Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Князева, Г. Ю. Панина, О неизотопных седловых
ежах, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:11:37

О неизотопных седловых ежах

М. Г. Князева, Г. Ю. Панина

В 2001 г. французский математик И. Мартинес-Мор построил следующий интересный объект [1]. Это ориентированная замкнутая поверхность M в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 1), обладающая следующими свойствами.

1) Поверхность M гладкая и седловая во всех своих точках (за исключением четырех, называемых *рогами*).

2) Поверхность M обладает корректно определенной непрерывной опорной функцией. В частности, это свойство означает, что гауссово отображение $M \rightarrow S^2$ инъективно.

3) Опорная функция h_M поверхности M гладкая, и ее график есть гладкая седловая поверхность.

Рис. 1. Поверхность M

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Замкнутые поверхности, обладающие свойством 2), называются *ежами*. Замкнутые поверхности, обладающие свойствами 1)–3), называются *седловыми* (или *гиперболическими*) *ежами с четырьмя рогами*.

Поверхность M интересна сразу с нескольких точек зрения:

1) она представляет собой новый тип седловой поверхности (пропущенный в существовавшей до сих пор классификации);

2) она порождает контрпример к следующей гипотезе А. Д. Александрова (подробнее об этом см. [1]–[4]): *пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – гладкое выпуклое тело; если для постоянной C в каждой точке границы ∂K выполнено неравенство $R_1 \leq C \leq R_2$, то тело K – шар (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны ∂K)* [5];

3) другие приложения см. на сайте [4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что седловые ежи с четырьмя рогами L и N *изотопны*, если существует непрерывное семейство N_t , $t \in [0, 1]$, седловых ежей с четырьмя рогами таких, что $N_0 = L$ и $N_1 = N$.

Настоящая статья анонсирует следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Существует поверхность N , обладающая свойствами 1)–3), не изотопная поверхности M . При этом пример поверхности N построен явно.*

Построенная поверхность N порождает новый контрпример к гипотезе А. Д. Александрова и представляет новый тип седловой поверхности (по сравнению с уже известными, включая поверхность M).

Мы располагаем двумя способами ее построения. У каждого из них есть свои преимущества и свои недостатки. В обоих случаях сначала строится дискретный аналог седлового ежа – так называемый *гиперболический виртуальный многогранник* N' (здесь используется техника, разработанная в [6] и развитая далее в [2], [3]).

Благодаря существующей технике сглаживания (см. [3]), гладкая поверхность N получается автоматически.

Первый способ построения (Г. Ю. Панина). Мы строим не саму многогранную поверхность N' , а двойственный объект – график ее опорной функции Γ , натягивая его на специальным образом построенное зацепление. При этом остаются неясными внешнегеометрические свойства самой поверхности N' . Она, разумеется, определяется графиком Γ , но явные вычисления и визуализация технически трудны.

Второй способ (М. Г. Князева). Форма искомой поверхности была угадана, после чего был предъявлен гиперболический виртуальный многогранник (рис. 2). Это поверхность тетраэдра с четырьмя приклеенными дважды покрытыми треугольниками.

Неизотопность ежей M и N вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 4. *Образ рога всякого гладкого гиперболического ежа при отображении Гаусса содержит большой полукруг (т. е. половину большого круга).*

Следовательно, всякий гиперболический еж с четырьмя рогами порождает конфигурацию четырех непересекающихся больших полукругов на единичной сфере.

Рис. 2

Рис. 3

Однако известно [1], что еж M порождает конфигурацию I (см. рис. 3, слева), тогда как ежи N порождают конфигурацию II (см. рис. 3, справа). Именно эта цель преследовалась при построении N . А эти две конфигурации неизотопны, т. е. они не переводятся одна в другую непрерывным движением, избегая самопересечений.

Список литературы

- [1] Y. Martinez-Maure, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I Math.*, **332**:1 (2001), 41–44.
 [2] G. Panina, *Adv. Geom.*, **5** (2005), 301–317. [3] G. Panina, *Cent. Eur. J. Math.*, **4**:2 (2006), 270–293. [4] <http://club.pdmi.ras.ru/~panina/hyperbolicpolytopes.html> (сайт, посвященный гиперболическим виртуальным многогранникам). [5] А. Д. Александров, *Докл. АН СССР*, **22**:3 (1939), 99–102. [6] А. Пухликов, А. Хованский, *Алгебра и анализ*, **4**:2 (1992), 161–185; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, A. G. Khovanskii, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:2 (1993), 337–356.

М. Г. Князева (M. G. Knyazeva)
 Санкт-Петербургский институт информатики
 и автоматизации РАН
E-mail: marinakn@mail.ru

Г. Ю. Панина (G. Yu. Panina)
 Санкт-Петербургский институт информатики
 и автоматизации РАН
E-mail: panina@ias.spb.su

Представлено В. М. Бухштабером
 Принято редколлегией
 01.08.2008