb{P}^1$. Можно выбрать

скрученную кубику $C \subset \mathbb{P}^3$, не пересекающую прямую L , такую, что многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где α и β – раздутья кривой C и ее собственного прообраза соответственно, γ – раздутье собственного прообраза прямой L , морфизм ψ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, ω – стягивание на кривую поверхности $F \subset X$ такой, что $C \cup L \subset \alpha \circ \gamma(F)$, и $\alpha \circ \gamma(F)$ состоит из секущих прямых к кривой $C \subset \mathbb{P}^3$, пересекающих прямую L ; морфизм φ – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 6, а морфизмы π_1 и π_2 – естественные проекции.

Пусть E и G – исключительные дивизоры раздутий β и γ соответственно, $Q \subset \mathbb{P}^3$ – общая квадрика, проходящая через кривую C , $H \subset \mathbb{P}^3$ – общая плоскость, проходящая через прямую L . Тогда выполнено соотношение $-K_X \sim \bar{Q} + 2\bar{H} + G$, где $\bar{Q} \subset X \supset \bar{H}$ – собственные прообразы дивизоров $Q \subset \mathbb{P}^3 \supset H$ соответственно. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subset G$, так как $\text{lct}(Y) = 1/2$ по лемме 7.13. Применяя теорему 2.27 к расслоению φ , получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subset G \cap S_{\varphi}$, где S_{φ} – особый слой расслоения φ (см. пример 1.10). Следовательно, $\text{LCS}(X, \lambda D) \subset G \cap S_{\varphi} \cap F$ по теореме 2.27, примененной к лог-паре $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \lambda \omega(D))$ и $\mathbb{P}^1$ -расслоению π_2 .

Пусть $Z_1 \cong \mathbb{P}^1$ – сечение естественной проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong G \rightarrow L \cong \mathbb{P}^1$ с самопересечением $Z_1 \cdot Z_1 = 0$, а Z_2 – слой этой проекции. Тогда $F|_G \sim Z_1 + 3Z_2$ и $S_{\varphi}|_G \sim Z_1$. При этом кривая $F \cap G$ неприводима. Таким образом, $|G \cap F \cap S_{\varphi}| < +\infty$, откуда по теореме 2.7 следует, что множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит из одной точки $P \in G$.

Лог-пара $(V, \lambda \beta(D))$ не лог-канонична. Так как ограничение морфизма β на множество $X \setminus E$ является изоморфизмом, то

$$\beta(P) \in \text{LCS}(V, \lambda \beta(D)) \subseteq \beta(P) \cup \beta(E),$$

откуда по теореме 2.7 следует, что $\text{LCS}(V, \lambda \beta(D)) = \beta(P)$. Пусть $H \subset \mathbb{P}^3$ – общая плоскость. Тогда

$$\text{LCS}\left(V, \lambda \beta(D) + \frac{1}{2}(\tilde{H}_1 + 3\tilde{H})\right) = \beta(P) \cup \tilde{H},$$

где $\tilde{H} \subset V \supset \tilde{H}_1$ – собственные прообразы дивизоров $H \subset \mathbb{P}^3 \supset H_1$ соответственно. При этом $-K_V \sim \tilde{H}_1 + 3\tilde{H} \sim_{\mathbb{Q}} \beta(D)$, что противоречит теореме 2.7, так как $\lambda < 1/2$.

Допустим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$. Тогда $\emptyset \neq \text{LCS}(V_7, \lambda \beta(D)) \subseteq \beta(E)$, что противоречит теореме 2.27, так как $\beta(E)$ является сечением расслоения π . Таким образом, $\text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq G$.

Применяя теорему 2.27 к лог-паре $(Z, \lambda \omega(D))$ и расслоению φ и теорему 2.7 к лог-паре $(X, \lambda D)$, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq F$, где F – некоторый слой естественной проекции $G \rightarrow \beta(G)$. Следовательно, $\emptyset \neq \text{LCS}(Y, \lambda \gamma(D)) \subseteq \gamma(F)$, где $\gamma(F)$ – слой раздутия ε над точкой кривой C .

Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ – общий конус над кривой C и $O \in C$ – точка перегиба такая, что $\varepsilon \circ \gamma(F) \neq O$. Пусть $L \subset S$ – образующая конуса S , проходящая через точку O , а $H \subset \mathbb{P}^3$ – плоскость, касающаяся конуса S вдоль прямой L . Так как O – точка перегиба кривой C , то $\text{mult}_L(S \cdot H) = 3$. Пусть $\check{S}$, $\check{H}$ и $\check{L}$ – собственные прообразы S , H и L на многообразии Y . Тогда

$$\text{LCS}\left(Y, \lambda \gamma(D) + \frac{2}{3}(\check{S} + \check{H})\right) = \text{LCS}(Y, \lambda \gamma(D)) \cup \check{L}$$

из-за общности в выборе конуса S . Но $-K_Y \sim \check{S} + \check{H}$, что невозможно по теореме 2.7.

ЛЕММА 8.15. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.15$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрика, $C \subset Q$ – (неособая) коника и $\varepsilon: V \rightarrow Q$ – раздутие коники $C \subset Q$. Имеется естественное отображение $\eta: V \rightarrow \mathbb{P}^1$, индуцированное проекцией $Q \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ из двумерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^4$, содержащего конику C . При этом общий слой отображения η является неособой квадрикой в $\mathbb{P}^3$.

Выберем прямую $L \subset Q$ такую, что $L \cap C = \emptyset$. Имеет место коммутативная диаграмма

где α и β – раздутия прямой $L \subset Q$ и ее собственного прообраза соответственно, γ – раздутие собственного прообраза коники C , морфизм ψ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, ω стягивает на кривую такую поверхность $F \subset X$, что $C \cup L \subset \alpha \circ \gamma(F) \subset Q$, поверхность $\alpha \circ \gamma(F)$ заматывается прямыми на $Q \subset \mathbb{P}^4$, пересекающимися L и C , морфизм φ – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 7, а морфизмы π_1 и π_2 – естественные проекции.

Пусть E_1 и E_2 – исключительные дивизоры раздутий β и γ соответственно; пусть $H_1, H_2 \subset Q$ – общие гиперплоские сечения, проходящие через кривые L и C соответственно. Тогда $-K_X \sim \bar{H}_1 + 2\bar{H}_2 + E_2 \sim \bar{H}_2 + 2\bar{H}_1 + E_1$, где $\bar{H}_1 \subset X \supset \bar{H}_2$ – собственные прообразы дивизоров $H_1 \subset Q \supset H_2$ соответственно. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Пусть $S \subset X$ – неприводимая поверхность. Положим $D = \mu S + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $S \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда по лемме 4.9

$$\text{LCS}\left(\bar{H}_2, \frac{1}{2}(\mu S + \Omega)|_{\bar{H}_2}\right) \subset E_1 \cap \bar{H}_2.$$

Таким образом, если $\mu \leq 2$, то либо $S = E_1$, либо S является слоем расслоения φ .

Пусть $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ – общий слой расслоения на коники $\psi \circ \gamma$. Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = \mu S \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma \geq \mu S \cdot \Gamma,$$

откуда следует, что $\mu \leq 2$, если $S = E_1$ или S является слоем расслоения φ .

Таким образом, множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей.

Применяя теорему 2.27 к лог-паре $(Y, \lambda \gamma(D))$ и расслоению ψ , мы сразу получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq E_2 \cup \bar{L}$, где $\mathbb{P}^1 \cong \bar{L} \subset X$ – кривая такая, что $\gamma(\bar{L})$ является слоем расслоения на коники ψ .

Допустим, что $\bar{L} \not\subset E_1$ и $\bar{L} \subset \text{LCS}(X, \lambda D)$. Тогда

$$\alpha \circ \gamma(\bar{L}) \subseteq \text{LCS}(Q, \lambda \alpha \circ \gamma(D)) \subseteq \alpha \circ \gamma(\bar{L}) \cup C \cup L,$$

что невозможно по лемме 2.10. Таким образом, по теореме 2.7 имеются лишь следующие возможности: либо $\text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq E_2$; либо $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \bar{L}$ и $\bar{L} \subset E_1$.

Можно считать, что $\bar{L} \subset E_1$. При этом $E_1 \cong \mathbb{F}_1$. Следовательно, $\bar{L} \cdot \bar{L} = -1$ на поверхности E_1 .

Применяя лемму 2.28 к лог-паре $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \lambda \omega(D))$, получаем, что

$$\text{LCS}(X, \lambda D) \subset F,$$

так как имеет место эквивалентность $\omega(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}$ и $\lambda < 1/2$. Применяя лемму 2.25 к лог-паре $(V, \lambda \beta(D))$ и расслоению η , получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq E_1 \cup S_{\varphi}$, где S_{φ} – особый слой расслоения φ , так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ (см. пример 1.10).

Заметим, что $F \cap \bar{L} = \emptyset$ и $|F \cap \bar{S}_{\varphi} \cap E_2| < +\infty$. Таким образом, найдется точка $P \in E_2$ такая, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = P \in E_2$ по теореме 2.7. При этом $\beta(E_1) \cap \beta(P) = \emptyset$. Следовательно, по теореме 2.7 имеем $\text{LCS}(V, \lambda \beta(D)) = \beta(P)$.

Пусть $\tilde{H}_1 \subset V \supset \tilde{H}_2$ – собственные прообразы дивизоров $H_1 \subset Q \supset H_2$ соответственно. Тогда $-K_V \sim \tilde{H}_2 + 2\tilde{H}_1 \sim_{\mathbb{Q}} \beta(D)$. Из-за общности в выборе H_1 и H_2 имеем

$$\text{LCS}\left(V, \lambda \beta(D) + \frac{1}{2}(\tilde{H}_2 + 2\tilde{H}_1)\right) = \beta(P) \cup \tilde{H}_1,$$

что невозможно по теореме 2.7, так как $\lambda < 1/2$.

ЛЕММА 8.16. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.16$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{P}^1 \cong C \subset \mathbb{P}^3$ – скрученная кубика, $O \in C$ – произвольная точка. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong U & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^3 & \xleftarrow{\delta} & V_7 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \\
 & \searrow \alpha & & \nearrow \beta & \downarrow \eta \\
 & & X & & \mathbb{P}^2 \\
 \omega \searrow & & \searrow v & & \nearrow \pi_2 \\
 & & \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{\pi_1} & W
 \end{array}$$

где $\mathcal{E}$ – стабильное векторное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ (см. доказательство леммы 7.13). В диаграмме использованы следующие обозначения: δ – раздутие точки O ; морфизм γ стягивает дивизор $G \subset U$ на кривую $C \subset \mathbb{P}^3$; морфизм α стягивает дивизор $E \cong \mathbb{F}_1$ на слой отображения γ над точкой $O \in \mathbb{P}^3$; морфизм β – раздутие собственного прообраза кривой C ; многообразие W – неособый дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$; морфизмы π_1 и π_2 – естественные проекции; морфизмы ω и η – естественные $\mathbb{P}^1$ -расслоения; морфизм v стягивает дивизор $F \subset X$ на кривую $\mathbb{P}^1 \cong Z \subset W$ такую, что $\omega \circ \alpha(E) = \pi_1(Z)$ и $\eta \circ \beta(G) = \pi_2(Z)$.

Выберем общие дивизоры $H_1 \in |(\omega \circ \alpha)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ и $H_2 \in |(\eta \circ \beta)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$. Тогда $-K_X \sim H_1 + 2H_2$, откуда следует, что $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap F$, так как $\text{lct}(U) = 1/2$ по лемме 7.11 и $\text{lct}(W) = 1/2$ по теореме 6.1.

Применяя лемму 2.12 к лог-паре $(V_7, \lambda \beta(D))$, получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = E \cap F \cap G$, причем $|E \cap F \cap G| = 1$. Таким образом,

$$\text{LCS}(X, \lambda D + H_2) = \text{LCS}(X, \lambda D) \cup H_2,$$

где $H_2 \cap \text{LCS}(X, \lambda D) = \emptyset$. Но дивизор

$$-(K_X + \lambda D + H_2) \sim_{\mathbb{Q}} \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) K_X + \frac{1}{2} H_1$$

обилен, что невозможно по теореме 2.7.

ЛЕММА 8.17. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.17$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X является дивизором тристепени $(1, 1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Выберем общие дивизоры $H_1 \in |\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))|$, $H_2 \in |\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))|$, $H_3 \in |\pi_3^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, где π_i – проекция многообразия X на i -й сомножитель в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$. Тогда $-K_X \sim H_1 + H_2 + 2H_3$, откуда следует $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{v_1} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{v_2} & \mathbb{P}^1 \\
 & \searrow \pi_1 & \uparrow \zeta & \swarrow \pi_2 & \\
 & & X & & \\
 & \swarrow \alpha_1 & \downarrow \pi_3 & \searrow \alpha_2 & \\
 \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\omega_1} & \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{\omega_2} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2
 \end{array}$$

$\eta_1 \uparrow$ $\eta_2 \uparrow$

где ω_i , η_i и v_i – естественные проекции, ζ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, а α_i – стягивание дивизора $E_i \subset X$ на неособую кривую $C_i \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, причем $\omega_1(C_1) = \omega_2(C_2)$ – (неприводимая) коника.

Заметим, что $E_2 \sim H_1 + H_3 - H_2$ и $E_1 \sim H_2 + H_3 - H_1$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Предположим, что множество $\mathbb{LCS}(X, \lambda D)$ содержит (неприводимую) поверхность $S \subset X$. Пусть $D = \mu S + \Omega$, где $\mu \geq 1/\lambda$ и Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $S \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$2 = D \cdot \Gamma = \mu S \cdot \Gamma + \Omega \cdot \Gamma \geq \mu S \cdot \Gamma,$$

где $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ – общий слой расслоения ζ . Таким образом, $S \cdot \Gamma = 0$, откуда следует $E_2 \neq S \neq E_1$. Кроме того,

$$2 = D \cdot \Delta = \mu S \cdot \Delta + \Omega \cdot \Delta \geq \mu S \cdot \Delta,$$

где $\Delta \cong \mathbb{P}^1$ – общий слой расслоения π_2 . Таким образом, $S \cdot \Delta = 0$, откуда сразу следует, что $S \in |\pi_3^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m))|$ при некотором $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, так как $E_2 \neq S \neq E_1$ и S неприводима. В частности, $0 = S \cdot \Gamma = m \neq 0$, противоречие. Следовательно, множество $\mathbb{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей.

Применяя теорему 2.27 к расслоению ζ и используя теорему 2.7, мы сразу видим, что $\mathbb{LCS}(X, \lambda D) = F$, где F – некоторый слой $\mathbb{P}^1$ -расслоения ζ . Применяя теорему 2.27 к расслоению на коники π_3 , получаем, что всякий слой расслоения π_3 , пересекающий F , должен быть приводим. Следовательно,

$$\pi_3(F) \subset \omega_1(C_1) = \omega_2(C_2),$$

что невозможно, так как $\pi_3(F)$ – прямая, а $\omega_1(C_1) = \omega_2(C_2)$ – неприводимая коника.

ЛЕММА 8.18. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.18$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрака, $C \subset Q$ – (неприводимая) коника, $O \in C$ – точка на ней. Тогда X включается в коммутативную

диаграмму

где ζ – раздутие точки O , морфизмы α и γ – раздутия коники C и ее собственного прообраза соответственно, β – раздутие слоя морфизма α над точкой O , отображение ψ – проекция из точки O , отображение φ индуцировано проекцией из двумерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^4$, содержащего конику C , морфизм τ – раздутие прямой $\psi(C)$, морфизм v – раздутие (неприводимой) коники $Z \subset \mathbb{P}^3$ такой, что $\psi(C) \cap Z \neq \emptyset$, и Z и $\psi(C)$ не содержатся в одной плоскости, морфизм σ – раздутие собственного прообраза коники Z , отображение ξ – проекция из прямой $\psi(C)$, морфизм η является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, а ω – расслоение на квадрики.

Пусть $\bar{H}$ – общий слой отображения $\omega \circ \beta$. Тогда $\bar{H}$ является поверхностью дель Пеццо степени $K_{\bar{H}}^2 = 7$ и $-K_X \sim 3\bar{H} + 2E + G$, где G и E – исключительные дивизоры раздутий β и γ соответственно. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/3$. При этом $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq G$, так как $\text{lct}(V) = 1/3$ по лемме 7.15 и $\beta(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_V$.

Применяя лемму 2.25 к расслоению на поверхности дель Пеццо $\omega \circ \beta$, с учетом теоремы 2.7 получаем, что существует такой особый слой S расслоения $\omega \circ \beta$, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq G \cap S$, так как выполнено равенство $\text{lct}(\bar{H}) = 1/3$ (см. пример 1.10).

Пусть $P \in G \cap S$ – произвольная точка множества $\text{LCS}(X, \lambda D)$. Положим $D = \mu S + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $S \not\subseteq \text{Supp}(\Omega)$. Тогда $P \in \text{LCS}(S, \lambda \Omega|_S)$ по теореме 2.19.

Отождествим поверхность $\beta(S)$ с квадратичным конусом в $\mathbb{P}^3$. Заметим, что $G \cap S$ – исключительная кривая на S , т. е. существует единственная образующая конуса $\beta(S)$, пересекающая кривую $\beta(G)$. Пусть $L \subset S$ – собственный прообраз этой образующей. Тогда $L \cap G \neq \emptyset$ (более того, $|L \cap G| = 1$), в то время как $L \cap E = \emptyset$. Следовательно, $P = L \cap G$ по лемме 4.10. В частности, $\text{LCS}(X, \lambda D) = P$. Следовательно,

$$\bar{H} \cup P \subseteq \text{LCS}\left(X, \lambda D + \bar{H} + \frac{2}{3}E\right) \subseteq \bar{H} \cup P \cup E,$$

так как $\bar{H}$ – достаточно общий слой расслоения $\omega \circ \beta$. Следовательно, множество лог-канонических особенностей $\text{LCS}(X, \lambda D + \bar{H} + \frac{2}{3}E)$ должно быть

несвязным, так как $P \notin \bar{H}$ и $P \notin E$. Но дивизор

$$-\left(K_X + \lambda D + \bar{H} + \frac{2}{3}E\right) \sim_{\mathbb{Q}} \bar{H} + \frac{2}{3}(E + G) + \left(\lambda - \frac{1}{3}\right)K_X$$

обилен, что невозможно по теореме 2.7.

Из доказательства леммы 8.18 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 8.19. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.4$ или $\mathfrak{I}(X) = 5.1$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ЛЕММА 8.20. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.19$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрака, а $L \subset \mathbb{P}^4$ – такая прямая, что $L \cap Q = P_1 \cup P_2$, где P_1 и P_2 – различные точки. Пусть $\eta: Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – проекция из прямой L . Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где α_i – раздутие точки P_i , морфизм β_i стягивает поверхность $\mathbb{P}^2 \cong E_i \subset X$ в точку, лежащую над точкой $P_i \in Q$, отображение ξ_i – проекция из точки P_i , отображение ζ_i – проекция из образа точки P_i , морфизм δ_i стягивает поверхность $\mathbb{F}_2 \cong G_i \subset U_i$ на конику $C_i \subset \mathbb{P}^3$, морфизм π_i является раздутием образа точки P_i , морфизм γ_i стягивает собственный прообраз дивизора G_i на собственный прообраз кривой C_i , а ω_i – естественная проекция.

Отображение $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ является элементарным преобразованием расслоения на коники (см. [57]), и поверхности $\delta_1 \circ \beta_2(E_1) \subset \mathbb{P}^3 \supset \delta_2 \circ \beta_1(E_2)$ являются плоскостями, содержащими коники C_1 и C_2 соответственно.

Пусть H – общее гиперплоское сечение квадраки Q такое, что $P_1 \in H \ni P_2$. Тогда $-K_X \sim 3\bar{H} + E_1 + E_2$, где $\bar{H}$ – собственный прообраз дивизора H на многообразии X . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/3$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E_1 \cup E_2$, так как $\text{lct}(Q) = 1/3$. По теореме 2.7 можно предполагать, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E_1$.

Пусть $\bar{G}_2 \subset X$ – собственный прообраз дивизора G_2 . Тогда $\bar{G}_2 \cap E_1 = \emptyset$, так как $\alpha_2(G_2) \subset Q$ – квадратичный конус с вершиной в точке P_2 , а прямая L не содержится в Q . Следовательно,

$$\emptyset \neq \text{LCS}(\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)), \lambda \gamma_2(D)) \subseteq \gamma_2(E_1),$$

где $\gamma_2(E_1)$ является сечением расслоения ω_1 . Применяя теорему 2.27 к расслоению ω_1 , приходим к противоречию.

ЛЕММА 8.21. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.20$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрика, а W является неособым дивизором бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Пусть $L_1 \subset Q \supset L_2$ – непересекающиеся прямые. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где α_i и β_i – раздутья прямых L_i и их собственных прообразов соответственно, ω – раздутье кривой $C \subset W$ бистепени $(1, 1)$, морфизмы v_i и π_i являются естественными $\mathbb{P}^1$ -расслоениями, а отображение ψ_i – проекция из прямой L_i .

Пусть $\bar{H}$ – исключительный дивизор раздутья ω , а E_i – исключительный дивизор раздутья β_i . Тогда $-K_X \sim 3\bar{H} + 2E_1 + 2E_2$, так как $\alpha_2 \circ \beta_1(\bar{H}) \subset Q$ – гиперплоское сечение, содержащее прямые L_1 и L_2 . В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/3$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E_1 \cap E_2 \cap \bar{H} = \emptyset$, так как $\text{lct}(V_1) = \text{lct}(V_2) = 1/3$ по лемме 7.17 и $\text{lct}(W) = 1/2$ по теореме 6.1, противоречие.

ЛЕММА 8.22. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 3.21$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\pi_2: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественные проекции. Существует стягивание $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ поверхности E на кривую C такую, что $\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cdot C = 2$ и $\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \cdot C = 1$.

Кривая $\pi_2(C) \subset \mathbb{P}^2$ – прямая. Таким образом, существует единственная поверхность $H_2 \in |\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ такая, что $C \subset H_2$. Пусть H_1 – слой $\mathbb{P}^2$ -расслоения π_1 . Тогда $-K_X \sim 2\bar{H}_1 + 3\bar{H}_2 + 2E$, где $\bar{H}_i \subset X$ собственный прообраз поверхности H_i . Имеем $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/3$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) = 1/3$ по лемме 2.21. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где V – многообразие Фано индекса 2 с одной обыкновенной двойной точкой $O \in V$ такое, что $-K_V^3 = 40$, бирациональный морфизм β_i – стягивание поверхности $\bar{H}_2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на неособую рациональную кривую, δ_i – стягивание кривой $\beta_i(\bar{H}_2)$ в точку $O \in V$, причем рациональное отображение $\delta_2 \circ \delta_1^{-1}: U_1 \dashrightarrow U_2$ является стандартным флопом в кривой $\beta_1(\bar{H}_2) \cong \mathbb{P}^1$, морфизм ω_1 – расслоение с общим слоем $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, морфизм ω_2 является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, а γ – стягивает поверхность $\gamma(\bar{H}_2)$ в точку $O \in V$.

Многообразие V является сечением грассманиана $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ линейным подпространством коразмерности 3. При этом $-K_V \sim 2(\gamma(\bar{H}_1) + \gamma(E))$ и дивизор $\gamma(\bar{H}_1) + \gamma(E)$ очень обилен. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\gamma} & V & \xrightarrow{\zeta} & \mathbb{P}^6 \\ \alpha \downarrow & & & & \downarrow \xi \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\eta} & & & \mathbb{P}^5 \end{array}$$

где вложение ζ задается линейной системой $|\gamma(\bar{H}_1) + \gamma(E)|$, отображение ξ – проекция из точки O , а вложение η задается линейной системой $|H_1 + H_2|$.

Из [60; теорема 3.6] следует (см. также [59; теорема 3.13]), что $U_2 \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – стабильное векторное расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$ такое, что последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \rightarrow 0$$

точна, $\mathcal{I}$ – пучок идеалов пары общих точек на $\mathbb{P}^2$. При этом $c_1(\mathcal{E}) = -1$ и $c_2(\mathcal{E}) = 2$. Из [60; теорема 3.5] следует, что

$$U_1 \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$$

и $U_1 \in |2T - F|$, где T – тавтологическое линейное расслоение на многообразии $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$, а F – слой проекции $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Заметим, что так как $H_1 \cdot C = 2$, то либо $\bar{H}_1$ является неособой поверхностью дель Пеццо степени $K_{\bar{H}_1}^2 = 7$, либо $|H_1 \cap C| = 1$. Применяя лемму 2.25 к морфизму $\omega_1 \circ \beta_1$ и поверхности $\bar{H}_1$, мы видим, что либо $|H_1 \cap C| = 1$, либо $H_1 \cap \text{LCS}(X, \lambda D) = \emptyset$, так как $\text{lct}(\bar{H}_1) = 1/3$ в случае, если поверхность $\bar{H}_1$ неособа. Таким образом, существует слой L проекции $E \rightarrow C$ такой, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq L$ по теореме 2.7. Положим $\bar{C} = \bar{H}_2 \cap E$ и $P = L \cap \bar{C}$. Применяя теорему 2.27 к расслоению ω_2 и лог-паре $(U_2, \lambda\beta_2(D))$, по теореме 2.7 получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = P$ или $\text{LCS}(X, \lambda D) = L$.

Допустим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = L$. Тогда

$$\text{LCS}(V, \lambda\gamma(D)) = \gamma(L),$$

где $\gamma(L) \subset V \subset \mathbb{P}^6$ – прямая, так как $-K_V \cdot \gamma(L) = 2$ и $-K_V \sim_{\mathbb{Q}} \gamma(D)$. Кроме того, $\text{Sing}(V) = O \in \gamma(L)$.

Пусть $S \subset V$ – общее гиперплоское сечение $V \subset \mathbb{P}^6$ такое, что $\gamma(L) \subset S$. Тогда поверхность S является поверхностью дель Пеццо степени $K_S^2 = 5$, точка O является обыкновенной двойной особенностью поверхности S , поверхность S

неособа вне точки $O \in \gamma(L)$, выполнено соотношение $K_S \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)|_S$, откуда следует, что на поверхности S лежит конечное число прямых, пересекающих прямую $\gamma(L)$.

Пусть $H \subset V$ – общее гиперплоское сечение $V \subset \mathbb{P}^6$. Положим $Q = \gamma(L) \cap H$. Тогда $\text{LCS}(H, \lambda\gamma(D)|_H) = Q$ по замечанию 2.3, что противоречит лемме 4.2, так как $\lambda < 1/3$.

Таким образом, $\text{LCS}(X, \lambda D) = P \in \bar{C}$. Пусть F_1 – общий слой отображения π_1 . Тогда

$$F_1 \cap C = P_1 \cup P_2 \not\subset \alpha(P),$$

где P_1 и P_2 – различные точки. При этом $P_1 \cup P_2 \subset H_2 \cap F_1$, так как $C \subset H_2$. Пусть Z – общая прямая на $F_1 \cong \mathbb{P}^2$, проходящая через точку P_1 . Тогда существует дивизор $F_2 \in |\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ такой, что $Z \subset F_2$. Пусть $\bar{F}_1 \subset X \supset \bar{F}_2$ – собственные прообразы дивизоров F_1 и F_2 соответственно. Тогда $P \notin \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2$.

Пусть $\bar{Z} \subset X$ – собственный прообраз кривой Z . Тогда $-K_X \cdot \bar{Z} = 2$ и $\bar{Z} \subset \bar{F}_1 \cap \bar{F}_2$, причем $\bar{Z} \cap \bar{H}_2 = \emptyset$. Таким образом, кривая $\gamma(\bar{Z})$ является прямой на $V \subset \mathbb{P}^6$ такой, что $\text{Sing}(V) = O \notin \gamma(\bar{Z})$.

Пусть T – общее гиперплоское сечение многообразия $V \subset \mathbb{P}^6$ такое, что $\gamma(\bar{Z}) \subset T$. Тогда

$$\bar{T} \sim 2\bar{H}_2 + \bar{H}_1 + E \sim 2\bar{H}_2 + \bar{F}_1 + E \sim 2\bar{F}_2 + \bar{F}_1 - E,$$

где $\bar{T}$ – собственный прообраз поверхности T на многообразии X . Таким образом,

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{T} \sim 3\bar{F}_2 + 2\bar{F}_1 - E \sim 2\bar{H}_2 + 2\bar{H}_1 + 2E \sim -K_X,$$

и, применяя теорему 2.7, мы видим, что множество

$$P \cup \bar{Z} = \text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{2}{3}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{T})\right)$$

должно быть связным. Однако $P \notin \bar{Z}$, противоречие.

ЛЕММА 8.23. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.22$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi_1: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $\pi_2: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественные проекции. Существует стягивание $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ поверхности E на кривую C , содержащуюся в слое H_1 проекции π_1 , такую, что кривая $\pi_2(C)$ является коникой на $\mathbb{P}^2$.

Заметим, что $E \cong \mathbb{F}_2$. Пусть H_2 – общая поверхность в линейной системе $|\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$. Тогда $-K_X \sim 2\bar{H}_1 + 3\bar{H}_2 + E$, где $\bar{H}_i \subset X$ – собственный прообраз дивизора H_i . Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/3$. При этом $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) = 1/3$ по лемме 2.21.

Пусть Q – (единственный) дивизор в линейной системе $|\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))|$, содержащий кривую C , а $\bar{Q} \subset X$ – собственный прообраз дивизора Q . Тогда

$\bar{Q} \cap \bar{H}_1 = \emptyset$ и многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}_2 \dashleftarrow \psi \dashrightarrow \mathbb{P}(1, 1, 1, 2) \end{array}$$

где β – стягивание поверхности $\bar{Q}$ на кривую, γ – стягивание поверхности $\beta(\bar{H}_1)$ в точку, морфизм φ – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение, а отображение ψ – естественная проекция. При этом

$$\gamma \circ \beta(D) \sim_{\mathbb{Q}} \frac{5\gamma \circ \beta(E)}{2} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}(1,1,1,2)} \sim_{\mathbb{Q}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(5),$$

откуда следует, что $E \not\subseteq \text{LCS}(X, \lambda D)$, так как $\lambda < 1/3$.

Применяя теорему 2.27 к расслоению φ , получаем, что существует слой F проекции $E \rightarrow C$ такой, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq (E \cap \bar{Q}) \cup F$, при этом, возможно, $\text{LCS}(X, \lambda D) \subset E \cap \bar{Q}$.

Допустим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subset E \cap \bar{Q}$. Пусть $M \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ – общий дивизор в линейной системе $|H_1 + H_2|$, а $\bar{M} \subset X$ – собственный прообраз дивизора M . Тогда $\bar{M} \cap \bar{H}_1 = L$, где L – прямая на $\bar{H}_1 \cong \mathbb{P}^2$. Пусть R – (единственный) дивизор в линейной системе $|\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, проходящий через кривую $\alpha(L)$, а $\bar{R}$ – собственный прообраз дивизора R на многообразии X . Тогда

$$\text{LCS}(X, \lambda D) \cup L \subseteq \text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{2}{3}(\bar{M} + \bar{H}_1 + \bar{R} + \bar{H}_2)\right) \subseteq \text{LCS}(X, \lambda D) \cup L \cup \bar{H}_1,$$

но $L \cap E \cap \bar{Q} = \bar{Q} \cap \bar{H}_1 = \emptyset$ и $-K_X \sim \bar{M} + \bar{H}_1 + \bar{R} + \bar{H}_2$, что противоречит теореме 2.7.

Таким образом, $F \subseteq \text{LCS}(X, \lambda D)$. Положим $\check{F} = \gamma \circ \beta(F)$ и $\check{D} = \gamma \circ \beta(D)$. Тогда

$$\check{F} \subseteq \text{LCS}(\mathbb{P}(1, 1, 1, 2), \lambda \check{D}) \subseteq \check{C} \cup \check{F},$$

где $\check{C} = \gamma \circ \beta(\bar{Q}) \subset \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ – кривая такая, что $\psi(\check{C}) = \pi_2(C)$.

Пусть S – общий дивизор в линейной системе $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,1,1,2)}(2)|$. Тогда $S \cong \mathbb{P}^2$ и

$$\check{F} \cap S \subseteq \text{LCS}(S, \lambda \check{D}|_S) \subseteq (\check{C} \cup \check{F}) \cap S;$$

но $3D|_S \sim_{\mathbb{Q}} -5K_S$, что невозможно по лемме 2.8.

ЛЕММА 8.24. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.23$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O \in \mathbb{P}^3$ – точка, $C \subset \mathbb{P}^3$ – коника, проходящая через точку $O \in C$; пусть $\Pi \subset \mathbb{P}^3$ – (единственная) плоскость, содержащая

коникю C , а $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадра. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

В диаграмме использованы следующие обозначения: морфизм α – раздутие точки O с исключительным дивизором E ; морфизм π – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение; морфизмы β и δ – раздутия коники C и ее собственного прообраза соответственно; морфизм γ стягивает собственный прообраз плоскости Π в точку; морфизм φ стягивает собственный прообраз плоскости Π на кривую; морфизм η стягивает собственный прообраз дивизора E на такую кривую $L \subset Y$, что $\gamma(\Pi) \in \gamma(L) \subset Q \subset \mathbb{P}^4$ и $\gamma(L)$ – прямая в $\mathbb{P}^4$; морфизм ω – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение; морфизм v – раздутие прямой $\gamma(L)$; отображения ψ , ξ и ζ являются проекциями из O , $\gamma(\Pi)$ и $\gamma(L)$ соответственно. Заметим, что поверхность E является сечением расслоения π .

Пусть $\bar{\Pi} \subset X$ – собственный прообраз плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}^3$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 1/4$, так как выполнено соотношение $-K_X \sim 4\bar{\Pi} + 2\bar{E} + 3G$, где $\bar{E}$ и G – исключительные дивизоры стягиваний η и δ соответственно.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/4$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/4$. Заметим, что

$$\emptyset \neq \text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \bar{E} \cap \bar{\Pi} \cap G,$$

так как $\text{lct}(V_7) = 1/4$ по теореме 6.1, $\text{lct}(Y) = 1/4$ по лемме 7.16 и $\text{lct}(U) = 1/3$ по лемме 7.17.

Пусть $R \subset \mathbb{P}^3$ – общий конус над коникой C с вершиной $P \in \mathbb{P}^3$, пусть $H_1 \subset \mathbb{P}^3$ – общая плоскость, проходящая через точки O и P , и пусть $H_2 \subset \mathbb{P}^3$ – общая плоскость, проходящая через точку P . Тогда

$$\bar{R} \sim (\alpha \circ \delta)^*(R) - \bar{E} - G, \quad \bar{H}_1 \sim (\alpha \circ \delta)^*(H_1) - \bar{E}, \quad \bar{H}_2 \sim (\alpha \circ \delta)^*(H_2),$$

где $\bar{R}$, $\bar{H}_1$, $\bar{H}_2$ – собственные прообразы поверхностей R , H_1 , H_2 на многообразии X соответственно. При этом $-K_X \sim \bar{Q} + \bar{H}_1 + \bar{H}_2$, и из общности в выборе R , H_1 и H_2 следует, что множество

$$\text{LCS}\left(X, \lambda D + \frac{3}{4}(\bar{Q} + \bar{H}_1 + \bar{H}_2)\right) = \text{LCS}(X, \lambda D) \cup P$$

несвязно, что невозможно по теореме 2.7.

ЛЕММА 8.25. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 3.24$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Многообразию X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{\alpha} & W \\ & \nearrow \zeta & \downarrow \pi & & \downarrow \omega_1 \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\xi} & \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где ω_1 – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение, α стягивает поверхность $E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на слой L расслоения ω_1 , морфизм γ – раздутие точки $\omega_1(L)$, морфизм ξ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, а морфизм ζ является $\mathbb{F}_1$ -расслоением.

Пусть $\omega_2: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение, отличное от ω_1 . Тогда найдется дивизор $G \in |\omega_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ такой, что $L \subset G$, так как $\omega_2(L)$ – прямая на $\mathbb{P}^2$. Пусть $\bar{G} \subset X$ – собственный прообраз дивизора G . Тогда выполнена эквивалентность $-K_X \sim 2F + 2\bar{G} + 3E$, где E – исключительный дивизор раздутия α , а F – слой расслоения ζ . Отсюда следует неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/3$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(W) = 1/2$ по теореме 6.1. Можно считать, что $F \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$. Тогда

$$\mathbb{F}_1 \cong F \subseteq \text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

по лемме 2.25, так как $\text{lct}(F) = 1/3$ (см. пример 1.10), противоречие.

9. Многообразия с числом Пикара $\rho \geq 4$

На протяжении этого раздела мы будем пользоваться предположениями и обозначениями, введенными в разделе 1.

ЛЕММА 9.1. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.1$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X является дивизором мультистепени $(1, 1, 1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Выберем координаты $[(x_1 : y_1), (x_2 : y_2), (x_3 : y_3), (x_4 : y_4)]$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда X задается уравнением $F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = 0$, где F – форма мультистепени $(1, 1, 1, 1)$. Пусть $\pi_1: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – проекция, заданная как

$$[(x_1 : y_1), (x_2 : y_2), (x_3 : y_3), (x_4 : y_4)] \mapsto [(x_2 : y_2), (x_3 : y_3), (x_4 : y_4)] \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

а π_2, π_3 и $\pi_4: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – проекции, определяемые аналогичным образом. Положим

$$F = x_1 G(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) + y_1 H(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4),$$

где $G(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$ и $H(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)$ – мультилинейные формы, не зависящие от x_1 и y_1 . Тогда π_1 является раздутием кривой $C_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, заданной уравнениями

$$G(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = H(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = 0,$$

которые также определяют поверхность $E_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, стягиваемую

отображением π_1 . Уравнения $x_1 = H(x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4) = 0$ определяют дивизор $H_1 \subset X$ такой, что $-K_X \sim 2H_1 + E_1$, откуда следует, что $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 1/2$.

Определим дивизоры E_2, E_3 и E_4 на X аналогично дивизору E_1 . Тогда

$$\emptyset \neq \text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4,$$

так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ по лемме 2.21. Но $E_i \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ задается уравнениями

$$\frac{\partial F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)}{\partial y_i} = 0,$$

т. е. пересечение $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$ задается уравнениями

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial F}{\partial x_3} = \frac{\partial F}{\partial y_3} = \frac{\partial F}{\partial x_4} = \frac{\partial F}{\partial y_4} = 0.$$

Следовательно, $E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4 = \text{Sing}(X) = \emptyset$ и $\text{LCS}(X, \lambda D) = \emptyset$.

ЛЕММА 9.2. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.2$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q_1 \subset \mathbb{P}^4 \supset Q_2$ – квадратичные конусы с вершинами $O_1 \in \mathbb{P}^4 \ni O_2$ соответственно. Выберем гиперплоское сечение $O_1 \notin S_1 \subset Q_1 \subset \mathbb{P}^4$ конуса Q_1 . Тогда существует такая неособая эллиптическая кривая $C_1 \subset |-K_{S_1}|$, что многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где $\pi_1 \neq \pi_2$ – естественные проекции, отображение ψ_i – проекция из точки $O_i \in Q_i \subset \mathbb{P}^4$, морфизм α_i – раздутие вершины O_i конуса Q_i , морфизм β_i стягивает поверхность

$$\mathbb{P}^1 \times C_1 \cong G_i \subset X$$

на кривую $C_1 \cong C_i \subset U_i$, морфизм η_i является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, морфизм γ_i является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, а морфизм ζ_i – расслоением на поверхности дель Пеццо степени 6 с четырьмя особыми слоями.

Пусть $E_i \subset X$ – собственный прообраз исключительного дивизора раздутия α_i . Тогда поверхности

$$S_1 = \alpha_1 \circ \beta_1(E_2) \subset Q_1 \subset \mathbb{P}^4 \supset Q_2 \supset \alpha_2 \circ \beta_2(E_1)$$

являются гиперплоскими сечениями Q_1 и Q_2 , содержащими кривые C_1 и C_2 соответственно. Также нетрудно видеть, что поверхности $\alpha_1 \circ \beta_1(G_2)$ и $\alpha_2 \circ \beta_2(G_1)$ являются конусами в $\mathbb{P}^4$ над кривыми C_1 и C_2 соответственно.

Пусть $\bar{H} \subset X$ – собственный прообраз гиперплоского сечения конуса $Q_1 \subset \mathbb{P}^4$, проходящего через O_1 . Тогда $-K_X \sim 2\bar{H} + E_2 + E_1$, откуда следует неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Положим $D = \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $E_1 \not\subseteq \text{Supp}(\Omega) \not\supseteq E_2$.

Пусть Γ – общий слой расслоения на коники $\gamma_1 \circ \beta_1$. Тогда

$$2 = \Gamma \cdot D = \Gamma \cdot (\mu_1 E_1 + \mu_2 E_2 + \Omega) = \mu_1 + \mu_2 + \Gamma \cdot \Omega \geq \mu_1 + \mu_2,$$

и без ограничения общности можно считать, что $\mu_1 \leq \mu_2$. В этом случае $\mu_1 \leq 1$.

Допустим, что существует поверхность $S \in \mathbb{LCS}(X, \lambda D)$. Тогда $S \neq E_1$. Более того, $S \neq G_1$, так как $\alpha_2 \circ \beta_2(G_1)$ является квадратичной поверхностью, и при этом $\lambda < 1/2$. Следовательно, $S \cap E_1 \neq \emptyset$. Но $-(1/2)K_{E_1} \sim_{\mathbb{Q}} D|_{E_1}$ и $E_1 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, что невозможно по теореме 2.19 и лемме 2.23. Таким образом, множество $\mathbb{LCS}(X, \lambda D)$ не содержит поверхностей.

Выберем точку $P \in \text{LCS}(X, \lambda D)$. Предположим, что $P \notin G_1$. Пусть Z – слой отображения γ_1 такой, что $\beta_1(P) \in Z$. Тогда $Z \subseteq \text{LCS}(U_1, \lambda \beta_1(D))$ по теореме 2.27. Положим $\bar{E}_1 = \beta_1(E_1)$. Тогда $Z \cap \bar{E}_1 \in \text{LCS}(\bar{E}_1, \lambda \Omega|_{\bar{E}_1})$ по теореме 2.19, что противоречит лемме 2.23, так как $\mu_1 \leq 1$.

Таким образом, $P \in G_1$. Пусть $F_1 \subset X \supset F_2$ – слои отображений ζ_1 и ζ_2 , проходящие через точку P . Тогда либо поверхность F_1 , либо поверхность F_2 должна быть неособой, так как $\alpha_1(P) \in C_1$. Но $\text{lct}(F_i) = 1/2$ в случае, если поверхность F_i неособа (см. пример 1.10), что противоречит лемме 2.25.

ЛЕММА 9.3. Пусть $\mathfrak{J}(X) = 4.3$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_1 \cong F_2 \cong F_3 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – слои трех различных проекций $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Существует стягивание $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ поверхности $E \subset X$ на кривую $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такую, что $C \cdot F_1 = C \cdot F_2 = 1$ и $C \cdot F_3 = 2$. Существует неособая поверхность $G \in |F_1 + F_2|$, содержащая кривую C . В частности, выполнено соотношение $-K_X \sim 2\bar{G} + E + \bar{F}_3$, где $\bar{F}_3$ и $\bar{G}$ – собственные прообразы дивизоров F_3 и G соответственно. Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$.

Пусть $H \in |3F_1 + F_3|$ – неособый дивизор, для которого $C = G \cap H$, а $\bar{H}$ – собственный прообраз дивизора H на многообразии X . Тогда $\bar{H} \cap \bar{G} = \emptyset$ и многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} U & \xleftarrow{\gamma} & X & \xrightarrow{\beta} & V \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\zeta} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\xi} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{array}$$

В диаграмме использованы следующие обозначения:

- морфизмы π_i , ν_i , ξ и χ – естественные проекции;
- морфизм α стягивает поверхность $\mathbb{F}_3 \cong E \subset U$ на кривую C , для которой

$$\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cdot C = 2, \quad \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \cdot C = 1;$$

- морфизм β стягивает поверхность $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong \bar{H}_2 \subset U$ в особую точку многообразия V ;
- морфизм β_i стягивает поверхность $\bar{H}_2$ на гладкую рациональную кривую;
- морфизм δ_i стягивает кривую $\beta_i(\bar{H}_2)$ в особую точку многообразия V , так что отображение $\delta_2 \circ \delta_1^{-1}: U_1 \dashrightarrow U_2$ является стандартным флопом в кривой $\beta_1(\bar{H}_2) \cong \mathbb{P}^1$;
- морфизм ω_1 является расслоением с общим слоем $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
- морфизмы ω_2 , π_2 , ξ , σ и τ являются $\mathbb{P}^1$ -расслоениями;
- морфизм ζ – раздутие точки $O \in \mathbb{P}^2$, не лежащей на кривой $\pi_2(C)$;
- отображение ψ – проекция из точки $O \in \mathbb{P}^2$;
- морфизм ν стягивает поверхность $G \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на кривую L такую, что $\pi_2(L) = O$;
- морфизм γ стягивает поверхность $\check{G}$ на кривую $\bar{L}$ такую, что $\alpha(\bar{L}) = L \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ и кривая $\beta(\bar{L})$ является прямой на $V \subset \mathbb{P}^6$, причем $\beta(\bar{L}) \cap \text{Sing}(V) = \emptyset$;
- морфизм η стягивает на кривую такую поверхность $\check{E}$, что $\nu \circ \eta(\check{E}) = C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$;
- морфизм θ стягивает на кривую такую поверхность $\check{R} \neq \check{E}$, что $\tau \circ \theta(\check{R}) = \sigma \circ \eta(\check{E})$;
- морфизм μ – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 6;
- морфизм ι стягивает поверхность $\theta(\check{H}_2)$ в особую точку квадратичного конуса Q ;
- отображение φ – проекция из прямой $\beta(\bar{L}) \subset V \subset \mathbb{P}^6$.

Кривая $\pi_2(C) \subset \mathbb{P}^2$ является прямой. Поэтому $\alpha(\bar{H}_2) \in |\pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ и $C \subset \alpha(\bar{H}_2)$.

Морфизм π_1 индуцирует двойное накрытие $C \rightarrow \mathbb{P}^1$, разветвленное в двух точках $Q_1 \in C \ni Q_2$. Пусть T_i – единственная поверхность в $|\pi_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))|$, проходящая через точку Q_i . Пусть $\bar{T}_i \subset U$ – собственный прообраз T_i . Тогда поверхность $\bar{T}_i$

- имеет одну обыкновенную двойную точку,
- касается поверхности E вдоль кривой $E \cap \bar{T}_i$,
- является поверхностью дель Пеццо степени $K_{\bar{T}_i}^2 = 7$.

Пусть $Z_i \subset \mathbb{P}^2$ – (единственная) прямая, проходящая через точки O и $\pi_2 \circ \alpha(Q_i)$. Тогда существует единственная поверхность $\bar{R}_i \in |(\pi_2 \circ \alpha)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ такая, что $Z_i \subset \pi_2 \circ \alpha(\bar{R}_i)$. При этом $\bar{L} \subset \bar{R}_i$ и $-K_U \sim 2\bar{H}_2 + \bar{R}_i + 2\bar{T}_i + E$.

Пусть Γ_i – слой проекции $E \rightarrow C$ над точкой Q_i . Тогда $\Gamma_i = E \cap \bar{T}_i$ и

$$\Gamma_i \subset \text{LCS} \left(U, \frac{3}{7} (2\bar{H}_2 + \bar{R}_i + 2\bar{T}_i + E) \right).$$

Пусть $\check{R}_i$ и $\check{T}_i$ – собственные прообразы дивизоров $\bar{R}_i$ и $\bar{T}_i$ на многообразии X соответственно. Тогда $-K_X \sim 2\check{H}_2 + \check{R}_i + 2\check{T}_i + \check{E}$, так как $\bar{L} \subset \bar{R}_i$. Пусть $\check{\Gamma}_i \subset X$ – собственный прообраз кривой Γ_i . Тогда лог-пара

$$\left(X, \frac{3}{7}(2\check{H}_2 + \check{R}_i + 2\check{T}_i + \check{E})\right)$$

лог-канонична, но не лог-терминальна. Таким образом, $\text{lct}(X) \leq 3/7$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 3/7$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не является лог-канонической при некотором $\lambda < 3/7$.

Поверхности $\check{T}_1$ и $\check{T}_2$ – единственные особые слои расслоения $\mu: X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Таким образом,

$$\check{T}_i \not\subseteq \text{LCS}(X, \lambda D) \subsetneq \check{T}_1 \cup \check{T}_2$$

по лемме 2.25, так как $D \cdot Z = \check{T}_1 = 2$, где Z – общий слой отображения $\pi_2 \circ \alpha \circ \gamma$.

По теореме 2.7 можно считать, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \check{T}_1$.

Применяя теорему 2.27 к лог-паре $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \lambda \eta(D))$, получаем, что

$$\text{LCS}(X, \lambda D) \neq \check{T}_1 \cap \check{G},$$

так как $G = \eta(\check{G})$ является сечением $\mathbb{P}^1$ -расслоения σ .

Применяя теорему 2.27 к лог-паре $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \lambda \alpha \circ \gamma(D))$, получаем, что

$$\emptyset \neq \text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \check{T}_1 \cap \check{E} = \check{\Gamma}_1$$

по теореме 2.7, так как $\check{G} \cap \check{E} = \emptyset$ и T_1 является сечением расслоения π_2 .

Применяя теорему 2.27 к лог-парам $(Y, \lambda \theta(D))$ и $(U_2, \lambda \beta_2 \circ \gamma(D))$ (и, соответственно, расслоениям τ и ω_2), получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = \check{\Gamma}_1$, так как $\check{R} \cap \check{H}_2 = \emptyset$. Положим $\bar{D} = \gamma(D)$. Тогда $\text{LCS}(U, \lambda \bar{D}) = \Gamma_1$. Положим $\bar{D} = \varepsilon \bar{H}_2 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $\bar{H}_2 \not\subseteq \text{Supp}(\Omega)$. Тогда

$$\Omega|_{\bar{H}_2} \sim_{\mathbb{Q}} -\frac{(1+\varepsilon)}{2} K_{\bar{H}_2}$$

и лог-пара $(\bar{H}_2, \lambda \Omega|_{\bar{H}_2})$ не лог-канонична по теореме 2.19. Отсюда следует, что

$$\frac{3}{7} \frac{1+\varepsilon}{2} > \lambda \frac{1+\varepsilon}{2} > \frac{1}{2}$$

по лемме 2.23, т. е. $\varepsilon > 4/3$.

Можно считать (см. замечание 2.22), что либо $E \not\subseteq \text{Supp}(\bar{D})$, либо $\bar{T}_1 \not\subseteq \text{Supp}(\bar{D})$.

Допустим, что $E \not\subseteq \text{Supp}(\bar{D})$. Пусть Z – общий слой проекции $E \rightarrow C$. Тогда

$$1 = -K_U \cdot Z = \bar{D} \cdot Z = \varepsilon + \Omega \cdot Z \geq \varepsilon,$$

что противоречит неравенству $\varepsilon > 4/3$. Таким образом, $\bar{T}_1 \not\subseteq \text{Supp}(\bar{D})$.

Пусть $\bar{\Delta} \subset \bar{T}_1$ – собственный прообраз общей прямой на $T_1 \cong \mathbb{P}^2$, проходящей через точку Q_1 . Тогда

$$2 = -K_U \cdot \bar{\Delta} = \bar{D} \cdot \bar{\Delta} \geq \text{mult}_{\Gamma_1}(\bar{D}) \geq \frac{1}{\lambda} > \frac{7}{3},$$

так как $\bar{\Delta} \not\subset \text{Supp}(\bar{D})$ и $\bar{\Delta} \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$. Полученное противоречие завершает доказательство.

ЛЕММА 9.5. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.6$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что многообразие X может быть получено как раздутие $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^3$ трех непересекающихся прямых L_1, L_2 и L_3 .

Пусть H_i – собственный прообраз на X общей плоскости в $\mathbb{P}^3$, содержащей L_i . Тогда

$$-K_X \sim 2H_1 + E_1 + H_2 + H_3 \sim 2H_2 + E_2 + H_1 + H_3 \sim 2H_3 + E_3 + H_1 + H_2,$$

где E_i – α -исключительный дивизор такой, что $\alpha(E_i) = L_i$. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда существует эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$.

Поверхность H_i – неособая поверхность дель Пеццо, $K_{H_i}^2 = 7$, линейная система $|H_i|$ не имеет базисных точек и задает морфизм $\varphi_i: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, все слои которого изоморфны H_i .

Пусть $|\text{LCS}(X, \lambda D)| < +\infty$. Можно считать, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \not\subseteq E_1$. Тогда множество

$$\text{LCS}\left(X, \lambda D + H_1 + \frac{1}{2} E_1\right)$$

несвязно, что невозможно по теореме 2.7, так как дивизор $H_2 + H_3 + (\lambda - 1/2)K_X$ обилиен.

Можно считать, что $H_1 \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \neq \emptyset$. Тогда

$$\emptyset \neq H_1 \cap \text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq \text{LCS}(H_1, \lambda D|_{H_1})$$

в силу замечания 2.3. Положим $C_2 = E_2|_{H_1}$ и $C_3 = E_3|_{H_1}$. Тогда $C_2 \cdot C_2 = C_3 \cdot C_3 = -1$ и существует единственная кривая $\mathbb{P}^1 \cong C \subset H_1$, для которой $C \cdot C_2 = C \cdot C_3 = 1$ и $C \cdot C = -1$. При этом $\text{LCS}(H_1, \lambda D|_{H_1}) = C$ по лемме 4.9.

Существует единственная неособая квадрика $Q \subset \mathbb{P}^3$, содержащая прямые L_1, L_2 и L_3 . Заметим, что $\bar{Q} \cap H_1 = C$, где $\bar{Q} \subset X$ – собственный прообраз квадрики Q .

Существует бирациональный морфизм $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, стягивающий поверхность $\bar{Q}$ на кривую тристепени $(1, 1, 1)$. Так как $\bar{Q} \cap H_1 = C$, то (см. замечание 2.3) $\text{LCS}(X, \lambda D) \supset \bar{Q}$ и, следовательно, $\text{LCS}(X, \lambda D) = \bar{Q}$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$. Положим $D = \mu \bar{Q} + \Omega$, где $\mu \geq 1/\lambda > 2$ и Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор такой, что $\bar{Q} \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда $\alpha(D) = \mu Q + \alpha(\Omega)$, что невозможно, так как $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} 2Q \sim -K_{\mathbb{P}^3}$ и $\mu > 2$.

ЛЕММА 9.6. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.7$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что многообразие X может быть представлено как раздутие $\alpha: X \rightarrow W$, где W является (неособым) дивизором бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, морфизм α стягивает две (неприводимых) поверхности $E_1 \neq E_2$ на две непересекающиеся кривые L_1 и L_2 , а кривые L_i являются слоями одного и того же естественного $\mathbb{P}^1$ -расслоения $W \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Существует дивизор $H \subset W$ такой, что $-K_X \sim 2H$ и $L_1 \subset H \supset L_2$. Выполнено соотношение $-K_X \sim 2\bar{H} + E_1 + E_2$, где $\bar{H}$ – собственный прообраз H на X . Тогда $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/2$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E_1 \cup E_2$, так как $\text{lct}(W) = 1/2$ по теореме 6.1.

Можно считать, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \cap E_1 \neq \emptyset$. Пусть $\beta: X \rightarrow Y$ – стягивание дивизора E_2 . Тогда $\text{LCS}(Y, \lambda\beta(D)) \neq \emptyset$ и $\beta(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_Y$, что противоречит лемме 8.25.

ЛЕММА 9.7. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.8$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что X может быть представлено как раздутие $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ кривой $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такой, что $C \subset F_1$ и $C \cdot F_2 = C \cdot F_3 = 1$, где F_i – слой проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на i -й сомножитель. Существует поверхность $G \in |F_2 + F_3|$, содержащая кривую C . Пусть E – исключительный дивизор раздутия α . Тогда $-K_X \sim 2\bar{F}_1 + 2\bar{G} + 3E$, где $\bar{F}_1$ и $\bar{G}$ – собственные прообразы дивизоров F_1 и G соответственно. В частности, $\text{lct}(X) \leq 1/3$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/3$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/3$. Заметим, что $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$.

Пусть Q – квадратичный конус в $\mathbb{P}^4$. Существует коммутативная диаграмма

В диаграмме использованы следующие обозначения: V – многообразие с $\mathfrak{I}(V) = 3.31$; морфизм β стягивает поверхность $\bar{G}$ на кривую; морфизм γ стягивает поверхность $\bar{F}_1 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в обыкновенную двойную точку; морфизм δ – раздутие вершины квадратичного конуса $Q \subset \mathbb{P}^4$; морфизм ξ – раздутие неособой коники на Q ; отображение ψ – проекция из вершины конуса Q ; морфизм φ задается линейной системой $|F_2 + F_3|$, т. е. является проекцией $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ на произведение двух последних сомножителей; морфизм π – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение.

Согласно следствию 5.4, $\text{lct}(V) = 1/3$. С другой стороны, $\text{lct}(U) = 1/3$ по лемме 2.26. Значит, $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cap \bar{G} \cap \bar{F}_1 = \emptyset$. Противоречие.

Следующий результат получается из следствий 5.4 и 8.19, леммы 2.29 и примера 1.10.

СЛЕДСТВИЕ 9.8. Пусть $\rho \geq 5$. Тогда $\text{lct}(X) = 1/3$, если $\mathfrak{I}(X) \in \{5.1, 5.2\}$, и $\text{lct}(X) = 1/2$ в остальных случаях.

ЛЕММА 9.9. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 4.13$ и X общее. Тогда $\text{lct}(X) = 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_1 \cong F_2 \cong F_3 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – слои трех различных проекций $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Существует стягивание $\alpha: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ поверхности $E \subset X$ на кривую $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ такую, что $C \cdot F_1 = C \cdot F_2 = 1$ и $C \cdot F_3 = 3$. Кроме того, существует неособая поверхность $G \in |F_1 + F_2|$, содержащая C . В частности, $-K_X \sim 2\bar{G} + E + 2\bar{F}_3$, где $\bar{F}_3$ и $\bar{G}$ – собственные прообразы дивизоров F_3 и G соответственно. Следовательно, выполнено неравенство $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

Предположим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что особенности лог-пары $(X, \lambda D)$ не являются лог-каноническими при некотором $\lambda < 1/2$. Тогда $\text{LCS}(X, \lambda D) \subseteq E \cong \mathbb{F}_4$, так как $\text{lct}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = 1/2$ и $\alpha(D) \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}$.

Отметим, что существуют неособые поверхности $H_1 \in |3F_1 + F_3|$ и $H_2 \in |3F_2 + F_3|$ такие, что $C = G \cdot H_1 = G \cdot H_2$ и $H_1 \cong H_2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Пусть $\bar{H}_i$ – собственный прообраз дивизора H_i на многообразии X . Тогда $\bar{H}_1 \cap \bar{G} = \bar{H}_2 \cap \bar{G} = \emptyset$.

Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где β и γ_i – стягивания поверхностей $\bar{G}$ и $\bar{H}_i$ на неособые кривые соответственно, морфизмы π и φ_i являются $\mathbb{P}^1$ -расслоениями, морфизмы ζ и ξ_i – проекции, заданные линейными системами $|F_1 + F_2|$ и $|F_i + F_3|$ соответственно.

Так как $\bar{H}_1 \cap \bar{G} = \emptyset$, то либо лог-пара $(V, \lambda\beta(D))$ не лог-канонична, либо лог-пара $(U_1, \lambda\gamma_1(D))$ не лог-канонична.

Применяя теорему 2.27 к лог-паре $(V, \lambda\beta(D))$ или $(U_1, \lambda\gamma_1(D))$ (и, соответственно, к расслоению π или φ_1), с учетом теоремы 2.7 получаем, что $\text{LCS}(X, \lambda D) = \Gamma$, где Γ – слой естественной проекции $E \rightarrow C$.

Можно считать, что $\alpha(\Gamma) \in F_3$. Положим $D = \mu\bar{F}_3 + \Omega$, где Ω – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор на X такой, что $\bar{F}_3 \not\subset \text{Supp}(\Omega)$. Тогда $\mu\bar{F}_3 + \alpha(\Omega) \sim_{\mathbb{Q}} 2(F_1 + F_2 + F_3)$, откуда следует неравенство $\mu \leq 2$. Лог-пара $(\bar{F}_3, \lambda\Omega|_{\bar{F}_3})$ не лог-канонична вдоль $\Gamma \subset \bar{F}_3$ по теореме 2.19. Заметим, что $\Omega|_{\bar{F}_3} \sim_{\mathbb{Q}} -K_{\bar{F}_3}$ и $\bar{F}_3$ является поверхностью дель Пеццо степени $K_{\bar{F}_3}^2 = 5$. При этом $\bar{F}_3$ может быть особой. А именно,

$$\text{Sing}(\bar{F}_3) = \emptyset \iff |C \cap F_3| = F_3 \cdot C = 3,$$

и $\text{Sing}(\bar{F}_3) \subset \Gamma$. Возможны следующие случаи:

- поверхность $\bar{F}_3$ неособа и $|C \cap F_3| = 3$;
- поверхность $\bar{F}_3$ имеет одну обыкновенную двойную особенность и выполнено равенство $|C \cap F_3| = 2$;
- поверхность $\bar{F}_3$ имеет особую точку типа $\mathbb{A}_2$ и $|C \cap F_3| = 1$.

Заметим, что $\text{lct}(\bar{F}_3) \leq \lambda < 1/2$. Таким образом, из примеров 1.10 и 4.3 следует, что $|C \cap F_3| = 1$; последняя возможность не реализуется на общем X .

10. Оценки сверху

Мы будем пользоваться предположениями и обозначениями, введенными в разделе 1. Основная цель данного раздела – оценить сверху глобальные лог-канонические пороги многообразия X в некоторых случаях, не покрытых теоремой 1.46.

ЛЕММА 10.1. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 1.8$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 6/7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек и задает вложение $X \subset \mathbb{P}^{10}$, причем многообразие X содержит прямую $L \subset X$ (см. [62]).

Из [2; теорема 4.3.3] следует, что X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\rho} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

где α – раздутие прямой L , отображение ρ – композиция флопов, β – раздутие гладкой кривой степени 7 рода 3, а ψ – двойная проекция из прямой L .

Пусть $S \subset X$ – собственный прообраз исключительного дивизора раздутия β . Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_L(S) = 7$ и $S \sim -3K_X$, откуда следует $\text{lct}(X) \leq 6/7$.

ЛЕММА 10.2. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 1.9$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 4/5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек и задает вложение $X \subset \mathbb{P}^{11}$, причем многообразие X содержит прямую $L \subset X$ (см. [62]).

Из [2; теорема 4.3.3] следует, что X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\rho} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\psi} & Q \end{array}$$

где $Q \subset \mathbb{P}^4$ – гладкая квадрика, α – раздутие прямой L , отображение ρ – композиция флопов, β – раздутие неособой кривой степени 7 рода 2, а ψ – двойная проекция из L .

Пусть $S \subset X$ – собственный прообраз исключительного дивизора раздутия β . Тогда выполнено неравенство $\text{mult}_L(S) = 5$ и $S \sim -2K_X$, откуда следует $\text{lct}(X) \leq 4/5$.

ЛЕММА 10.3. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 1.10$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек и задает вложение $X \subset \mathbb{P}^{13}$, причем многообразие X содержит прямую $L \subset X$ (см. [62]).

Из [2; теорема 4.3.3] следует, что X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\rho} & W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow[\psi]{} & V_5 \end{array}$$

где V_5 – неособое сечение грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ линейным подпространством размерности 6, морфизм α – раздутие прямой L , отображение ρ является композицией флопов, β – раздутие рациональной нормальной кривой степени 5, а ψ – двойная проекция из прямой L .

Пусть $S \subset X$ – собственный прообраз исключительного дивизора раздутия β . Тогда $\mathrm{mult}_L(S) = 3$ и $S \sim -K_X$, откуда $\mathrm{lct}(X) \leq 2/3$.

ЛЕММА 10.4. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.2$. Тогда $\mathrm{lct}(X) \leq 13/14$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует неособый дивизор $B \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ бистепени $(2, 4)$ такой, что многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow \varphi_1 & \downarrow \pi & \searrow \varphi_2 & \\ \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

где π – двойное накрытие с ветвлением в B , морфизмы π_1 и π_2 – естественные проекции, φ_1 – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 2, а φ_2 – расслоение на коники.

Пусть H_1 – общий слой расслоения φ_1 . Положим $\bar{H}_1 = \pi(H_1)$. Тогда пересечение

$$C = \bar{H}_1 \cap B \subset \bar{H}_1 \cong \mathbb{P}^2$$

является неособой кривой степени 4.

Существует точка $P \in C$, для которой $\mathrm{mult}_P(C \cdot L) \geq 3$, где $L \subset \bar{H}_1 \cong \mathbb{P}^2$ – касательная прямая к кривой C в точке P .

Кривая $\pi_2(L)$ является прямой. Таким образом, существует единственная поверхность $H_2 \in |\varphi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$ такая, что $\varphi_2(H_2) = \pi_2(L)$. Следовательно, $-K_X \sim H_1 + H_2$.

Покажем, что $\mathrm{lct}(X, H_1 + H_2) \leq 13/14$. Положим $\bar{H}_2 = \pi(H_2)$. Тогда

$$\mathrm{LCS}\left(X, \frac{13}{14}(H_1 + H_2)\right) \neq \emptyset \iff \mathrm{LCS}\left(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \frac{1}{2}B + \frac{13}{14}(\bar{H}_1 + \bar{H}_2)\right) \neq \emptyset$$

по [1; предложение 3.16]. Пусть $\alpha: V \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ – раздутие кривой C . Тогда

$$K_V + \frac{1}{2}\tilde{B} + \frac{13}{14}(\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2) + \frac{3}{7}E \sim_{\mathbb{Q}} \alpha^*\left(K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}B + \frac{13}{14}(\bar{H}_1 + \bar{H}_2)\right),$$

где $\tilde{B}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2 \subset V$ – собственные прообразы $B, \bar{H}_1, \bar{H}_2$ соответственно. При этом особенности лог-пары $(V, (13/14)\tilde{H}_2 + (3/7)E)$ не являются лог-терминальными вдоль слоя Γ морфизма α такого, что $\alpha(\Gamma) = P$, так как

$$\mathrm{mult}_{\Gamma}(\tilde{H}_2 \cdot E) = \mathrm{mult}_P(C \cdot \bar{H}_2) \geq \mathrm{mult}_P(C \cdot L) \geq 3$$

где α и β – раздутья неособых кривых $C \subset \mathbb{P}^3$ и $Z \subset \mathbb{P}^3$ степени 6 рода 3, являющихся пересечениями кубик в $\mathbb{P}^3$, а ψ – бирациональное отображение, заданное линейной системой кубик, проходящих через кривую C . При этом $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} (4/3)S + (1/3)E$, где $S \in |\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, а E – исключительный дивизор раздутья α . Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 3/4$.

ЛЕММА 10.9. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.13$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ Q & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & \mathbb{P}^2 \\ & \psi & \end{array}$$

где $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрика, α – раздутье неособой кривой $C \subset Q$ степени 6 рода 2, морфизм β – расслоение на коники, а ψ – рациональное отображение, заданное линейной системой поверхностей из $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)|_Q|$, проходящих через кривую C . При этом выполнено соотношение $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} (3/2)S + (1/2)E$, где $S \in |\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, а E – исключительный дивизор раздутья α . Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 2/3$.

ЛЕММА 10.10. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.16$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ V_4 & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & \mathbb{P}^2 \\ & \psi & \end{array}$$

где $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ – неособое полное пересечение двух квадрик, α – раздутье неособой коники $C \subset V_4$, морфизм β – расслоение на коники, а ψ – рациональное отображение, заданное линейной системой поверхностей из $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_{V_4}|$, проходящих через кривую C . При этом выполнено соотношение $-K_X \sim 2S + E$, где $S \in |\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$, а E – исключительный дивизор раздутья α . Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

ЛЕММА 10.11. Пусть $\mathfrak{I}(X) = 2.17$. Тогда $\text{lct}(X) \leq 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ Q & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & \mathbb{P}^3 \\ & \psi & \end{array}$$

где $Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрика, α и β – раздутья неособых эллиптических кривых $C \subset Q$ и $Z \subset \mathbb{P}^3$ степени 5 соответственно, а отображение ψ задается линейной системой поверхностей в $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)|_Q|$, проходящих через кривую C . При этом выполнено соотношение $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} (3/2)S + (1/2)E$, где $S \in |\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))|$, а E – исключительный дивизор раздутья α . Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 2/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие X включается в коммутативную диаграмму

где $W_i \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ – дивизор бистепени $(1, 1)$, морфизмы α_i и β_i являются $\mathbb{P}^1$ -расслоениями, π_i – раздутие неособой кривой $C_i \subset W_i$ бистепени $(2, 2)$ такой, что образы $\alpha_i(C_i)$ и $\beta_i(C_i)$ являются (неприводимыми) кониками на $\mathbb{P}^2$, а φ_i – расслоение на коники. Пусть E_i – исключительный дивизор раздутия π_i . Тогда

$$-K_X \sim 2H_1 + E_1 \sim 2H_2 + E_2 \sim 2H_3 + E_3 \sim E_1 + E_2 + E_3,$$

где $H_i \in |\varphi_i^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))|$. Следовательно, $\text{lct}(X) \leq 1/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.16. Примем обозначения, введенные в доказательстве леммы 10.15, и допустим, что $\text{lct}(X) < 1/2$. Тогда найдется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D \sim_{\mathbb{Q}} -K_X$ такой, что лог-пара $(X, \lambda D)$ не лог-канонична при некотором $\lambda < 1/2$. Так как $\text{lct}(W_i) = 1/2$ по теореме 6.1, то

$$\emptyset \neq \text{LCS}(X, \lambda D) \subset E_1 \cap E_2 \cap E_3.$$

В частности, по теореме 2.7 множество $\text{LCS}(X, \lambda D)$ состоит из единственной точки P ; заметим, что точка P является пересечением $P = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ трех кривых F_i таких, что $F_2 \cup F_3$ (соответственно $F_1 \cup F_3$, $F_1 \cup F_2$) является приводимым слоем расслоения на коники φ_1 (соответственно φ_2 , φ_3).

Приложение А.

Ж.-П. Демайи. Инвариант Тиана и лог-канонические пороги

Цель настоящего приложения – показать связь между глобальными лог-каноническими порогами и α -инвариантами неособых многообразий Фано, которые были введены в работе [3] для изучения вопроса существования метрик Кэлера–Эйнштейна на неособых многообразиях Фано. Мы воспользуемся техникой приближения замкнутых положительных $(1, 1)$ -потокков, которая была разработана в [63], и покажем, что α -инвариант неособого многообразия Фано совпадает с его глобальным лог-каноническим порогом.

После появления работы [21] многим алгебраическим геометрам было понятно, что α -инвариант неособого многообразия Фано совпадает с его глобальным лог-каноническим порогом. Более того, несколько работ неявно использовали это утверждение (см., например, [64] и [65]). Однако требуемый результат был явно сформулирован только в локально-аналитической форме в работе [21],

причем с использованием терминологии, незнакомой большинству алгебраических геометров. В настоящем приложении мы исправим этот пробел, сформулировав и доказав утверждение о существовании метрик Кэлера–Эйнштейна на многообразиях Фано.

Практически во всех применениях рассматриваются объекты, связанные с антиканоническим линейным расслоением $L = -K_X$. Тем не менее, мы рассмотрим более общий случай произвольного линейного расслоения L (или $\mathbb{Q}$ -линейного расслоения L) на неособом комплексном многообразии X , которое удовлетворяет некоторым естественным дополнительным ограничениям, сформулированным ниже.

Предположим, что линейное расслоение L оснащено *особой эрмитовой метрикой* h (см. [66]). Линейное расслоение L локально допускает тривиализацию $\theta: L|_U \simeq U \times \mathbb{C}$ такую, что на открытом подмножестве U метрика h задается весовой функцией φ , для которой

$$\|\xi\|_h^2 = |\xi|^2 e^{-2\varphi(z)} \quad \text{при всех } z \in U, \xi \in L_z,$$

где мы отождествляем $\xi \in L_z$ с комплексным числом. Нам интересен случай, когда функция φ является (по крайней мере) локально интегрируемой по Лебегу функций, поскольку в этом случае мы можем посчитать форму кривизны

$$\Theta_{L,h} = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \varphi$$

в смысле распределения. В этом случае $\Theta_{L,h} \geq 0$ как $(1,1)$ -поток, если и только если функция φ является плюрисубгармонической. В дальнейшем нам будет интересен только этот случай.

Рассмотрим понятие комплексного показателя особенности для особых эрмитовых метрик, следуя работам [67]–[69] и [21].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.1. Для компактного подмножества K многообразия X комплексным показателем особенности $c_K(h)$ метрики h , которая может быть локально представлена в виде $h = e^{-2\varphi}$, принято называть супремум всех положительных чисел $c \in \mathbb{R}$ таких, что в окрестности каждой точки $z_0 \in K$ функция $h^c = e^{-2c\varphi}$ является интегрируемой по мере Лебега в голоморфных координатах с началом в точке z_0 .

Теперь мы рассмотрим обобщение α -инварианта Тиана, который был введен в работе [3] (см. также [70]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ А.2. Предположим, что многообразие X компактно, а линейное расслоение L псевдоэффektivно, т. е. L обладает особой эрмитовой метрикой h_0 такой, что $\Theta_{L,h_0} \geq 0$. Для компактного подмножества $K \subset X$ положим

$$\alpha_K(L) = \inf_{\{h, \Theta_{L,h} \geq 0\}} c_K(h),$$

где инфимум берется по всем особым эрмитовым метрикам h на линейном расслоении L таким, что $\Theta_{L,h} \geq 0$.

В алгебраической геометрии важным объектом изучения является линейная система, определяемая некоторым набором линейно независимых сечений

$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_N \in H^0(X, L^{\otimes m})$. Обозначим символом Σ векторное пространство, порожденное такими сечениями. Положим

$$|\Sigma| := P(\Sigma) \subset |mL| := P(H^0(X, L^{\otimes m}))$$

и отметим, что линейная система $|\Sigma|$ в общем случае не обязательно является полной. Такой набор из $N + 1$ сечения $\sigma = (\sigma_j)_{0 \leq j \leq N}$ естественным образом задает особую эрмитову метрику h на линейном расслоении L . А именно, для любой тривиализации положим

$$\|\xi\|_h^2 = \frac{|\xi|^2}{(\sum_j |\sigma_j(z)|^2)^{1/m}} = \frac{|\xi|^2}{|\sigma(z)|^{2/m}} \quad \text{при } \xi \in L_z,$$

откуда следует, что $h(z) = |\sigma(z)|^{-2/m}$ с ассоциированной весовой функцией

$$\varphi(z) = \frac{1}{m} \log |\sigma(z)| = \frac{1}{2m} \log \sum_j |\sigma_j(z)|^2.$$

Нас интересует значение числа $c_K(|\sigma|^{-2/m})$. В случае единственного сечения σ_0 (соответствующего линейной системе, состоящей из одного дивизора) это число совпадает с лог-каноническим порогом $\text{lct}_K(X, m^{-1}D)$, где D – дивизор нулей сечения σ_0 . Для линейной системы $|\Sigma| \subset |mL|$ произвольной размерности мы будем обозначать число $c_K(|\sigma|^{-2/m})$ символом $\text{lct}_K(X, m^{-1}|\Sigma|)$.

Напомним, что линейное расслоение L принято называть *объемным*, если его размерность Кодаиры–Иитаки $\kappa(L)$ равна размерности многообразия $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$. Основным результатом настоящего приложения является следующая теорема.

ТЕОРЕМА А.3. Пусть L – объемное линейное расслоение на компактном комплексном многообразии X . Тогда для каждого компактного подмножества $K \subset X$ выполнено равенство

$$\alpha_K(L) = \inf_{\{h, \Theta_{L,h} \geq 0\}} c_K(h) = \inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{D \in |mL|} \text{lct}_K\left(X, \frac{1}{m}D\right).$$

Отметим, что очевидным образом выполнено неравенство

$$\inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{D \in |mL|} \text{lct}_K\left(X, \frac{1}{m}D\right) \geq \inf_{\{h, \Theta_{L,h} \geq 0\}} c_K(h),$$

поскольку каждый дивизор $D \in |mL|$ естественным образом задает особую эрмитову метрику h . Мы покажем, что выполнено и обратное неравенство, используя технику приближения работы [63] и некоторый элементарный анализ. Отметим, что наше доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 4.2 в [21], хотя используемая в этих двух случаях терминология немного различается. Однако в обоих случаях используется одна и та же идея из теории пучков множительных идеалов: для особой эрмитовой метрики h

с локальной плюрисубгармонической весовой функцией φ пучок множительных идеалов $\mathcal{I}(h) \subset \mathcal{O}_X$ (также обозначаемый символом $\mathcal{I}(\varphi)$) является пучком идеалов, который может быть определен как

$$\mathcal{I}(h)_z = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,z} \mid \text{найдется окрестность } V \ni z \text{ такая, что } \int_V |f(x)|^2 e^{-2\varphi(x)} d\lambda(x) < +\infty \right\},$$

где λ – мера Лебега. Как показано А. М. Наделем (см. [20]), этот пучок является когерентным аналитическим пучком на многообразии X . На самом деле утверждение теоремы А.3 может быть уточнено следующим способом.

ТЕОРЕМА А.4. Пусть L – линейное расслоение на компактном комплексном многообразии X с особой эрмитовой метрикой h такой, что $\Theta_{L,h} \geq \varepsilon \omega$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и некоторой положительно определенной эрмитовой $(1,1)$ -формы ω на X . Для каждого вещественного числа $m > 0$ рассмотрим пространство $\mathcal{H}_m = H^0(X, L^{\otimes m} \otimes \mathcal{I}(h^m))$ голоморфных сечений σ расслоения $L^{\otimes m}$ на X таких, что

$$\int_X \|\sigma\|_{h^m}^2 dV_\omega = \int_X |\sigma|^2 e^{-2m\varphi} dV_\omega < +\infty,$$

где $dV_\omega = (m!)^{-1} \omega^m$ – эрмитова форма объема. Тогда для $m \gg 1$ пространство $\mathcal{H}_m$ является ненулевым конечномерным гильбертовым пространством и можно рассмотреть замкнутый $(1,1)$ -поток

$$T_m = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \left(\frac{1}{2m} \log \sum_k |g_{m,k}|^2 \right) = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \left(\frac{1}{2m} \log \sum_k \|g_{m,k}\|_h^2 \right) + \Theta_{L,h},$$

где $(g_{m,k})_{1 \leq k \leq N(m)}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}_m$. При этом выполнены следующие утверждения.

(i) Для любой тривиализации $L|_U \simeq U \times \mathbb{C}$ на координатном открытом множестве U в X и любого компактного множества $K \subset U$ найдутся константы $C_1, C_2 > 0$, не зависящие от m и φ , такие, что

$$\varphi(z) - \frac{C_1}{m} \leq \psi_m(z) := \frac{1}{2m} \log \sum_k |g_{m,k}(z)|^2 \leq \sup_{|x-z| < r} \varphi(x) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}$$

при всех $z \in K$ и $r \leq (1/2) d(K, \partial U)$. В частности, ψ_m сходится к φ поточечно и в L^1_{loc} -топологии на Ω при $m \rightarrow +\infty$; следовательно, T_m слабо сходится к $T = \Theta_{L,h}$.

(ii) Числа Лелона $\nu(T, z) = \nu(\varphi, z)$ и $\nu(T_m, z) = \nu(\psi_m, z)$ связаны неравенствами

$$\nu(T, z) - n/m \leq \nu(T_m, z) \leq \nu(T, z) \quad \text{для всех } z \in X.$$

(iii) Для любого компактного множества $K \subset X$ комплексные показатели особенностей метрик, локально заданных как $h = e^{-2\varphi}$ и $h_m = e^{-2\psi_m}$, удовлетворяют неравенствам

$$c_K(h)^{-1} - m^{-1} \leq c_K(h_m)^{-1} \leq c_K(h)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Большая часть доказательства получается небольшим изменением рассуждений из [63] (см. также [21; теорема 4.2]). Мы приводим здесь эти рассуждения для удобства читателя.

(i) Заметим, что $\sum |g_{m,k}(z)|^2$ является квадратом нормы линейной формы вычисления $\sigma \mapsto \sigma(z)$ на $\mathcal{H}_m$, так что

$$\psi_m(z) = \sup_{\sigma \in B(1)} \frac{1}{m} \log |\sigma(z)|,$$

где $B(1)$ – единичный шар в $\mathcal{H}_m$. При $r \leq (1/2) d(K, \partial\Omega)$ неравенство о среднем, примененное к плюрисубгармонической функции $|\sigma|^2$, дает

$$\begin{aligned} |\sigma(z)|^2 &\leq \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!} \int_{|x-z|<r} |\sigma(x)|^2 d\lambda(x) \\ &\leq \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!} \exp(2m \sup_{|x-z|<r} \varphi(x)) \int_{\Omega} |\sigma|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda. \end{aligned}$$

Если взять супремум по всем $\sigma \in B(1)$, то получится неравенство

$$\psi_m(z) \leq \sup_{|x-z|<r} \varphi(x) + \frac{1}{2m} \log \frac{1}{\pi^n r^{2n}/n!},$$

что дает второе неравенство из (i). Обратно, теорема Осава–Такегоши о продолжении (см. [71], [72]), примененная к 0-мерному подмногообразию $\{z\} \subset U$, показывает, что для любого $a \in \mathbb{C}$ существует голоморфная функция f на U такая, что $f(z) = a$ и

$$\int_U |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda \leq C_3 |a|^2 e^{-2m\varphi(z)},$$

где C_3 зависит только от n и $\text{diam}(U)$. Далее, если a остается в компактном множестве $K \subset U$, можно воспользоваться срезающей функцией θ с носителем в U , равной 1 в окрестности a , и решить $\bar{\partial}$ -уравнение $\bar{\partial}g = \bar{\partial}(\theta f)$ в L^2 -пространстве, ассоциированном с весом $2m\varphi + 2(n+1) \log |z-a|$, т. е. с особой эрмитовой метрикой $h(z)^m |z-a|^{-2(n+1)}$ на $L^{\otimes m}$. Для этого применим стандартные L^2 -оценки Андреотти–Везентини–Хёрмандера (наиболее подходящую версию можно найти, например, в [73]). Благодаря предположению о том, что $\Theta_{L,h} \geq \varepsilon\omega > 0$, это возможно при $m \geq m_0$, даже если многообразие X не кэлерово (при этом из наших предположений следует, что X является по крайней мере пространством Мойшезона). Число m_0 зависит от ε и от геометрии конечного покрытия многообразия X компактными подмножествами $K_j \subset U_j$, где U_j – (например) координатные шары; оно не зависит от числа a и даже от метрики h . Таким образом, $g(a) = 0$ и, следовательно, $\sigma = \theta f - g$ является голоморфным сечением расслоения $L^{\otimes m}$ таким, что

$$\int_X \|\sigma\|_{h^m}^2 dV_\omega = \int_X |\sigma|^2 e^{-2m\varphi} dV_\omega \leq C_4 \int_U |f|^2 e^{-2m\varphi} dV_\omega \leq C_5 |a|^2 e^{-2m\varphi(z)}.$$

В частности, $\sigma \in \mathcal{H}_m = H^0(X, L^{\otimes m} \otimes \mathcal{I}(h^m))$. Зафиксируем такую точку a , что правая часть последнего неравенства равна 1. Это дает неравенство

$$\psi_m(z) \geq \frac{1}{m} \log |a| = \varphi(z) - \frac{\log C_5}{2m},$$

т. е. первое неравенство из (i).

(ii) Первое неравенство из (i) влечет $\nu(\psi_m, z) \leq \nu(\varphi, z)$. С другой стороны, выполнено неравенство

$$\sup_{|x-z|<r} \psi_m(x) \leq \sup_{|x-z|<2r} \varphi(x) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}.$$

Разделим на $\log r < 0$ и возьмем предел при r , стремящемся к 0. Частное при делении на $\log r$ супремума плюрисубгармонической функции на $B(x, r)$ стремится к числу Лелона в x . Таким образом,

$$\nu(\psi_m, x) \geq \nu(\varphi, x) - \frac{n}{m}.$$

(iii) Первое неравенство из (i) сразу же дает оценку $h_m \leq C_6 h$, так что $c_K(h_m) \geq c_K(h)$. Так как $c_{\bigcup K_j}(h) = \min_j c_{K_j}(h)$, для доказательства обратного неравенства можно без ограничения общности предполагать, что K содержится в тривиализующем открытом множестве U расслоения L . Выберем число $c < c_K(\psi_m)$. Тогда, по определению, если $V \subset X$ – достаточно малая открытая окрестность K , то из неравенства Гёльдера для сопряженных экспонент $p = 1 + mc^{-1}$ и $q = 1 + m^{-1}c$ следует, благодаря равенству $1/p = c/(mq)$, что

$$\begin{aligned} \int_V e^{-2(m/p)\varphi} dV_\omega &= \int_V \left(\sum_{1 \leq k \leq N(m)} |g_{m,k}|^2 e^{-2m\varphi} \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\sum_{1 \leq k \leq N(m)} |g_{m,k}|^2 \right)^{-c/(mq)} dV_\omega \\ &\leq \left(\int_X \sum_{1 \leq k \leq N(m)} |g_{m,k}|^2 e^{-2m\varphi} dV_\omega \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\int_V \left(\sum_{1 \leq k \leq N(m)} |g_{m,k}|^2 \right)^{-c/m} dV_\omega \right)^{1/q} \\ &= N(m)^{1/p} \left(\int_V \left(\sum_{1 \leq k \leq N(m)} |g_{m,k}|^2 \right)^{-c/m} dV_\omega \right)^{1/q} < +\infty. \end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что $c_K(h) \geq m/p$, т. е. $c_K(h)^{-1} \leq p/m = 1/m + c^{-1}$. Так как число $c < c_K(\psi_m)$ было выбрано произвольно, то мы получаем $c_K(h)^{-1} \leq 1/m + c_K(h_m)^{-1}$, и неравенства из (iii) доказаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А.3. Для данного объемного линейного расслоения L на многообразии X существует бирациональный морфизм $\mu: \tilde{X} \rightarrow X$ такой, что многообразие $\tilde{X}$ неособо и проективно и выполнена эквивалентность

$$\mu^*(L) \sim A + E,$$

где A – обильный дивизор, а E – эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор. Рассматривая прямой образ относительно морфизма μ гладкой метрики h_A на линейном расслоении A , имеющей положительную кривизну, мы получаем особую эрмитову метрику h_1 на линейном расслоении L такую, что

$$\Theta_{L, h_1} \geq \mu_* \Theta_{A, h_A} \geq \varepsilon \omega$$

на многообразии X . В этом случае для любого $\delta > 0$ и любой особой эрмитовой метрики h на линейном расслоении L такой, что $\Theta_{L,h} \geq 0$, интерполированная метрика $h_\delta = h_1^\delta h^{1-\delta}$ удовлетворяет условию $\Theta_{L,h_\delta} \geq \delta \varepsilon \omega$. Поскольку метрика h_1 ограничена вне 0, мы видим, что $c_K(h) \geq (1 - \delta)c_K(h_\delta)$ в силу монотонности. Применяя теорему A.4 (iii) к метрике h_δ , мы видим, что

$$c_K(h_\delta) = \lim_{m \rightarrow +\infty} c_K(h_{\delta,m}),$$

а также

$$c_K(h_{\delta,m}) \geq \text{lct}_K\left(\frac{1}{m}D_{\delta,m}\right)$$

для любого дивизора $D_{\delta,m}$, который задается нулями сечения $\sigma \in H^0(X, L^{\otimes m} \otimes \mathcal{I}(h_\delta^m))$, поскольку метрика $h_{\delta,m}$ задается посредством соотношения

$$h_{\delta,m} = \left(\sum_k |g_{m,k}|^2\right)^{-1/m}$$

для ортонормированного базиса таких сечений. Отсюда сразу следует, что

$$c_K(h) \geq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{m \rightarrow +\infty} \text{lct}_K\left(\frac{1}{m}D_{\delta,m}\right) \geq \inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{D \in |mL|} \text{lct}_K\left(\frac{1}{m}D\right).$$

Теорема A.3 доказана.

Во многих применениях мы сталкиваемся с точным действием конечной или компактной группы G на многообразии X . В этом случае можно рассмотреть такие G -инвариантные объекты, как G -эквивариантные метрики на G -эквивариантном линейном расслоении L . В случае редуктивной алгебраической группы G мы будем рассматривать вещественную максимальную компактную подгруппу $G^{\mathbb{R}}$ вместо самой группы G .

Отметим, что G -инвариантный α -инвариант $\alpha_{G,K}(L)$ может быть естественным образом определен с помощью G -эквивариантных метрик в определении A.2. В этом случае все необходимые конструкции естественным образом обобщаются на G -эквивариантный случай. В частности, рассматриваемая линейная подсистема $\mathcal{H}_m \subset |mL|$ в данном случае будет G -инвариантной. Таким образом, для каждого G -инвариантного компактного подмножества $K \subset X$ мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{G,K}(L) &= \inf_{\{\text{метрика } hG \text{ эквивариантна, } \Theta_{L,h} \geq 0\}} c_K(h) \\ &= \inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{|\Sigma| \subset |mL|, \Sigma^G = \Sigma} \text{lct}_K\left(\frac{1}{m}|\Sigma|\right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

В случае, когда группа G конечна, при $m \gg 0$ можно выбрать G -инвариантный дивизор $D_{\delta,m}$, который может быть задан обращением в нуль некоторого G -инвариантного сечения σ , возможно после домножения m на порядок группы G . В этом случае можно получить более простое равенство

$$\alpha_{G,K}(L) = \inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{D \in |mL|^G} \text{lct}_K\left(\frac{1}{m}D\right). \quad (\text{A.2})$$

Аналогично, вместо неособого многообразия можно рассмотреть многообразие X , имеющее не более чем факторособенности. В этом случае можно применять L^2 -методы практически без каких-либо дополнительных изменений. Действительно, легко видеть, что все L^2 -неравенства остаются верными при допущении факторособенностей, поскольку мы можем использовать орбифолдную метрику на открытой окрестности каждой точки.

Приложение В. Большая таблица

Настоящее приложение содержит список неособых трехмерных многообразий Фано. Мы придерживаемся обозначений и нумерации, принятых в [2], [50], [51]. Мы также используем следующие соглашения. Символ V_i обозначает неособое трехмерное многообразие Фано такое, что $-K_X \sim 2H$ и $\text{Pic}(V_i) = \mathbb{Z}[H]$, где H – дивизор Картье на V_i и $H^3 = 8i \in \{8, 16, \dots, 40\}$. Символ W обозначает (неособый) дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ (или, что то же самое, многообразие $\mathbb{P}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2})$). Символ V_7 обозначает раздутие $\mathbb{P}^3$ в точке (или, что то же самое, многообразие $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$). Символ Q обозначает неособую трехмерную quadriku. Символ S_i означает неособую поверхность дель Пеццо степени $K_{S_i}^2 = i \in \{1, \dots, 8\}$, причем $S_8 \not\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

В четвертом столбце таблицы 1 содержатся значения глобальных лог-канонических порогов соответствующих многообразий Фано. Символ $\star$ рядом с числом означает, что порог $\text{lct}(X)$ вычислен только для общего многообразия X из данного деформационного класса. Если нам известна только верхняя оценка $\text{lct}(X) \leq \alpha$, то мы пишем $\leq \alpha$ вместо точного значения порога $\text{lct}(X)$; символ “?” означает, что мы не знаем никакой разумной оценки сверху (кроме тривиальной оценки $\text{lct}(X) \leq 1$).

Таблица 1: Неособые трехмерные многообразия Фано

$\mathfrak{I}(X)$	$-K_X^3$	Краткое описание	$\text{lct}(X)$
1.1	2	гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 3)$	$1\star$
1.2	4	гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}^4$ или двойное накрытие quadriki в $\mathbb{P}^4$, разветвленное в поверхности степени 8	?
1.3	6	полное пересечение quadriki и кубики в $\mathbb{P}^5$	?
1.4	8	полное пересечение трех quadriki в $\mathbb{P}^6$	?
1.5	10	сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ quadriкой и линейным пространством размерности 7	?
1.6	12	сечение эрмитова симметрического пространства $M = G/P \subset \mathbb{P}^{15}$ типа DIII линейным подпространством размерности 8	?
1.7	14	сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ линейным пространством коразмерности 5	?
1.8	16	сечение эрмитова симметрического пространства $M = G/P \subset \mathbb{P}^{19}$ типа CI линейным подпространством размерности 10	$\leq 6/7$

1.9	18	сечение 5-мерного рационального однородного контактного многообразия $G_2/P \subset \mathbb{P}^{13}$ линейным подпространством размерности 11	$\leq 4/5$
1.10	22	множество совместных нулей трех сечений векторного расслоения $\wedge^2 \mathcal{Q}$ ранга 3, где $\mathcal{Q}$ – универсальное факторрасслоение на грассманиане $\text{Gr}(7, 3)$	$\leq 2/3$
1.11	8	V_1 , т.е. гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2, 3)$	$1/2$
1.12	16	V_2 , т.е. гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1, 1, 1, 1, 2)$	$1/2$
1.13	24	V_3 , т.е. гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^4$	$1/2$
1.14	32	V_4 , т.е. полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$	$1/2$
1.15	40	V_5 , т.е. сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ линейным пространством коразмерности 3	$1/2$
1.16	54	Q , т.е. гиперповерхность степени 2 в $\mathbb{P}^4$	$1/3$
1.17	64	$\mathbb{P}^3$	$1/4$
2.1	4	раздутие многообразия Фано V_1 в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из линейной системы $ \frac{1}{2} K_{V_1} $	$1/2$
2.2	6	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, разветвленное в дивизоре бистепени $(2, 4)$	$\leq 13/14$
2.3	8	раздутие многообразия Фано V_2 в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из линейной системы $ \frac{1}{2} K_{V_2} $	$1/2$
2.4	10	раздутие $\mathbb{P}^3$ в пересечении двух кубик	$3/4\star$
2.5	12	раздутие многообразия $V_3 \subset \mathbb{P}^4$ в плоской кубической кривой	$1/2\star$
2.6	12	дивизор бистепени $(2, 2)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ или двойное накрытие многообразия W , разветвленное в поверхности из линейной системы $ -K_W $	?
2.7	14	раздутие Q в пересечении двух дивизоров из линейной системы $ \mathcal{O}_Q(2) $	$\leq 2/3$
2.8	14	двойное накрытие V_7 , разветвленное в дивизоре из линейной системы $ -K_{V_7} $	$1/2\star$
2.9	16	раздутие $\mathbb{P}^3$ в кривой степени 7 рода 5, являющейся пересечением кубик	$\leq 3/4$
2.10	16	раздутие $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух гиперплоских сечений	$1/2\star$
2.11	18	раздутие V_3 в прямой	$1/2\star$
2.12	20	раздутие $\mathbb{P}^3$ в кривой степени 6 рода 3, являющейся пересечением кубик	$\leq 3/4$
2.13	20	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в кривой степени 6 рода 2	$\leq 2/3$
2.14	20	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух гиперплоских сечений	$1/2\star$
2.15	22	раздутие $\mathbb{P}^3$ в пересечении поверхностей степени 2 и 3	$1/2\star$
2.16	22	раздутие $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ в конике	$\leq 1/2$
2.17	24	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в нормальной эллиптической кривой степени 5	$\leq 2/3$

2.18	24	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, разветвленное в дивизоре бистепени $(2, 2)$	$1/2$
2.19	26	раздутие $V_4 \subset \mathbb{P}^5$ в прямой	$1/2\star$
2.20	26	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ в скрученной кубике	$\leq 1/2$
2.21	28	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в нормальной рациональной квартике	$\leq 2/3$
2.22	30	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ в конике	$\leq 1/2$
2.23	30	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в кривой степени 4, являющейся пересечением поверхности из $ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1) _Q $ и поверхности из $ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2) _Q $	$1/3\star$
2.24	30	дивизор бистепени $(1, 2)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$1/2\star$
2.25	32	раздутие $\mathbb{P}^3$ в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух квадрик	$1/2$
2.26	34	раздутие $V_5 \subset \mathbb{P}^6$ в прямой	$1/2\star$
2.27	38	раздутие $\mathbb{P}^3$ в скрученной кубике	$1/2$
2.28	40	раздутие $\mathbb{P}^3$ в плоской кубике	$1/4$
2.29	40	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в конике	$1/3$
2.30	46	раздутие $\mathbb{P}^3$ в конике	$1/4$
2.31	46	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в прямой	$1/3$
2.32	48	W , т. е. дивизор бистепени $(1, 1)$ на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$1/2$
2.33	54	раздутие $\mathbb{P}^3$ в прямой	$1/4$
2.34	54	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$1/3$
2.35	56	$V_7 \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$	$1/4$
2.36	62	$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$	$1/5$
3.1	12	двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, разветвленное в дивизоре тристепени $(2, 2, 2)$	$3/4\star$
3.2	14	дивизор на $\mathbb{P}^2$ -расслоении $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(-1, -1))$ такой, что $X \in L^{\otimes 2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2, 3) $, где L – тавтологическое линейное расслоение	$1/2\star$
3.3	18	дивизор тристепени $(1, 1, 2)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$2/3\star$
3.4	18	раздутие трехмерного многообразия Фано Y с $\mathbf{J}(Y) = 2.18$ в неособом слое композиции $Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ двойного накрытия и проекции	$1/2$
3.5	20	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ в кривой C бистепени $(5, 2)$ такой, что композиция $C \hookrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ является вложением	$1/2\star$
3.6	22	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении прямой и нормальной эллиптической кривой степени 4	$1/2\star$
3.7	24	раздутие многообразия W в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из линейной системы $ \frac{1}{2}K_W $	$1/2\star$
3.8	24	дивизор из линейной системы $ (\alpha \circ \pi_1)^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \otimes \pi_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) $, где $\pi_1: \mathcal{F}_1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{F}_1$ и $\pi_2: \mathcal{F}_1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – проекции, а $\alpha: \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие точки	$1/2\star$
3.9	26	раздутие конуса $W_4 \subset \mathbb{P}^6$ над поверхностью Веронезе $R_4 \subset \mathbb{P}^5$ с центром в несвязном объединении вершины и квартики на $R_4 \cong \mathbb{P}^2$	$1/3$
3.10	26	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в несвязном объединении двух коник	$1/2$

3.11	28	раздутие многообразия V_7 в эллиптической кривой, являющейся пересечением двух дивизоров из линейной системы $ - \frac{1}{2} K_{V_7} $	$1/2$
3.12	28	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении прямой и скрученной кубики	$1/2$
3.13	30	раздутие $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ в кривой C бистепени $(2, 2)$ такой, что $\pi_1(C) \subset \mathbb{P}^2$ и $\pi_2(C) \subset \mathbb{P}^2$ являются неприводимыми кониками, где $\pi_1: W \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $\pi_2: W \rightarrow \mathbb{P}^2$ – естественные проекции	$\leq 1/2$
3.14	32	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении плоской кубической кривой, содержащейся в плоскости $\Pi \subset \mathbb{P}^3$, и точки, не содержащейся в Π	$1/2$
3.15	32	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в несвязном объединении прямой и коники	$1/2$
3.16	34	раздутие V_7 в собственном прообразе при раздутии $\alpha: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^3$ скрученной кубики, проходящей через центр раздутия α	$1/2$
3.17	36	дивизор тристепени $(1, 1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$	$1/2$
3.18	36	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении прямой и коники	$1/3$
3.19	38	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в двух неколлинеарных точках	$1/3$
3.20	38	раздутие $Q \subset \mathbb{P}^4$ в несвязном объединении двух прямых	$1/3$
3.21	38	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ в кривой бистепени $(2, 1)$	$1/3$
3.22	40	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ в конике, содержащейся в слое проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$	$1/3$
3.23	42	раздутие V_7 в собственном прообразе при раздутии $\alpha: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^3$ неприводимой коники, проходящей через центр раздутия α	$1/4$
3.24	42	$W \times_{\mathbb{P}^2} \mathbb{F}_1$, где отображение $W \rightarrow \mathbb{P}^2$ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, а отображение $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутием точки	$1/3$
3.25	44	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении двух прямых	$1/3$
3.26	46	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении точки и прямой	$1/4$
3.27	48	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$1/2$
3.28	48	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$	$1/3$
3.29	50	раздутие V_7 в прямой, лежащей на $E \cong \mathbb{P}^2$, где E – исключительный дивизор раздутия $V_7 \rightarrow \mathbb{P}^3$	$1/5$
3.30	50	раздутие V_7 в собственном прообразе при раздутии $\alpha: V_7 \rightarrow \mathbb{P}^3$ прямой, проходящей через центр раздутия α	$1/4$
3.31	52	раздутие конуса над неособой квадрикой в $\mathbb{P}^3$ в вершине	$1/3$
4.1	24	дивизор мультистепени $(1, 1, 1, 1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	$1/2$
4.2	28	раздутие конуса над неособой квадрикой $S \subset \mathbb{P}^3$ в несвязном объединении вершины и эллиптической кривой на S	$1/2$
4.3	30	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в кривой тристепени $(1, 1, 2)$	$1/2$
4.4	32	раздутие неособого трехмерного многообразия Фано Y с $\mathbf{J}(Y) = 3.19$ в собственном прообразе коники, лежащей на квадрике $Q \subset \mathbb{P}^4$ и проходящей через оба центра раздутия $Y \rightarrow Q$	$1/3$

4.5	32	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ в несвязном объединении двух неприводимых кривых бистепеней $(2, 1)$ и $(1, 0)$	$3/7$
4.6	34	раздутие $\mathbb{P}^3$ в несвязном объединении трех прямых	$1/2$
4.7	36	раздутие $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ в несвязном объединении двух кривых бистепеней $(0, 1)$ и $(1, 0)$	$1/2$
4.8	38	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в кривой тристепени $(0, 1, 1)$	$1/3$
4.9	40	раздутие неособого трехмерного многообразия Фано Y с $\mathfrak{I}(Y) = 3.25$ в кривой, стягиваемой отображением $Y \rightarrow \mathbb{P}^3$	$1/3$
4.10	42	$\mathbb{P}^1 \times S_7$	$1/3$
4.11	44	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1$ в кривой $C \cong \mathbb{P}^1$ такой, что C содержится в слое $F \cong \mathbb{F}_1$ проекции $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ и $C \cdot C = -1$ на F	$1/3$
4.12	46	раздутие неособого трехмерного многообразия Фано Y с $\mathfrak{I}(Y) = 2.33$ в двух кривых, стягиваемых отображением $Y \rightarrow \mathbb{P}^3$	$1/4$
4.13	26	раздутие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в кривой тристепени $(1, 1, 3)$	$1/2\star$
5.1	28	раздутие неособого трехмерного многообразия Фано Y с $\mathfrak{I}(Y) = 2.29$ в трех кривых, стягиваемых отображением $Y \rightarrow Q$	$1/3$
5.2	36	раздутие неособого трехмерного многообразия Фано Y с $\mathfrak{I}(Y) = 3.25$ в двух кривых $C_1 \neq C_2$, стягиваемых отображением $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ и содержащихся в одном и том же исключительном дивизоре раздутия φ	$1/3$
5.3	36	$\mathbb{P}^1 \times S_6$	$1/2$
5.4	30	$\mathbb{P}^1 \times S_5$	$1/2$
5.5	24	$\mathbb{P}^1 \times S_4$	$1/2$
5.6	18	$\mathbb{P}^1 \times S_3$	$1/2$
5.7	12	$\mathbb{P}^1 \times S_2$	$1/2$
5.8	6	$\mathbb{P}^1 \times S_1$	$1/2$

Список литературы

- [1] J. Kollár, “Singularities of pairs”, *Algebraic geometry* (Santa Cruz, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 221–287.
- [2] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, “Fano varieties”, *Algebraic geometry*, Vol. V, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer, Berlin, 1999, 1–245.
- [3] G. Tian, “On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $c_1(M) > 0$ ”, *Invent. Math.*, **89** (1987), 225–246.
- [4] Q. Zhang, “Rational connectedness of log $\mathbb{Q}$ -Fano varieties”, *J. Reine Angew. Math.*, **590** (2006), 131–142.
- [5] И. А. Чельцов, “Лог-канонические пороги на гиперповерхностях”, *Матем. сб.*, **192:8** (2001), 155–172; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Log canonical thresholds on hypersurfaces”, *Sb. Math.*, **192:8** (2001), 1241–1257.
- [6] Jun-Muk Hwang, “Log canonical thresholds of divisors on Fano manifolds of Picard rank 1”, *Compos. Math.*, **143:1** (2007), 89–94.
- [7] А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:6** (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69:6** (2005), 1225–1255.

- [8] I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Log canonical thresholds of certain Fano hypersurfaces*, [arXiv: abs/0706.0751v1](#), 2007.
- [9] A. R. Iano-Fletcher, “Working with weighted complete intersections”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 101–173.
- [10] J. M. Johnson, J. Kollár, “Fano hypersurfaces in weighted projective 4-spaces”, *Experiment. Math.*, **10**:1 (2001), 151–158.
- [11] I. Cheltsov, “Fano varieties with many selfmaps”, *Adv. Math.*, **217**:1 (2008), 97–124.
- [12] И. А. Чельцов, “Экстремальные метрики на двух многообразиях Фано”, *Матем. сб.* (в печати).
- [13] И. А. Чельцов, “Двойные пространства с особенностями”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 131–148; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Double spaces with isolated singularities”, *Sb. Math.*, **199**:2 (2008), 291–306.
- [14] I. Cheltsov, “Log canonical thresholds of del Pezzo surfaces”, *Geom. Funct. Anal.* (to appear).
- [15] M. Furushima, “Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space C^3 ”, *Nagoya Math. J.*, **104** (1986), 1–28.
- [16] J. W. Bruce, C. T. C. Wall, “On the classification of cubic surfaces”, *J. London Math. Soc.* (2), **19**:2 (1979), 245–256.
- [17] I. Cheltsov, *On singular cubic surfaces*, [arXiv: abs/0706.2666](#), 2007.
- [18] G. Tian, “On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds”, *J. Differential Geom.*, **32**:1 (1990), 99–130.
- [19] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, *Finite subgroups of the plane Cremona group*, [arXiv: abs/math/0610595v3](#), 2006.
- [20] A. M. Nadel, “Multiplier ideal sheaves and Kähler–Einstein metrics of positive scalar curvature”, *Ann. of Math.* (2), **132**:3 (1990), 549–596.
- [21] J.-P. Demailly, J. Kollár, “Semi-continuity of complex singularity exponents and Kähler–Einstein metrics on Fano orbifolds”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **34**:4 (2001), 525–556.
- [22] T. Aubin, “Équations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes”, *Bull. Sci. Math.* (2), **102**:1 (1978), 63–95.
- [23] S. T. Yau, “On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation. I”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.
- [24] S. T. Yau, “Review on Kähler–Einstein metrics in algebraic geometry”, *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry* (Ramat Gan, 1993), Israel Math. Conf. Proc., **9**, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996, 433–443.
- [25] Y. Matsushima, “Sur la structure du groupe d’homéomorphismes analytiques d’une certaine variété kählérienne”, *Nagoya Math. J.*, **11** (1957), 145–150.
- [26] M. Lübke, “Stability of Einstein–Hermitian vector bundles”, *Manuscripta Math.*, **42**:2–3 (1983), 245–257.
- [27] A. Futaki, “An obstruction to the existence of Einstein–Kähler metrics”, *Invent. Math.*, **73**:3 (1983), 437–443.
- [28] A. Steffens, “On the stability of the tangent bundle of Fano manifolds”, *Math. Ann.*, **304**:4 (1996), 635–643.
- [29] T. Mabuchi, “Einstein–Kähler forms, Futaki invariants and convex geometry on toric Fano varieties”, *Osaka J. Math.*, **24** (1987), 705–737.

- [30] V. Batyrev, E. Selivanova, “Einstein–Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds”, *J. Reine Angew. Math.*, **512** (1999), 225–236.
- [31] Xu-Jia Wang, Xiaohua Zhu, “Kähler–Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class”, *Adv. Math.*, **188**:1 (2004), 87–103.
- [32] B. Nill, “Complete toric varieties with reductive automorphism group”, *Math. Z.*, **252**:4 (2006), 767–786.
- [33] G. Tian, “On Calabi’s conjecture for complex surfaces with positive first Chern class”, *Invent. Math.*, **101**:1 (1990), 101–172.
- [34] H. Matsumura, P. Monsky, “On the automorphisms of hypersurfaces”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **3** (1964), 347–361.
- [35] C. Arezzo, A. Ghigi, G. Pirola, “Symmetries, quotients and Kähler–Einstein metrics”, *J. Reine Angew. Math.*, **591** (2006), 177–200.
- [36] J. Park, “Birational maps of del Pezzo fibrations”, *J. Reine Angew. Math.*, **538** (2001), 213–221.
- [37] A. Corti, “Del Pezzo surfaces over Dedekind schemes”, *Ann. of Math. (2)*, **144**:3 (1996), 641–683.
- [38] И. А. Чельцов, “Бирационально жесткие многообразия Фано”, *УМН*, **60**:5 (2005), 71–160; англ. пер.: I. A. Cheltsov, “Birationally rigid Fano varieties”, *Russian Math. Surveys*, **60**:5 (2005), 875–965.
- [39] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type*, [arXiv: math/0610203](https://arxiv.org/abs/math/0610203), 2006.
- [40] В. В. Шокуров, “Трехмерные логперестройки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:1 (1992), 105–203; англ. пер.: V. V. Shokurov, “3-fold log flips”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **40**:1 (1993), 875–965.
- [41] J. Kollár, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [42] Ю. И. Манин, “Рациональные поверхности над совершенными полями. II”, *Матем. сб.*, **72**(114):2 (1967), 161–192; англ. пер.: Yu. I. Manin, “Rational surfaces over perfect fields. II”, *Math. USSR Sb.*, **1**:2 (1967), 141–169.
- [43] A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
- [44] В. А. Исковских, “Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий”, *Итоги науки и техники. Современ. пробл. матем.*, **12**, ВИНТИ, М., 1979, 159–236; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties”, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **13**:6 (1980), 815–868.
- [45] J. Kollár, “Birational rigidity of Fano varieties and field extensions”, *Тр. МИАН*, **264**, 2009 (в печати).
- [46] A. Corti, A. Pukhlikov, M. Reid, “Fano 3-fold hypersurfaces”, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 175–258.
- [47] I. Cheltsov, J. Park, “Weighted Fano threefold hypersurfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **600** (2006), 81–116.
- [48] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Fano 3-folds. I”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:3 (1977), 485–527.
- [49] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 504–549; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Fano 3-folds. II”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:3 (1978), 469–506.
- [50] S. Mori, S. Mukai, “Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ”, *Manuscripta Math.*, **36**:2 (1981), 147–162.

- [51] S. Mori, S. Mukai, “Erratum: ‘Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ’”, *Manuscripta Math.*, **110**:3 (2003), 407.
- [52] S. Mori, S. Mukai, “On Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$ ”, *Algebraic varieties and analytic varieties* (Tokyo, 1981), Adv. Stud. Pure Math., **1**, North-Holland, Amsterdam, 1983, 101–129.
- [53] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. II. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [54] E. Viehweg, *Quasi-projective moduli for polarized manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **30**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [55] J. Song, “The α -invariant on toric Fano threefolds”, *Amer. J. Math.*, **127**:6 (2005), 1247–1259.
- [56] W. Fulton, “Introduction to toric varieties”, *The 1989 William H. Roever lectures in geometry*, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [57] В. Г. Саркисов, “Бирациональные автоморфизмы расслоений коник”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 918–945; англ. пер.: V. G. Sarkisov, “Birational automorphisms of conic bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:1 (1981), 177–202.
- [58] M. Szurek, J. Wiśniewski, “Fano bundles of rank 2 on surfaces”, *Algebraic geometry* (Berlin, 1988), Compos. Math., **76**, № 1–2, 1990, 295–305.
- [59] P. Jahnke, T. Peternell, I. Radloff, *Threefolds with big and nef anticanonical bundles. II*, [arXiv: 0710.2763](https://arxiv.org/abs/0710.2763), 2007.
- [60] P. Jahnke, T. Peternell, *Almost del Pezzo manifolds*, [arXiv: math/0612516](https://arxiv.org/abs/math/0612516), 2006.
- [61] M. Furushima, “Singular Fano compactifications of $\mathbb{C}^3$. I”, *Math. Z.*, **248**:4 (2004), 709–723.
- [62] В. В. Шокуров, “Существование прямой на многообразии Фано”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 922–964; англ. пер.: V. V. Šokurov, “Birational automorphisms of conic bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **15**:1 (1980), 173–209.
- [63] J.-P. Demailly, “Regularization of closed positive currents and intersection theory”, *J. Algebraic Geom.*, **1**:3 (1992), 361–409.
- [64] J. Johnson, J. Kollár, “Kähler–Einstein metrics on log del Pezzo surfaces in weighted projective 3-spaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **51**:1 (2001), 69–79.
- [65] C. Boyer, K. Galicki, J. Kollár, “Einstein metrics on spheres”, *Ann. of Math.* (2), **162**:1 (2005), 557–580.
- [66] J.-P. Demailly, “Singular Hermitian metrics on positive line bundles”, *Complex algebraic varieties* (Bayreuth, 1990), Lecture Notes in Math., **1507**, Springer, Berlin, 1992, 87–104.
- [67] А. Н. Варченко, “Комплексный показатель особенности не меняется вдоль страта $\mu = \text{const}$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:1 (1982), 1–12; англ. пер.: A. N. Varchenko, “The complex exponent of a singularity does not change along strata $\mu = \text{const}$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:1 (1982), 1–9.
- [68] А. Н. Варченко, “О полунепрерывности комплексного показателя особенности”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:4 (1983), 77–78; англ. пер.: A. N. Varchenko, “Semicontinuity of the complex singularity index”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:4 (1983), 307–309.
- [69] В. И. Арнольд, С. М. Гусейн-Заде, А. Н. Варченко, *Особенности дифференцируемых отображений. II. Монодромия и асимптотики интегралов*, Наука, М., 1984; англ. пер.: V. I. Arnol’d, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps. Vol. II. Monodromy and asymptotics of integrals*, Monogr. Math., **83**, Birkhäuser, Boston, 1988.

- [70] Y. T. Siu, “The existence of Kähler–Einstein metrics on manifolds with positive anticanonical line bundle and a suitable finite symmetry group”, *Ann. of Math.* (2), **127**:3 (1988), 585–627.
- [71] T. Ohsawa, K. Takegoshi, “On the extension of L^2 holomorphic functions”, *Math. Z.*, **195**:2 (1987), 197–204.
- [72] T. Ohsawa, “On the extension of L^2 holomorphic functions. II”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **24**:2 (1988), 265–275.
- [73] J.-P. Demailly, “Estimations L^2 pour l’opérateur $\bar{\partial}$ d’un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d’une variété kählérienne complète”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **15**:3 (1982), 457–511.

И. А. Чельцов (I. A. Cheltsov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию

26.07.2008

К. А. Шрамов (K. A. Shramov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: shramov@mccme.ru