Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Асимптотический анализ моделей авто-
резонанса, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 3–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:34:58

УДК 517.956

Асимптотический анализ моделей авторезонанса**Л. А. Калякин**

В последние десятилетия в теории колебаний появились новые задачи, которые связаны с исследованием физического явления, известного под названием авторезонанс. В данной статье приводится обзор результатов по асимптотическому анализу таких задач. Рассматриваются системы дифференциальных уравнений, соответствующие нелинейным неавтономным осцилляторам с переменной частотой накачки. Для их решений строятся асимптотики либо по малому параметру, либо по независимой переменной.

Библиография: 151 название.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
1. Авторезонанс вдали от равновесия	10
1.1. Постановка задачи и результат	11
1.2. Асимптотическое решение на далеких временах	14
1.3. Начальный этап захвата в резонанс. Вывод фазового уравнения	16
1.4. Условия резонансного захвата	18
1.5. Прохождение системы через резонанс	20
2. Критическая энергия	21
2.1. Постановка проблемы и результат	22
2.2. Начальный этап захвата в резонанс	23
2.3. Асимптотики решений усредненных уравнений	24
2.4. Промежуточные асимптотики	26
2.5. Проблема перехода через критическую энергию	27
3. Авторезонанс вблизи равновесия	29
3.1. Постановка задачи и результат	30
3.2. Начальный этап захвата в резонанс. Уравнения главного резонанса	32
3.3. Асимптотики решений для уравнений главного резонанса	33
3.4. Авторезонанс на субгармониках	36

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 00-06-00124, 06-01-92052), INTAS (грант № 03-51-4286) и программы “Ведущие научные школы” НШ-2215.2008.1.

© Л. А. Калякин, 2008

4. Параметрический авторезонанс	36
4.1. Постановка задачи и результат	37
4.2. Уравнения главного параметрического резонанса	39
4.3. Асимптотики решений для уравнений главного параметрического резонанса	40
5. Конечномерные системы	42
5.1. Вывод усредненных уравнений	43
5.2. Решения с ограниченными амплитудами	44
5.3. Резонансный захват в системе	45
6. Распределенные системы	50
6.1. Параметрическое возбуждение бризера	51
6.2. Начальный этап. Усредненные уравнения	54
6.3. Захват в резонанс при наличии диссипации	54
7. Адиабатические приближения	55
8. Численное моделирование	60
9. Заключение	63
Список литературы	64

Введение

Резонансом принято называть “явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний” [1], [2]. Открытие этого явления, несомненно, является одним из важнейших в естествознании; оно составляет основу огромного числа технологических решений, определяющих уровень развития современной техники. Для выявления роли резонансов в конкретных осциллирующих системах широко применяется математическое моделирование. Исходные математические модели обычно сводятся к дифференциальным уравнениям, для анализа решений которых используются периодические функции. Резонансам соответствуют определенные соотношения между параметрами уравнений, при выполнении которых резко меняется структура решения.

Простейший пример дает линейный осциллятор, возмущенный внешней периодической силой. Математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \cos(\Omega t), \quad \omega, \Omega, \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (0.1)$$

Случай, когда собственная частота ω не совпадает с частотой возмущения Ω , соответствует отсутствию резонанса. Все решения $x(t; \varepsilon) = A \cos(\omega t + S) - \varepsilon \cos(\Omega t)/(\Omega^2 - \omega^2)$ для любых констант A и S ограничены равномерно по $t \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$, и амплитуда колебаний мало меняется, если мала амплитуда накачки ε . Случай $\omega = \Omega$ соответствует резонансу. Для всех решений $x(t; \varepsilon) = A \cos(\omega t + S) + \varepsilon t \sin(\Omega t)/(2\Omega)$ амплитуда неограниченно растет и на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$ изменяется на величину порядка единицы независимо от начальных данных и амплитуды накачки ε . Амплитуда колебаний может оказаться большой при ненулевой, но малой расстройке частот, например, при

$0 < |\Omega^2 - \omega^2| = \varepsilon^2 \ll 1$; хотя в этом случае она остается ограниченной по времени.

В прикладных задачах зачастую ограничиваются анализом на уровне похожих линейных моделей. Однако возможности линейной теории весьма ограничены и в значительной степени давно исчерпаны. Этим, в частности, объясняется неуклонный рост интереса к нелинейным моделям, который стимулирует развитие теории дифференциальных уравнений в разных направлениях. В данной статье анализируются *нелинейные* дифференциальные уравнения с целью выявления резонансных эффектов, когда *амплитуды вынужденных колебаний изменяются на величину порядка единицы под действием малых неавтономных возмущений*. Рассматриваемые задачи происходят из разных разделов нелинейной физики и не являются плодом математических обобщений линейной теории. Более того, по сравнению с линейным случаем здесь обнаруживается ряд принципиально новых черт как в постановках задач, так и в результатах.

Главной особенностью в постановках задач является переменная, зависящая от времени частота возмущения. Этому требованию обязаны все рассматриваемые здесь резонансные эффекты. Обусловлено оно характерной чертой нелинейных уравнений: в невозмущенной автономной системе собственная частота зависит от решения, точнее, от выбора фазовой траектории¹. Для таких систем выполнение резонансного условия в начальный момент вовсе не гарантирует значительные изменения со временем амплитуды вынужденных (возмущенных) колебаний, поскольку с ростом амплитуды резонансное соотношение может нарушаться. В частности, для нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = \varepsilon \cos \varphi(t) \quad (0.2)$$

вдали от равновесия периодическая накачка с малой амплитудой ε и с постоянной (резонансной в начальный момент) частотой $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ приводит к изменению амплитуды колебаний на величину порядка квадратного корня $O(\sqrt{\varepsilon})$. Такое явление под названием *нелинейный резонанс* давно известно и считается хорошо изученным [6]–[9]. Резонансные эффекты с более значительным изменением амплитуды возможны при переменной, зависящей от времени частоте накачки, например при $\dot{\varphi}(t) = \omega + \alpha t$ ($\omega, \alpha = \text{const}$), и описываются терминами *авторезонанс* и *автофазировка*. Эти понятия возникли в физике и используются при исследовании явлений, в которых резонансы сохраняются “автоматически, сами собой”, при том, что параметры системы значительно меняются со временем; в частности, меняются частоты, составляющие резонансное соотношение.

Длительное удержание нелинейной системы в резонансе при медленной деформации частоты внешней накачки позволяет значительно изменить энергию системы даже при сколь угодно малой амплитуде возмущения. Подобный способ “накачки энергии” в нелинейную систему был открыт и впервые использован при создании ускорителей релятивистских частиц [10]–[13], и он до

¹Изохронные нелинейные системы, в которых собственные частоты не зависят от фазовой траектории [3]–[5], здесь не рассматриваются.

сих пор применяется в конструкциях наиболее мощных ускорителей. В грубой интерпретации обнаруженный эффект выглядит, как автоматическая подстройка системы под внешнее воздействие, так что сохраняется резонанс между собственной частотой и меняющейся со временем частотой внешней накачки. Первоначально это явление было названо автофазировкой, и его открытие было сделано на основе физических соображений. Теория автофазировки была предложена чуть позже [14]–[16] и в одном из вариантов свелась к выводу и анализу довольно простого, так называемого фазового уравнения (возмущенного маятника). Изложение этой теории можно найти в монографиях [17]–[20]. Со временем в похожих неавтономных задачах, например в теории плазмы [21]–[23], стал применяться термин авторезонанс, который используется и в данной работе. Широкое распространение явления авторезонанса в природе было осознано Л. Фридлиндом в начале 90-х годов, на пути анализа математических моделей для разных физических систем; соответствующие работы можно найти на сайте <http://www.phys.huji.ac.il/~lazar/>. Общей чертой всех таких систем является наличие собственных колебаний с частотой, зависящей от энергии. Авторезонанс обнаруживается при неавтономных возмущениях с медленно меняющейся частотой накачки. В известных монографиях по теории колебаний и волн [6], [7], [24], [25] это явление не обсуждается.

Относительно терминологии следует отметить, что понятие авторезонанса “между волной и частицей” впервые было введено в работе [26] применительно к системе, математическая модель которой представляется автономными нелинейными уравнениями. В этом случае изменение со временем собственных частот является внутренним свойством системы. В изученных ситуациях [26], [27] такое свойство обуславливается релятивистскими эффектами: изменением массы и частоты при изменении скорости частицы, а не изменением параметров внешней накачки. Поскольку физический механизм ускорения частиц здесь оказывается другим, то термин автофазировка не используется и соответствующие работы не упоминаются. Направление, связанное с разработкой идеи авторезонанса в таком смысле², получило значительное развитие в физике, что отражено в обзорах [28], [29]. Математические задачи здесь ставятся для автономных дифференциальных уравнений. Они состоят в идентификации тех решений, которые содержат неограниченный рост по времени энергии либо импульса. Такие задачи здесь не рассматриваются.

В данном обзоре приводятся результаты для неавтономных уравнений, моделирующих явление авторезонанса, первоначально называвшееся автофазировкой. Нетривиальность возникающих здесь задач обусловлена нелинейностью дифференциальных уравнений. Нелинейность и неавтономность математической модели представляют собой необходимые условия для адекватного описания этого явления. На уровне результатов наиболее заметное отличие от линейного случая проявляется в наличии богатых семейств резонансных и нерезонансных решений, которые существуют совместно, при одних и тех же значениях параметров в уравнениях. Чисто нелинейными являются наблюдаемые

²Здесь чаще используется термин “циклотронный авторезонанс” [26]. Возможно, более уместно было бы более общее название “внутренний авторезонанс”.

здесь пороговые эффекты, которые характеризуются тем, что возникновение авторезонанса зависит от амплитуды возмущения.

Наглядный пример системы, в которой возможен авторезонанс, дает физический маятник под действием осциллирующего внешнего момента. Задача состоит в изменении амплитуды колебаний на величину порядка единицы посредством малой накачки. Математическая модель записывается в виде дифференциального уравнения (0.2), в котором правая часть представляет заданный момент с малой амплитудой $0 < \varepsilon \ll 1$. По исходной постановке задача напоминает те, что решаются в теории управления движением. Однако имеются существенные отличия, которые не позволяют использовать приемы теории управления. Во-первых, здесь требуется контролировать пучок траекторий³, а не отдельную траекторию. Во-вторых, ограничены возможности управления весьма узким набором внешних частот, например, линейных по времени: $\dot{\varphi} = \Omega + \alpha t$.

Пусть невозмущенное (при $\varepsilon = 0$) периодическое решение маятника $x_0(t)$ фиксируется начальными данными $x(0) = x^0$, $\dot{x}(0) = y^0$. Интеграл энергии записывается в виде $\frac{1}{2} \dot{x}_0^2(t) - \cos x_0(t) = E_0 \equiv \frac{1}{2} (y^0)^2 - \cos x^0$, а соответствующая частота $\omega = \omega(E_0)$ выражается через эллиптический интеграл [30; гл. 4, § 5, п. 2, с. 267]. Свойства возмущенных колебаний $x = x(t; \varepsilon)$, $y = y(t; \varepsilon)$, ($\varepsilon \neq 0$) с теми же начальными данными зависят от заданной фазовой функции $\varphi(t)$. Известно, что при постоянной частоте накачки $\dot{\varphi}(t) = \Omega = \text{const}$ решение мало отличается от невозмущенного: $x = x_0(t) + \Delta_x(t; \varepsilon)$, $y = y_0(t) + \Delta_y(t; \varepsilon)$. Так, при отсутствии резонанса $\Omega \neq \omega(E_0)$ изменения будут порядка возмущения $\Delta \equiv |\Delta_x| + |\Delta_y| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, а в случае резонанса $\Omega = \omega(E_0)$ изменения несколько увеличиваются: $\Delta = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [6], [9]). Если же медленно менять частоту накачки $\dot{\varphi}(t) = \omega(E_0) + \alpha t$, $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$, то существуют решения с изменением энергии на величину порядка единицы: $\Delta = \mathcal{O}(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, на далеких временах $t \approx \varepsilon^{-1}$.

Эти результаты извлекаются из анализа дифференциального уравнения. В отличие от линейного случая анализ основан на приближенных решениях, поскольку в неавтономной задаче (0.2) для точных решений не известно никаких явных формул. Приближения носят характер асимптотик по малому параметру ε , т. е. неавтономные добавки в уравнениях считаются малыми, и точность предъявляемых результатов зависит от величины ε . Полное математическое исследование таких задач включает обоснование асимптотических разложений, которое представляет собой теорему существования в задаче для остатка асимптотики [31].

Анализ похожих дифференциальных уравнений с малым возмущением составляет предмет данной статьи. Построение асимптотик по малому параметру для рассматриваемого круга задач не содержит принципиальных новшеств. Здесь используется хорошо известный метод усреднения, изложенный, например, в [9], [32], [33]. Более оригинальной является идея [34], [35] комбинирования усреднения с методом согласования [36], что позволяет выявить наличие разных временных масштабов в асимптотике решения. Внимание в основном

³Например, в задаче о разгоне пучка частиц в ускорителе.

уделяется идентификации и анализу главных членов асимптотики на начальном этапе захвата в резонанс.

Главные члены асимптотики на этом этапе определяются из систем модельных уравнений, известных под названием *уравнения главного резонанса*. С исследованием их решений в асимптотике на бесконечности связаны основные математические достижения в теории авторезонанса. Приведем примеры систем такого типа для случая, когда в исходной модели не учитывается диссипация (сопротивление):

$$\frac{dR}{dT} = \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{dT} = R - \lambda T, \quad (0.3)$$

$$\frac{dR}{dT} = \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{dT} = R^2 - \lambda T, \quad (0.4)$$

$$\frac{dR}{dT} = \sin \Psi, \quad R \left[\frac{d\Psi}{dT} - R^2 + \lambda T \right] = b \cos \Psi, \quad (0.5)$$

$$\frac{dR}{dT} = R \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{dT} - R + \lambda T = b \cos \Psi. \quad (0.6)$$

Здесь $\lambda, b = \text{const} \neq 0$, искомые функции R, Ψ зависят от переменной $T \in \mathbb{R}$. Иногда эти уравнения записываются для функций $x(T), y(T)$ в декартовых координатах $x = R \cos \Psi, y = R \sin \Psi$, либо в комплексной форме для функции $A(T) = R \exp(i\Psi)$. Иногда вместо Ψ используется фаза $\Phi = \Psi + \lambda T^2/2$, так что неавтономность оказывается в аргументах тригонометрических функций, см. раздел 5. В других случаях на месте тригонометрических функций возникают общие периодические функции. Неавтономное слагаемое соответствует частоте внешней накачки в исходной задаче и в принципе может быть любой функцией. Линейное по времени изменение частоты накачки λT считается предпочтительным в физических экспериментах. Функция $R(T)$ обычно имеет смысл энергии, и интерес представляют решения с неограниченным ростом $R(T) \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$.

Большинство работ по авторезонансу опубликовано в физических журналах. Их содержание сводится к выводу уравнений главного резонанса с последующими примерами численных расчетов без аналитических исследований; см. статьи на сайте <http://www.phys.huji.ac.il/~lazar/>. Исключением является система (0.3), которая многократно выводилась в теории ускорителей [19], [37] и в задачах о нагреве плазмы [21]. В приведенном списке это единственная система, которая проинтегрирована и исследована с исчерпывающей полнотой. Она эквивалентна автономному уравнению $\ddot{\Psi} - \sin \Psi + \lambda = 0$, которое в физике принято называть фазовым уравнением⁴. Для остальных систем доказано, что соответствующие уравнения второго порядка никакими точечными заменами не сводятся к интегрируемым; в частности, они не удовлетворяют свойству Пенлеве [39]. Это создает проблемы с исследованием их решений. Тем не менее, все системы главного резонанса заслуживают всестороннего изуче-

⁴Термин неоднозначен. В теории синхронизации подобное “фазовое уравнение” [38] оказывается первого порядка, иногда его называют уравнением Адлера.

ния по причине как своей универсальности, так и физической осмысленности⁵. Они встречаются во многих ситуациях и впервые были выделены в конкретных физических задачах. Так, вторая система описывает режим ускорения вблизи критической энергии [19]. Система (0.5) была получена в работах [41], [42] для задач астрофизики и затем возникала в разных ситуациях [35], [43]–[46]. В связи с авторезонансом эта система впервые была выписана в [43]. Уравнения (0.6) были выведены для описания параметрического авторезонанса [47]–[49].

Особо следует указать на уравнения (0.5). Они многократно исследовались в адиабатическом приближении с построением асимптотики при $\lambda \rightarrow 0$. В таком подходе были решены трудные задачи о “захвате возмущенной траектории внутрь сепаратрисной петли” [50] и ряд других задач о динамической бифуркации решений [51]–[60].

Метод адиабатических приближений и результаты работ [50], [61]–[63] можно использовать для всех перечисленных систем, поскольку все они интегрируются в “замороженном” случае, когда медленно меняющийся коэффициент λT заменяется на константу. Однако возможности такого подхода весьма ограничены. В рассматриваемых задачах множитель λ характеризует отношение двух малых параметров: скорости изменения частоты накачки к некоторой степени амплитуды накачки $\lambda \approx \alpha/\varepsilon^\kappa$, например, при $\kappa = 1$, $\kappa = 4/3$ либо $\kappa = 2$. Величина λ^{-1} определяет характерное время авторезонанса. Во многих прикладных задачах желательно быстрое достижение авторезонансного эффекта (см. [19; гл. IV, § 7, с. 178]), что возможно за счет быстрого изменения коэффициента λT . Для этого малые параметры α , ε в накачке следует выбирать так, чтобы множитель λ был не малым. Но в таком случае адиабатические приближения неприменимы, и для решений модельных уравнений остается возможность анализа их асимптотики на бесконечности. На этом пути возникает новый класс задач об асимптотике для нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Они отличаются от тех, что исследованы в [64], [65], наличием осцилляций в решениях. К настоящему времени такие задачи проанализированы для одномерных систем [66]–[69]. Для многомерных систем результатов почти нет [70].

Содержание данной статьи состоит из вывода модельных уравнений и асимптотического анализа их решений при $T \rightarrow \infty$. Уравнения главного резонанса получаются обычным методом усреднения [9], [32]. Они описывают медленные деформации параметров быстрых колебаний в главном члене асимптотики. В качестве таких параметров используется амплитуда (либо энергия) R и сдвиг фазы Ψ автономных невозмущенных колебаний. Эти переменные (типа действие–угол) обычно имеют определенный физический смысл и зачастую используются для записи исходных возмущенных уравнений. Масштаб медленного времени $T = \varepsilon^k t$ и вид усредненной системы определяется структурой возмущения. Например, при возмущении маятника можно прийти к уравнениям как (0.3), так и (0.5) либо (0.6). Мы попытались описать классы возмущений, которые приводят к той или иной усредненной системе.

⁵Несмотря на то что интегрируемость иногда считается критерием физической осмысленности уравнения [40].

Разумеется, все уравнения главного резонанса были давно выписаны в общей форме (см., например, [32; гл. III, § 19, (19.15), с. 282]). Новым является появление этих уравнений в контексте проблемы авторезонанса с постановкой для них специфических вопросов, которые в теории усреднения не обсуждаются, в частности, асимптотики на бесконечности. Подобные вопросы в теории дифференциальных уравнений можно рассматривать безотносительно к каким-либо приложениям. Связь с авторезонансом полезно иметь в виду ради постановок новых задач. Так, важнейшей целью теории авторезонанса является не столько решения уравнений главного резонанса и их асимптотики, сколько *области захвата* – множества начальных точек, из которых выходят решения с неограниченно растущей компонентой $R(T)$. Проблема областей захвата на уровне модельных уравнений решается сравнительно эффективно для малых значений λ , когда частота накачки меняется очень медленно. В таком случае дело сводится к известной задаче о прохождении через сепаратрису; на этом пути была обнаружена вероятностная природа захвата в резонанс в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ (см. [50], [62]). Таким образом, в главном члене асимптотики при $\lambda \rightarrow 0$ область захвата может быть описана в вероятностных терминах, следуя [50]. Для конечных значений $\lambda \approx 1$ проблема описания областей захвата решается численно, аналитические результаты отсутствуют за исключением случая интегрируемой системы (0.3). Наиболее интригующей математической задачей, которая связана с проблемой областей захвата, является нахождение формул связи для констант интегрирования в решениях уравнений главного резонанса, как это сделано для уравнений Пенлеве [71].

Отметим, что авторезонанс можно включить в общее (философское) понятие синхронизации, как оно дано в [38]: “подстройка ритмов осциллирующих объектов за счет слабого взаимодействия”. Однако известные математические исследования по синхронизации колебаний, изложенные в [25], имеют дело с системами, в которых частоты фиксированы; в [38] анализ концентрируется на автоколебательных системах вблизи предельного цикла. Теория синхронизации по постановке рассмотренных задач (подстройка фаз колебаний без значительного изменения амплитуды [38; гл. 7, п. 7.2, с. 232, 248]) в принципе не затрагивает описание авторезонанса. При этом не должно вводить в заблуждение общее использование терминов “захват фазы” (phase locking), “захват в резонанс (resonance capturing)” [38; гл. 7, п. 7.1, с. 243]. К рассматриваемой тематике гораздо ближе проблема захвата в резонанс, как она описана в [9].

Мы ограничиваемся анализом только детерминированных систем с регулярной динамикой. Авторезонанс в системах со случайными возмущениями и с динамическим хаосом в математических работах не обсуждался; эта тема заслуживает отдельного исследования.

1. Авторезонанс вдали от равновесия

Задача с малым параметром анализируется в подробном изложении с тем, чтобы показать суть дела как в постановке проблемы, так и в получаемых результатах. В общем виде задача была решена Б. В. Чириковым [37]; в частном

случае результаты составляют математическую основу теории ускорителей [19]. Эти результаты можно извлечь из общих соображений, приведенных в [9; гл. 5, § 1, п. 1.7, с. 170–175] для задачи о захвате в резонанс.

1.1. Постановка задачи и результат. Исходным объектом является система двух уравнений:

$$\frac{dE}{dt} = \varepsilon f(E, \psi, \varphi), \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega(E) + \varepsilon g(E, \psi, \varphi). \quad (1.1)$$

Здесь $\omega(E)$, $f(E, \psi, \varphi)$, $g(E, \psi, \varphi)$ – заданные гладкие (бесконечно дифференцируемые) действительные функции, 2π -периодические по ψ и по φ ; неавтономность характеризуется заданной функцией $\varphi = \varphi(t)$. Задача состоит в исследовании асимптотики по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ для двухпараметрического решения на большом промежутке времени $0 \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

В форме (1.1) обычно рассматриваются конкретные прикладные задачи (см., например, [19], [23]). При этом величина E имеет смысл энергии, ψ – фаза колебаний, параметр ε соответствует амплитуде внешней накачки, производная $\dot{\varphi}(t)$ именуется частотой накачки. Впрочем, любая система, которая является гамильтоновой в главном (при $\varepsilon = 0$), приводится к виду (1.1) в той части фазовой плоскости, которая занята замкнутыми траекториями невозмущенной автономной системы, т. е. на периодических решениях вдали от равновесия⁶. В таком случае функция $\omega(E) \neq 0$ определяет собственную частоту (невозмущенных) колебаний; ее зависимость от энергии E является характерной чертой нелинейных систем. Например, для модели маятника (0.2) переход к переменным E, ψ можно выполнить, сделав замену по формулам: $x = X(\frac{\psi}{\omega}(E), E)$, $\dot{x} = Y(\frac{\psi}{\omega}(E), E)$. Здесь используется двухпараметрическое периодическое решение невозмущенного маятника $X(t + \eta, E)$, $Y = \partial_t X(t + \eta, E)$ ($\eta, E = \text{const}$), которое соответствует первому интегралу $Y^2/2 - \cos X = E$; оно выписывается через эллиптические функции [30]. В исходной модели возмущение может быть более сложным по сравнению с приведенным в примере (0.2), например:

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \cos \varphi(t) \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right);$$

в уравнениях (1.1) от этого зависит вид функций f, g . Использование переменных типа действие–угол E, ψ выгодно простотой асимптотических конструкций.

Специфика задачи определяется свойствами собственной и вынуждающей частот. Считается, что начальное значение частоты накачки связано с собственной частотой (при некоторой энергии E_0) соотношением

$$p_0 \omega(E_0) + q_0 \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (1.2)$$

с целыми числами $p_0, q_0 \neq 0$. Предполагается, что значение E_0 является простым корнем этого уравнения, так что $\omega'(E_0) \neq 0$. Ввиду возможности замены $\psi \Rightarrow -\psi$, $\varphi \Rightarrow -\varphi$ частоты считаются положительными: $\omega(E) > 0$,

⁶Задача вблизи равновесия имеет свою специфику и будет обсуждаться в разделе 3.

$\dot{\varphi}(t) > 0$, а числа p_0, q_0 – противоположными по знаку, так что $\varrho = -q_0/p_0 > 0$. В простейшем случае резонансное условие выглядит, как равенство собственной и вынуждающей частот: $\omega(E_0) = \dot{\varphi}(0)$, так что при этом $\varrho = 1$.

Резонансные эффекты возникают при наличии в разложении Фурье

$$f(E, \psi, \varphi) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} f_{n,m}(E) \exp(in\psi + im\varphi)$$

ненулевых коэффициентов $f_{p,q} \neq 0$ с резонансными индексами: $-q/p = \varrho$. Эти коэффициенты фигурируют в периодической функции

$$\hat{f}(E, \Psi) = \sum_{-q/p=\varrho} f_{p,q}(E) \exp(ip\Psi),$$

которая возникает в усредненных уравнениях. В простейшем случае такое выражение состоит из пары комплексно сопряженных слагаемых с номерами $(\pm p_0, \pm q_0)$; например, в случае монохроматической накачки, когда $f = f(E, \psi) \exp(iq_0\varphi) + \text{с.с.}$ В общем случае функцию $\hat{f}(E, \Psi)$ можно представить через интеграл среднего значения

$$\hat{f}(E, \Psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E, \varrho\varphi + \Psi, \varphi) d\varphi. \quad (1.3)$$

Для возмущенных уравнений (1.1) анализируются решения $E(t; \varepsilon), \psi(t; \varepsilon)$, у которых в начальный момент энергия мало отличается от резонансной:

$$E(t; \varepsilon)|_{t=0} = E_0 + \Delta \quad (|\Delta| \ll 1), \quad \psi(t; \varepsilon)|_{t=0} = \psi_0. \quad (1.4)$$

Две начальные константы Δ, ψ_0 используются для идентификации двухпараметрического семейства решений.

Неавтономный характер возмущения определяется заданной функцией $\varphi(t)$. Основное ограничение для нее состоит в том, что вынуждающая частота $\dot{\varphi}(t)$ *медленно меняется*. Тем самым, в задаче постулируется еще один малый параметр. Мы ограничимся наиболее простой формой такой функции⁷: $\varphi = \Omega t + \alpha t^2/2$ ($\Omega = \text{const}$, $0 < |\alpha| \ll 1$). Таким образом, на временах не слишком далеких $t \ll 1/|\alpha|$ вынуждающая частота $\dot{\varphi} = \Omega + \alpha t$ близка к начальной $\dot{\varphi}|_{t=0} = \Omega$. На далеких временах $t \approx 1/|\alpha|$ частота отличается от Ω на значительную величину (порядка единицы).

В неавтономных задачах решение существенно зависит не только от начальной точки, но и от начального момента t_0 . В рассматриваемой постановке задачи с малыми параметрами частота меняется мало: $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(0) + \mathcal{O}(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$, на конечных временах $t = \mathcal{O}(1)$. Следовательно, в условиях (1.2), (1.4) изменение начального момента на величину порядка единицы можно отнести к начальному возмущению энергии. В таком случае без ограничения общности можно считать, что $t_0 = 0$.

⁷Более сложная зависимость исходных данных от малых параметров ε, α и времени t вполне возможна, но считается неуместной и ненужной при первоначальном знакомстве. Исследования с другими функциями $\varphi(t)$ содержатся в [60], [72]–[74].

Цель дальнейших построений – выявить условия на исходные данные на функции $f(E, \psi, \varphi)$, $g(E, \psi, \varphi)$ и на соотношение малых параметров ε , α , Δ , при которых поправка к энергии нарастает со временем и становится порядка единицы (не малой величиной), так что $E(t; \varepsilon) - E_0 = \mathcal{O}(1)$ на достаточно далеких временах. Такие решения будем называть авторезонансными; их существование не очевидно. Как увидим, на таких решениях производная $\dot{\psi}(t; \varepsilon)$, называемая далее *собственной частотой возмущенной системы*, оказывается асимптотически связанной с медленно меняющейся частотой накачки: $\dot{\psi}(t; \varepsilon) = \varrho \dot{\varphi}(t) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, вплоть до далеких времен $t = \mathcal{O}(\alpha^{-1})$. Это свойство интерпретируется, как *асимптотический захват в резонанс при $\varepsilon \rightarrow 0$* .

Искомые функции E , ψ зависят от времени t и малых параметров ε , α , Δ . Асимптотические приближения строятся по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде степенных рядов. Коэффициенты этих рядов зависят от t , ε , α , Δ и определяются из простых модельных уравнений. Получаемые асимптотические разложения при $\varepsilon \rightarrow 0$ оказываются равномерными по остальным переменным на соответствующих промежутках $0 \leq t \leq t_0(\varepsilon)$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0(\varepsilon)$, $0 \leq \Delta \leq \Delta_0(\varepsilon)$. Границы промежутков зависят от ε ; например, $t_0(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, $\alpha_0(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\Delta_0(\varepsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. В таком подходе более конкретная связь малых параметров, типа $\alpha = \varepsilon$, $\Delta = \sqrt{\varepsilon}$, оказывается ненужной⁸.

Предъявляемые ниже решения являются асимптотическими по параметру $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что при подстановке в уравнения получается невязка, малая при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t и по другим параметрам α , Δ на рассматриваемых промежутках, границы которых зависят от ε . Обоснование асимптотик здесь не обсуждается. Этот вопрос может быть решен отдельно [31], [75], [76], [69].

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнено условие (1.2) и имеются отличные от нуля коэффициенты Фурье с резонансными индексами, т.е. существуют p, q такие, что $f_{p,q}(E_0) \neq 0$ и $-q/p = \varrho$.

1. Чтобы при малых ε, α был возможен асимптотический захват в резонанс, необходимо выполнение “порогового условия”:

$$0 < |\varrho \alpha| \leq \varepsilon |\omega'(E_0)| \sup_{\Psi} |\hat{f}(E_0, \Psi)|. \quad (1.5)$$

2. Если выполнено неравенство (1.5), то существует множество начальных данных $D_{\text{capt}} = \{E_0 + \Delta, \psi_0\} \subset \mathbb{R}^2$ с $\Delta \leq \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, для которых решение задачи Коши (1.1), (1.4) захватывается в резонанс, так что энергия имеет асимптотику $E(t; \varepsilon) = \mathcal{E}_0(\Omega + \alpha t) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, и изменяется на величину порядка единицы при $t = \mathcal{O}(\alpha^{-1})$.

3. Для любых фиксированных начальных данных из оставшейся области $(\Delta, \psi_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}_{\text{capt}}$ решение задачи Коши не захватывается в резонанс и изменения энергии остается малым: $E(t; \varepsilon) = E_0 + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

4. Область захвата в авторезонанс описывается аналитически формулой (1.14) и содержит внутренность сепаратрисной петли для системы возмущенного маятника (1.9).

⁸Промежутки можно немного расширять по порядку малой величины ε с соответствующей потерей точности [36].

КОММЕНТАРИИ. 1. Уравнения с малым параметром типа (1.1) были объектом многочисленных исследований. Рассматриваемые нами задачи отличаются существенной зависимостью вынуждающей частоты $\dot{\varphi}(t)$ от времени. По этой причине прямо не применимы известные подходы к исследованию возмущенных гамильтоновых систем [9], [77], в частности, теория КАМ [78], а также теория нелинейного резонанса [6]–[8]. Гораздо ближе результаты о захвате в резонанс, приведенные в [9].

2. Адиабатические приближения здесь не годятся, поскольку уравнения содержат зависимость от быстрого времени. После усреднения уравнения снова содержат быстрое время (соответствующего масштаба).

3. При отсутствии захвата в резонанс структура решения с асимптотикой $E(t; \varepsilon) = E_0 + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ соответствует случаю нелинейного резонанса, когда частота накачки постоянна. Похожие эффекты с изменением энергии на величину порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ наблюдаются в случае локального резонанса. Мы не касаемся таких задач, поскольку в их решениях влияние возмущения остается малым. Укажем лишь первую работу в этом направлении [34], вариации на тему которой составляют суть многочисленных исследований как линейных, так и нелинейных уравнений.

Следующие три пункта содержат доказательство теоремы 1.1.

1.2. Асимптотическое решение на далеких временах. Простейший способ вычисления энергии в состоянии резонансного захвата состоит в решении уравнения

$$\omega(E) = \varrho \dot{\varphi}(t), \quad t > 0, \quad (1.6)$$

которое получается из требования асимптотической связи частот $\dot{\psi} = \varrho \dot{\varphi}(t) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом близости собственных частот возмущенной и невозмущенной задач. Поскольку при $t = 0$ это уравнение разрешимо в силу (1.2): $\omega(E_0) = \varrho \dot{\varphi}(0)$, и $\omega'(E_0) \neq 0$, то существует решение на некотором промежутке по $0 \leq t \leq \mathcal{O}(\alpha^{-1})$. В рассматриваемом случае найденная таким образом функция $E = \mathcal{E}_0(\Omega + \alpha t)$ представляет собой главный член асимптотики авторезонансного решения. Если ограничиться частным случаем, когда малые параметры связаны соотношением $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon)$, то на таком пути для уравнений (1.1) возможно построение полного асимптотического решения в виде рядов по степеням ε . Все коэффициенты определяются из алгебраических уравнений и зависят от переменных $t, \varepsilon t$. Детали этой конструкции, называемой внешним асимптотическим разложением, описаны в работах [73], [74], [79]–[82].

Однако построенное таким способом асимптотическое решение не содержит двухпараметрического произвола, характерного для решений дифференциальных уравнений второго порядка. На этом этапе остается неясным, как много решений имеют такого типа асимптотику. Тот факт, что не все решения выходят на резонансный режим, усматривается из результатов численных экспериментов (см., например, [43], [45], см. также рис. 7 на стр. 60 настоящей статьи). Поэтому возникает проблема идентификации тех решений дифференциальных уравнений (1.1), которые в своей асимптотике при $\varepsilon \rightarrow 0$ выходят на описанное

выше приближение с главным членом $\mathcal{E}_0(\Omega + \alpha t)$. Для ее решения используется другая асимптотическая конструкция.

Отличительной чертой изучаемой задачи является возникновение пограничного (начального) слоя, в котором происходит сравнительно быстрая перестройка решения. Характерный временной масштаб определяется медленной переменной $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$, которая оказывается быстрой по отношению к переменной εt , фигурирующей во внешнем разложении. По аналогии с задачами о погранслое получаемые здесь разложения можно называть внутренними. Подробные аргументы в пользу такой конструкции приведены в [73].

Подчеркнем, что появление квадратного корня из амплитуды накачки $\sqrt{\varepsilon}$ не является математической выдумкой [83]; такова природа асимптотических формул в рассматриваемых задачах. В этом можно убедиться на примере линейного осциллятора с вынуждающей силой, частота которой медленно меняется и проходит резонансное значение [84; гл. 4, § 22, п. 22.9, с. 103]; такой резонанс называют локальным. Среди линейных уравнений это будет ближайший “родственник” рассматриваемых нами задач:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \varepsilon \cos\left(t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\right), \quad t \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.7)$$

Здесь резонанс случается в момент $t = 0$. Точное частное решение выписывается через интеграл с быстро осциллирующей фазой:

$$x(t; \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon t} \sin\left(t - \frac{\eta}{\varepsilon}\right) \cos \frac{[\eta + \eta^2/2]}{\varepsilon} d\eta.$$

Его асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ извлекается методом стационарной фазы и в главном члене содержит $\sqrt{\varepsilon}$ с коэффициентом, зависящим от t и $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$:

$$x(t; \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{Im} \left(\exp(it) \int_0^\tau \exp\left(i \frac{\zeta^2}{2}\right) d\zeta \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Как видим, решение в главном представляет собой быстрые колебания с собственной частотой, амплитуда которых нарастает (в погранслоном масштабе $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$) и стабилизируется к $\sqrt{\varepsilon \pi/2}$ при $\tau \rightarrow \infty$. На далеких временах $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ (во внешней области) можно использовать формулу с постоянной амплитудой:

$$x(t; \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{Im} ([1 + i] \exp(it)) \sqrt{\pi/(2\sqrt{2})} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Для нелинейных уравнений типа маятника с резонансной накачкой (0.2) приведенные рассуждения в некоторой степени объясняют появление масштаба $\sqrt{\varepsilon} t$. Этот масштаб возникает при формальных построениях асимптотики вблизи резонанса независимо от того, меняется или нет частота накачки [6]. Переменная частота накачки ведет к тому, что для энергии E в коэффициентах асимптотики появляется возможность неограниченного роста при $\tau = \sqrt{\varepsilon} t \rightarrow \infty$. Процесс, описываемый такого типа решениями, идентифицируется как начальный этап захвата в резонанс. Согласование внутреннего и внешнего разложений в главных членах асимптотики следует из явных формул аналогично [73].

1.3. Начальный этап захвата в резонанс. Вывод фазового уравнения. Обсуждаемый подход основан на методе двухмасштабных разложений [32] с использованием медленного времени $\tau = \sqrt{\varepsilon} t$. В качестве быстрого времени удобно использовать фазу внешней накачки $\varphi(t)$; это несколько упрощает формулы⁹. Основная идея состоит в отыскании решения в виде функций, зависящих от двух переменных (двух времен): $E(t; \varepsilon) = \tilde{E}(\varphi, \tau; \varepsilon)$, $\psi(t; \varepsilon) = \varrho\varphi + \tilde{\psi}(\varphi, \tau; \varepsilon)$. Уравнения для $\tilde{E}$, $\tilde{\psi}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) \partial_{\varphi} \tilde{E} + \sqrt{\varepsilon} \partial_{\tau} \tilde{E} &= \varepsilon f(\tilde{E}, \tilde{\psi} + \varrho\varphi, \varphi), \\ \dot{\varphi}(t) [\varrho + \partial_{\varphi} \tilde{\psi}] + \sqrt{\varepsilon} \partial_{\tau} \tilde{\psi} &= \omega(\tilde{E}) + \varepsilon g(\tilde{E}, \tilde{\psi} + \varrho\varphi, \varphi).\end{aligned}$$

Асимптотическое решение строится в виде рядов по полумелым степеням малого параметра:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\varphi, \tau; \varepsilon) &= E_0 + \sqrt{\varepsilon} E_1(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/2} E_n(\varphi, \tau), \\ \tilde{\psi}(\varphi, \tau; \varepsilon) &= \Psi_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \Psi_n(\varphi, \tau).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Дополнительным условием к анзацу является требование периодичности коэффициентов $E_n(\varphi, \tau)$, $\Psi_n(\varphi, \tau)$ по быстрой переменной φ . Фактически, это секулярное условие обеспечивает асимптотическую структуру рядов при $\varepsilon \rightarrow 0$ на далеких временах $t \approx 1/\sqrt{\varepsilon}$. Впрочем, ряды остаются равномерно асимптотическими и на несколько более широком промежутке $0 \leq t \leq \varepsilon^{-1-\delta}$, $\delta > 0$, поскольку ограничен порядок роста коэффициентов при $\tau \rightarrow \infty$; это свойство служит основанием для согласования внутреннего разложения с внешним [36].

Зависимость от быстрой переменной φ в любом порядке приближения находится из рекуррентной системы дифференциальных уравнений. Их структура зависит от вида функции $\dot{\varphi}(t)$, в которой выделяется главная часть и поправка. В рассматриваемом случае используется представление $\dot{\varphi}(t) = \Omega + \sqrt{\varepsilon}(\alpha/\varepsilon)\tau$, так что уравнения имеют вид:

$$\Omega \partial_{\varphi} E_n = F_n(\varphi, \tau), \quad \Omega \partial_{\varphi} \Psi_{n-1} = G_{n-1}(\varphi, \tau), \quad n \geq 2.$$

Правые части вычисляются через предыдущие приближения; например,

$$F_2 = f(E_0, \Psi_0 + \varrho\varphi, \varphi) - E'_1(\tau), \quad G_1 = \omega'(E_0)E_1 - \frac{\varrho\alpha}{\varepsilon} \tau - \Psi'_0(\tau).$$

Секулярное условие приводит к требованию обращения в нуль средних значений (по φ) от правых частей. Так, на первых шагах получаем:

$$\frac{dE_1}{d\tau} = \hat{f}(E_0, \Psi_0), \quad \frac{d\Psi_0}{d\tau} = \omega'(E_0)E_1 - \frac{\varrho\alpha}{\varepsilon} \tau.\tag{1.9}$$

Эти условия представляют собой дифференциальные уравнения для медленно меняющихся функций $E_1(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$. Такие уравнения принято называть усредненными, и они, очевидно, получаются непосредственно из исходных (1.1) путем усреднения по быстрой переменной φ при указанной связи $\psi = \varrho\varphi + \Psi$. Их

⁹Поскольку частота $\dot{\varphi}(t)$ не обращается в нуль, замена t на φ обратима.

решения определяют первые нетривиальные слагаемые в рядах (1.8). В постановке задачи Коши эти уравнения дополняются соответствующими начальными условиями: $E_1|_{\tau=0} = \Delta/\sqrt{\varepsilon}$, $\Psi_0|_{\tau=0} = \psi_0$.

Последующие поправки находятся аналогично. Уравнения в быстрой переменной φ интегрируются в классе периодических функций. При этом на каждом шаге обнаруживается произвол – средние значения в виде неопределенных функций от медленной переменной τ . На следующем шаге для этих функций возникают дифференциальные уравнения, как следствия секулярного условия. Нелинейности встречаются лишь на исходном шаге в уравнениях (1.9).

В случае, когда среди резонансных коэффициентов отлична от нуля лишь сопряженная пара, получаем: $\hat{f}(E_0, \Psi_0) = f_{p,q}(E_0) \exp(ip\Psi_0) + \text{с.с.}$ при $-q/p = \varrho$. Тогда для комплексного коэффициента Фурье удобно использовать представление $f_{p,q} = F \exp(i\Phi)$ через действительные величины F , Φ . Если выполнить замену переменных $p\Psi_0 + \Phi + \pi/2 = \Psi$, $E_1 = 2F \cdot R$, то уравнения (1.9) приводятся к виду

$$\frac{dR}{d\tau} = \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \mu R - \nu \tau \quad (1.10)$$

с коэффициентами $\mu = p\omega'(E_0) \cdot 2F$, $\nu = -q\alpha/\varepsilon$. Они эквивалентны системе главного резонанса (0.3) с $\lambda = \nu/\mu$.

В частном случае при монохроматической накачке, когда возмущение представимо в виде $f = f(E, \psi) \cos \varphi$, условие резонанса с p -й гармоникой имеет вид $\dot{\varphi}(0) = p\omega(E_0)$. Коэффициенты в усредненных уравнениях (1.10) вычисляются по формулам $\mu = p\omega'(E_0)\sqrt{f_s^2 + f_c^2}$, $\nu = \alpha/\varepsilon$ через интегралы

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0, \zeta) \sin(p\zeta) d\zeta, \quad f_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(E_0, \zeta) \cos(p\zeta) d\zeta.$$

Система (1.9) эквивалентна автономному уравнению второго порядка, которое в случае монохроматической накачки выглядит наиболее просто:

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2} - \mu \sin \Psi + \nu = 0. \quad (1.11)$$

При этом поправка для энергии $E_1(\tau)$ определяется соотношением

$$E_1(\tau) = \left(\nu\tau + \frac{1}{p} \frac{d\Psi}{d\tau} \right) / \omega'(E_0). \quad (1.12)$$

Обратим внимание, что фазовое уравнение для $\Psi_0(\tau)$ может оказаться неавтономным и неинтегрируемым, если частоту накачки менять нелинейно, например при $\dot{\varphi} = \Omega + \alpha\tau^2$.

Ввиду взятого анзаца (1.8) на временном масштабе $\tau \approx 1$ энергия E остается постоянной в главном члене асимптотики: $E = E_0 + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Далее обсуждается вопрос, что происходит с первой поправкой $\sqrt{\varepsilon} E_1(\tau)$ при росте времени τ . Здесь возможны два варианта: либо поправки остаются малыми, порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, либо неограниченно растут при $\tau \rightarrow \infty$. Первый вариант соответствует нелинейному резонансу и случается независимо от того, меняется или нет частота внешней накачки. Второй вариант соответствует захвату в резонанс и случается лишь при переменной частоте внешней накачки, когда $\nu \neq 0$.

1.4. Условия резонансного захвата. Чтобы идентифицировать авторезонанс, надо в уравнениях (1.9) выделить решения с неограниченно растущей компонентой $E_1(\tau)$. Поскольку соответствующее уравнение второго порядка имеет первый интеграл, то свойства всех решений можно получить, не выписывая явного представления для $\Psi(\tau)$: достаточно проанализировать различные фазовые траектории. Рассмотрим случай с одной резонансной гармоникой, когда первый интеграл имеет вид $\dot{\Psi}^2/2 + \nu\Psi + \mu \cos \Psi = \text{const}$. Структура фазового портрета на плоскости $(\Psi, \dot{\Psi}) \in \mathbb{R}^2$ зависит от отношения ν/μ , см. рис. 1.

Если $|\nu/\mu| > 1$, то неподвижных точек не имеется. Фазовые траектории представляют собой периодически деформированные параболы. Все решения

Рис. 1. Фазовый портрет возмущенного маятника на плоскости с декартовыми координатами $\Psi, \dot{\Psi}$ при $\nu/\mu = -1.2$ и $\nu/\mu = -0.3$. Область захвата в авторезонанс содержит внутренность сепаратрисной петли и сепаратрисы, входящие в точку равновесия.

для $\Psi(\tau)$ неограничены на бесконечности вместе со своими производными: $\Psi(\tau) = -\nu\tau^2/2 + \mathcal{O}(\tau)$, $\tau \rightarrow \pm\infty$, и $\dot{\Psi}(\tau) = -\nu\tau + \mathcal{O}(1)$, $\tau \rightarrow \pm\infty$. В таком случае функция $E_1(\tau)$ в силу уравнения (1.12) остается ограниченной с ростом времени.

Вывод. Резонансный захват частоты невозможен, если частота накачки меняется слишком быстро по сравнению с величиной амплитуды, т.е. при $|\varrho\alpha| > \varepsilon|f_{p,q}\omega'(E_0)|$.

Иная ситуация в случае $|\nu/\mu| \leq 1$. На фазовом портрете имеются две серии неподвижных точек. Из каждой неустойчивой точки выходит пара сепаратрис, которые уходят на бесконечность. Кроме того, имеются сепаратрисные петли, которые охватывают окрестности устойчивых неподвижных точек. Замкнутые траектории внутри петель соответствуют ограниченными периодическими решениям $\Psi(\tau)$. В таком случае соответствующие функции $E_1(\tau)$ неограниченно растут либо убывают, как это следует из уравнений (1.12):

$$E_1(\tau) = \frac{\varrho\alpha\tau}{\varepsilon\omega'(E_0)} + \mathcal{O}(1), \quad \tau \rightarrow \pm\infty.$$

Как раз этот случай соответствует захвату в резонанс с линейным по времени изменением энергии $E(t; \varepsilon) = E_0 + \varrho \alpha t / \omega'(E_0) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $|t| \ll 1/\varepsilon$. Направление изменения определяется знаком отношения частот $\alpha/\omega'(E_0)$. Вдали от равновесия энергия может как расти, так и убывать в зависимости от направления изменения частоты накачки. Именно такие решения согласуются с энергией, определяемой во внешнем разложении из резонансного уравнения (1.6).

Вывод. Резонансный захват частоты возможен, если частота накачки меняется достаточно медленно по сравнению с величиной амплитуды, т. е. при $0 < |\varrho \alpha| \leq \varepsilon |f_{p,q} \omega'(E_0)|$.

Перечислить все авторезонансные решения можно в терминах начальных данных для $\Psi, \dot{\Psi}$. Для этого требуется, чтобы начальная точка находилась внутри сепаратрисной петли либо на ее границе:

$$C_- \leq \frac{1}{2} (\dot{\Psi})^2(0) + \nu \Psi(0) + \mu \cos \Psi(0) \leq C_+. \quad (1.13)$$

Константы C_+ и C_- представляют собой значения первого интеграла на сепаратрисе и в устойчивой точке равновесия соответственно. Они вычисляются по формулам $C_{\pm} = (\dot{\Psi}_{\pm})^2/2 + \nu \Psi_{\pm} + \mu \cos \Psi_{\pm}$ через значения $\Psi_{\pm}$, которые соответствуют соседним точкам равновесия: $\sin \Psi_{\pm} = \nu/\mu$ при $\pm \nu \cos \Psi_{\pm} > 0$, $|\Psi_+ - \Psi_-| < \pi$. Сепаратрисная петля охватывает устойчивую точку либо справа, либо слева от неустойчивой точки в зависимости от знака ν/μ . Поэтому пару $\Psi_{\pm}$ следует выбирать с условием $\Psi_+ < \Psi_-$, если $\nu/\mu < 0$, либо $\Psi_+ > \Psi_-$, если $\nu/\mu > 0$.

Условия захвата можно переписать в терминах начальных данных (1.4) для исходных функций E, ψ , если принять во внимание уравнения (1.9) и связь $\Psi(0) = p\psi_0 + \Phi + \pi/2$:

$$C_- \leq \frac{1}{2} \left[\frac{\omega'(E_0) \Delta}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^2 + \left(p\psi_0 + \Phi + \frac{\pi}{2} \right) \nu + \cos \left(p\psi_0 + \Phi + \frac{\pi}{2} \right) \omega'(E_0) 2F \leq C_+. \quad (1.14)$$

Эти неравенства определяют множество D_{capt} начальных данных, при которых решение задачи Коши (1.1), (1.4) захватывается в резонанс: $(\Delta/\sqrt{\varepsilon}, \psi_0) \in D_{\text{capt}} \subset \mathbb{R}^2$. Таким образом, допустимые начальные возмущения энергии Δ расположены в $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ -окрестности резонансного значения E_0 .

Поправки асимптотики на бесконечности для энергии содержат осциллирующие слагаемые порядка единицы, поскольку $E_1(\tau)$ определяется через производную от периодической функции $\dot{\Psi}(\tau)$. Впрочем, для двух решений, когда Ψ соответствует неподвижным точкам, эти поправки тождественно равны нулю: $E_1(\tau) = \varrho \alpha \tau / (\varepsilon \omega'(E_0))$. Кроме того, имеется два однопараметрических семейства решений с экспоненциально совпадающей асимптотикой $E_1(\tau) = \varrho \alpha \tau / (\varepsilon \omega'(E_0)) + \mathcal{O}(\exp(-\gamma \tau))$, $\tau \rightarrow +\infty$ ($\gamma = \text{const} > 0$). Они соответствуют двум ветвям сепаратрисы на плоскости $\Psi, \dot{\Psi}$, входящим в неподвижную точку при $\tau \rightarrow +\infty$. Одна из этих ветвей уходит на бесконечность при $\tau \rightarrow -\infty$.

Фазовое уравнение типа (1.11) с дополнительным диссипативным слагаемым появляется в ряде других задач о захвате в резонанс [85]–[87], [9]. В частности, похожий анализ с использованием уравнения, сходного с (1.11), выполнен

в [9; гл. 5, § 1, п. 1.7, с. 170] для задачи о резонансном захвате в двухчастотной автономной системе. Разумеется, рассмотренная нами система (1.1) может интерпретироваться как автономная двухчастотная, и она соответствует [9] при отсутствии диссипации. Учет диссипации (сопротивления) в исходной задаче (1.1) приводит к дополнительным слагаемым в усредненных уравнениях и к другой структуре асимптотики на бесконечности для их решений. В результате исчезают осцилляции и выживают лишь степенные асимптотики; такого типа задача рассмотрена в разделе 6.

В общем случае для системы уравнений (1.9) с периодической функцией $\hat{f}(E_0, \Psi)$ анализ мало отличается от приведенного выше (при некоторых условиях [9; гл. 5, § 1, пример 7, с. 174], гарантирующих, что фазовый портрет похож на приведенный на рис. 1). Все свойства извлекаются из простых соображений, благодаря интегрируемости усредненных уравнений. Оказывается, что решения других систем главного резонанса имеют похожую структуру асимптотики, которую, однако, приходится извлекать другими, не столь тривиальными способами. Например, отличия появляются в случае, когда возмущения зависят от малого параметра и резонансы содержатся не в главном члене, а в членах более высокого порядка. Так, если $f = f_0(E, \psi, \varphi) + \varepsilon f_1(E, \psi, \varphi)$, $g = g(E, \psi, \varphi)$ и резонансная гармоника содержится в $f_1(E, \psi, \varphi)$, но не содержится в $f_0(E, \psi, \varphi)$, то резонансный захват происходит в более медленном масштабе $\tau = \varepsilon t$. При этом структура усредненных уравнений может существенно измениться. Например, в случае монохроматической накачки появляется система

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{d\tau} &= [f_s \sin \Psi_0 + f_c \cos \Psi_0], \\ \frac{d\Psi_0}{d\tau} &= \omega'(E_0)E_1 - \frac{\varrho\alpha}{\varepsilon^2} \tau + [g_s \sin \Psi_0 + g_c \cos \Psi_0],\end{aligned}$$

которая не редуцируется к фазовому уравнению (1.11), если $g(E_0, \psi, \varphi)$ содержит резонансную гармонику с ненулевым коэффициентом Фурье. Детальный анализ такой задачи не проводился, хотя он не представляет проблем в свете последующих разделов.

1.5. Прохождение системы через резонанс. Как было показано, авторезонансные решения можно идентифицировать по начальным данным. Это решает проблему захвата в резонанс в случае, когда в начальный момент $t = 0$ возмущающая накачка близка к резонансной: $\varrho\dot{\varphi}(t_0) \approx \omega(E_0)$. Но для системы (1.1) имеет практический смысл еще одна постановка задачи. Она соответствует прохождению через резонанс в момент $t_0 = \alpha^{-1}\tau_0$ ($\tau_0 = \text{const} \neq 0$, $|\alpha| \ll 1$), далекий от начального. Очевидно, невозмущенные автономные уравнения инвариантны относительно сдвига по времени $t = \tilde{t} + t_0$, а частота возмущения при такой замене времени меняется на константу: $\Omega + \alpha t = \Omega + \tau_0 + \alpha \tilde{t}$. Поэтому предлагаемую задачу можно сформулировать для системы вида (1.1) следующим образом. *Существуют ли решения, которые на далеких отрицательных временах не захвачены в резонанс, а на далеких положительных*

временах оказываются авторезонансными? Ответ на этот вопрос можно получить, сшивая решения разного типа для двух начальных задач: для положительного и отрицательного направления времени.

Заметим, что конструкция асимптотического решения на отрицательной полуоси $t < 0$ не отличается от той, что дана выше для $t > 0$, и приводит к тому же фазовому уравнению (1.11). Начальные точки, соответствующие нерезонансным при $\tau \rightarrow -\infty$ решениям, находятся вне сепаратрисных петель и включают те из сепаратрисных ветвей, которые являются траекториями, уходящими на бесконечность при $\tau \rightarrow -\infty$. Из сравнения с предыдущими результатами заключаем, что только эти сепаратрисы соответствуют искомым решениям.

Таким образом, если накачка с переменной частотой включается заблаговременно, то при прохождении через резонанс захват частоты возможен лишь на серии однопараметрических семейств решений. Этот результат несколько разочаровывает, поскольку состояния системы, соответствующие однопараметрическому семейству решений, не обнаруживаются в экспериментах.

Впрочем, применительно к исходной задаче с малым параметром результаты следует уточнить. Область захвата в начальной плоскости можно немного расширить на величину, определяемую малым параметром ε . Как было показано, эта область включает внутренность петли и те части сепаратрис, которые соответствуют траекториям, ограниченным при $\tau \rightarrow \infty$. Решения усредненных уравнений (1.9) с начальными данными вне этой области имеют первую поправку для энергии $E_1(\tau)$, ограниченную при $\tau \rightarrow \infty$. Однако для начальных точек вблизи границы области захвата соответствующие решения близки к авторезонансным: энергия $E_1(\tau)$ нарастает до больших величин, хотя и остается ограниченной при $\tau \rightarrow \infty$. На этом пути можно выделить экспоненциально узкий слой начальных данных вблизи границы (вблизи петли и устойчивой ветви сепаратрисы), для которых соответствующие решения согласуются с авторезонансным решением во внешнем разложении. Малая ширина слоя объясняется сравнительно быстрым уходом траектории в окрестность неустойчивой ветви сепаратрисы (при отсутствии диссипации за время порядка $\mathcal{O}(\ln \varepsilon^{-1})$). Вблизи неустойчивой точки равновесия область захвата расширяется больше. При наличии диссипации область захвата расширяется [9; гл. 5, § 1, пример 7, с. 173] на величину порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. В точной постановке проблема сводится к исследованию решений усредненных уравнений в зависимости от малого параметра, который характеризует расстояние от начальной точки до границы области захвата. Анализ похожей задачи приведен в [88] для системы, которая возникает в следующем разделе.

2. Критическая энергия

В данном разделе рассматривается задача о резонансном захвате вблизи критической энергии. По определению [19], [20] критическим называется значение энергии $E = E_{\text{cr}}$, при котором обращается в нуль производная собственной частоты: $\omega'(E_{\text{cr}}) = 0$. В системе физического маятника критической энергии

нет. Известные в приложениях примеры такого рода связаны с теорией ускорителей [19; гл. 5, § 7, с. 173]. Основной целью является выяснение условий, при которых резонансное решение с энергией ниже критической: $E(t) < E_{\text{кр}}, t < 0$, переходит со временем в резонансное решение с энергией выше критической: $E(t) > E_{\text{кр}}, t > 0$.

2.1. Постановка проблемы и результат. Исходные уравнения рассматриваются в форме (1.1). В начальный момент выполняется резонансное условие (1.2). Считается, что начальное значение энергии E_0 совпадает с критическим, так что $\omega'(E_0) = 0$, но вторая производная не обращается в нуль: $\omega''(E_0) \neq 0$.

Поясним проблемы, возникающие при анализе этой задачи. В главном члене асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ энергия системы в состоянии резонансного захвата определяется из резонансного условия, т. е. корнем алгебраического уравнения $\omega(\mathcal{E}_0) = \varrho\dot{\varphi}(t)$. В рассматриваемой ситуации существуют два корня $\mathcal{E}_{\pm}(\dot{\varphi}(t))$, которые сливаются в момент $t = 0$: $\mathcal{E}_{\pm}(\dot{\varphi}(0)) = E_0$. Интерес представляют решения $E = \mathcal{E}_0(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, которым во внешнем разложении при $t < 0$ соответствует корень $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_-(\dot{\varphi}(t))$, а при $t > 0$ – корень $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_+(\dot{\varphi}(t))$. Поскольку при $t = 0$ корни совпадают, то на первый взгляд для приближенного описания решения никаких дополнительных переходных слоев не требуется. Однако остается вопрос о существовании решений с такой асимптотикой, ответ на который не возможен без анализа уравнений в переходном резонансном слое. Необходимость введения такого слоя диктуется тем обстоятельством, что описанное выше внешнее разложение оказывается непригодным вблизи критической точки $t = 0$. Формально это усматривается из структуры последующих поправок $\varepsilon^k \mathcal{E}_k(t)$, которые определяются из линеаризованных уравнений вида $\omega'(\mathcal{E}_0)\mathcal{E}_k = F_k(t)$. Поскольку $\omega'(\mathcal{E}_0)|_{t=0} = 0$, то функции $\mathcal{E}_k(t)$ имеют особенности в момент достижения критического значения [73]. Вблизи этого момента возникает узкий переходной слой с масштабом $\varepsilon^{2/3}t$, в котором происходит сравнительно быстрая перестройка решения. Такая ситуация характерна для задач с бисингулярным возмущением, которые исследуются методом согласования [36]. В рассматриваемой задаче исчерпывающие математические результаты отсутствуют и результат перестройки решения не известен. Из численных экспериментов можно заключить, что система выходит из резонанса при переходе энергии через критическое значение¹⁰. Мы дадим здесь вывод усредненных уравнений в переходном слое и для их решений приведем результаты об асимптотике на бесконечности, которые частично подтверждают такое заключение.

Изложенное в предыдущем разделе описание захвата в резонанс в невырожденном случае было дано Б. В. Чириковым [37]. На основании предложенного им подхода были предприняты попытки решения задачи об удержании резонанса при переходе через критическую точку [19; гл. 5, § 7, с. 174]. Однако результаты [37] не имеют прямого отношения к этой проблеме. Описание резонансных явлений вблизи критической энергии оказывается более сложным, чем

¹⁰Этот факт хорошо известен физикам [19; гл. 4, § 17, с. 178].

в ситуации общего положения, когда $\omega'(E) \neq 0$. Основной результат в принципе отличен от [37]: усредненные уравнения вовсе не сводятся к возмущенному маятнику. Анализ этой, более сложной задачи в адиабатическом приближении приведен в [19; гл. 5, § 7, с. 178]. Однако возможности адиабатического приближения ограничены.

Предлагаемый подход основан на исследовании задачи на одной полуоси $t > 0$. Свойства решений на другой полуоси $t < 0$ получаются из найденных формул заменой переменных с учетом симметрии исходных уравнений. После этого полная задача может исследоваться путем спивки. Фаза накачки берется в форме $\varphi = \Omega t + \alpha t^2/2$, $t > 0$. Анализируется начальный этап захвата в резонанс. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнено резонансное условие (1.2), имеются отличные от нуля коэффициенты Фурье с резонансными индексами (т. е. существуют p и q такие, что $f_{p,q}(E_0) \neq 0$ и $-q/p = \varrho$) и начальное невозмущенное значение энергии E_0 является критическим: $\omega'(E_0) = 0$.

1. Чтобы при малых ε , α был возможен асимптотический захват в резонанс, необходимо условие $\alpha \omega''(E_0) > 0$.

2. Если при этом для малых параметров ε , α , Δ выполнены соотношения $0 < |\alpha| \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3})$, $0 \leq |\Delta| \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$, то существуют два изолированных авторезонансных решения и два однопараметрических семейства авторезонансных решений, которые имеют асимптотику $E(t; \varepsilon) = E_0 + \varepsilon^{1/3} E_1(\varepsilon^{2/3} t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$, с неограниченно растущим коэффициентом $E_1(\theta) = \mathcal{O}(\sqrt{\theta})$, $\theta \rightarrow \infty$.

3. Имеется двухпараметрическое семейство решений, которые не захватываются в резонанс, так что поправка энергии остается порядка $\varepsilon^{1/3}$ с коэффициентом $E_1(\theta) = \mathcal{O}(1)$, $\theta \rightarrow \infty$.

Обратим внимание, что вблизи критической энергии не найдено двухпараметрическое авторезонансное решение.

КОММЕНТАРИЙ. Условие $\alpha \omega''(E_0) > 0$ определяет знак α , т. е. направление изменения частоты накачки $\Omega_0 + \alpha t$. Это изменение должно соответствовать допустимому направлению изменения собственной частоты $\omega(E)$, которое вблизи критической энергии (экстремума) имеет лишь одно направление, например, рост. Если частота накачки меняется в неподходящем направлении с $\alpha \omega''(E_0) < 0$, то захват в резонанс невозможен и, в частности, резонансное уравнение (1.6) во внешнем разложении не разрешимо при $t > 0$, $\varrho > 0$.

Доказательство теоремы 2.1 содержится в следующих двух пунктах.

2.2. Начальный этап захвата в резонанс. В случае $\omega'(E_0) = 0$ усредненная система (1.9), полученная в предыдущем разделе, распадается на отдельные уравнения и любое решение остается ограниченным по энергии $E(\tau)$. Таким образом, авторезонанс не проявляется на масштабе времени $\tau = \sqrt{\varepsilon} t \approx 1$. Причину этого можно усмотреть в слишком медленном изменении собственной частоты вблизи критического значения. Эффект резонансного захвата обнаруживается на более далеких временах при более медленном изменении

частоты накачки. В асимптотической конструкции выявляется масштаб медленного времени $\theta = \varepsilon^{2/3}t$. В качестве быстрого времени, как и прежде, используется заданная фаза $\varphi(t)$. Двухмасштабный анзац¹¹ $E(t; \varepsilon) = \tilde{E}(\varphi, \theta; \varepsilon)$, $\psi(t; \varepsilon) = \varrho\varphi + \tilde{\psi}(\varphi, \theta; \varepsilon)$ при выбранной частоте накачки приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \left[\Omega + \varepsilon^{2/3} \frac{\alpha}{\varepsilon^{4/3}} \theta \right] \partial_{\varphi} \tilde{E} + \varepsilon^{2/3} \partial_{\theta} \tilde{E} &= \varepsilon f(\tilde{E}, \tilde{\psi} + \varrho\varphi, \varphi), \\ \left[\Omega + \varepsilon^{2/3} \frac{\alpha}{\varepsilon^{4/3}} \theta \right] [\varrho + \partial_{\varphi} \tilde{\psi}] + \varepsilon^{2/3} \partial_{\theta} \tilde{\psi} &= \omega(\tilde{E}) + \varepsilon g(\tilde{E}, \tilde{\psi} + \varrho\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Асимптотическое решение строится в виде рядов по степеням малого параметра, кратным $\varepsilon^{1/3}$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\varphi, \theta; \varepsilon) &= E_0 + \varepsilon^{1/3} E_1(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} E_n(\varphi, \theta), \\ \tilde{\psi}(\varphi, \theta; \varepsilon) &= \Psi_0(\theta) + \varepsilon^{1/3} \Psi_1(\varphi, \theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \Psi_n(\varphi, \theta). \end{aligned}$$

Дополнительным условием к анзацу является требование периодичности коэффициентов $E_n(\varphi, \theta)$, $\Psi_n(\varphi, \theta)$ по быстрой переменной φ . На первых шагах это требование приводит к усредненным уравнениям

$$\frac{dE_1}{d\theta} = \hat{f}(E_0, \Psi_1), \quad \frac{d\Psi_0}{d\theta} = \frac{1}{2} \omega''(E_0) E_1^2 - \varrho \frac{\alpha}{\varepsilon^{4/3}} \theta. \quad (2.1)$$

Вывод усредненных уравнений полностью совпадает с тем, что приведен в разделе 1. В постановке задачи Коши уравнения дополняются соответствующими начальными данными $E_1|_{\theta=0} = \Delta/\varepsilon^{1/3}$, $\Psi_0|_{\theta=0} = \psi_0$.

В случае единственной резонансной гармоники имеет место соотношение $\hat{f} = f_{p,q} \exp(ip\Psi_0) + \text{с.с.}$. Если использовать тригонометрическое представление для коэффициента $f_{p,q}$: $f_{p,q} = F \exp(i\Phi)$, и ввести новые переменные $R = E_1/(2F)$, $\Psi = p\Psi_0 + \Phi + \pi/2$, то уравнения (2.1) записываются в виде

$$\frac{dR}{d\theta} = \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{d\theta} = \mu R^2 - \nu \theta \quad (2.2)$$

с коэффициентами $\mu = p\omega''(E_0) \cdot 2F^2$, $\nu = -q\alpha\varepsilon^{4/3}$. Путем перенормировки переменных R , θ уравнениям можно придать стандартную форму (0.4) с $\lambda = \nu/\mu^{2/3}$.

2.3. Асимптотики решений усредненных уравнений. Задача об авторезонансе вблизи критической энергии сводится к поиску решений с растущей компонентой $E_1(\theta)$. Ограничимся анализом уравнений (2.2). Эта система не редуцируется к интегрируемому уравнению, и использованные ранее приемы не годятся. Теперь анализ решений выполняется другим способом с использованием асимптотических методов.

Во-первых, из уравнений (2.2) методом ВКБ извлекается асимптотика двухпараметрического решения с ограниченной энергией [88]:

¹¹Выбор асимптотических анзацев и, в частности, временных масштабов до сих пор остается искусством, где трудно давать какие-либо рецепты [83].

ТЕОРЕМА 2.2. *Для уравнений (2.2) существует двухпараметрическое семейство решений с ограниченной энергией, которые имеют асимптотическое разложение на бесконечности*

$$R(\theta) = c - (\nu\theta)^{-1} \sin s + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^{-n} R_n(s; c), \quad \Psi(\theta) = s + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \Psi_n(s; c).$$

Коэффициенты асимптотики представляют собой 2π -периодические функции по “быстрой” фазе $s = -\nu\theta^2/2 + \mu c^2\theta + s_0$. Произвольным параметрам соответствуют константы c, s_0 .

Эти решения с ограниченной компонентой $R(\theta)$ соответствуют отсутствию авторезонанса (захвата частоты). Авторезонансу соответствуют другие решения тех же уравнений (2.2).

Легко построить два набора степенных рядов по обратным степеням временной переменной, у которых главный член в асимптотике энергии неограниченно растет на бесконечности и которые представляют собой формальные асимптотические решения при $\theta \rightarrow \infty$. Эти две асимптотические конструкции связаны с разными точными решениями. Одна из них представляется рядами

$$\begin{aligned} \hat{R}(\theta) &= \sqrt{\frac{\nu\theta}{\mu}} + \frac{1}{8\mu} \theta^{-2} + \sum_{k=6}^{\infty} \theta^{-k/2} \hat{R}_k, \\ \hat{\Psi}(\theta) &= \pi - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \theta^{-1/2} + \sum_{k=3}^{\infty} \theta^{-k/2} \hat{\Psi}_k \end{aligned} \quad (2.3)$$

при $\theta \rightarrow \infty$. Константы $\hat{R}_k, \hat{\Psi}_k$ определяются однозначно из рекуррентных формул, получающихся при подстановке рядов (2.3) в уравнения (2.2).

ТЕОРЕМА 2.3. *Для уравнений (2.2) существует единственное решение $\hat{R}(\theta), \hat{\Psi}(\theta)$, которое имеет асимптотическое разложение в виде рядов (2.3).*

Аналогично строится другая пара рядов, которые отличаются выбором фазы в главном члене:

$$\begin{aligned} \check{R}(\theta) &= \sqrt{\frac{\nu\theta}{\mu}} - \frac{1}{8\mu} \theta^{-2} + \sum_{k=6}^{\infty} \theta^{-k/2} \check{R}_k, \\ \check{\Psi}(\theta) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \theta^{-1/2} + \sum_{k=3}^{\infty} \theta^{-k/2} \check{\Psi}_k, \quad \theta \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В отличие от первого случая эта конструкция связана не с одним решением, а с целым семейством.

ТЕОРЕМА 2.4. *Для уравнений (2.2) существует однопараметрическое семейство решений $\check{R}(\theta), \check{\Psi}(\theta)$, которые имеют одно и то же асимптотическое разложение в виде рядов (2.4). Разные решения экспоненциально близки при $\theta \rightarrow \infty$.*

Обоснование степенных асимптотик содержится, например, в [89], [90]. Все результаты легко переформулируются на случай общих уравнений (2.1) с периодической функцией $\hat{f}(E_0, \Psi)$.

В случае некритической энергии E_0 похожие однопараметрические и изолированные решения выходят из начальных точек, которые соответствуют сепаратрисам, либо неподвижным точкам на фазовом портрете возмущенного маятника. В рассматриваемом случае (с критической энергией E_0) не удастся аналитически описать начальные данные, соответствующие авторезонансным решениям. Проблема, в конечном счете, упирается в отсутствие формул связи для констант интегрирования. Помимо того, возникает еще одна проблема.

2.4. Промежуточные асимптотики. В отличие от общей ситуации в задаче с критической энергией на уровне усредненных уравнений не удастся обнаружить двухпараметрическое семейство решений с неограниченно растущей энергией. Точнее, конструкции, использованные в похожих ситуациях [67], не приводят к успеху в задаче (2.2).

Численные эксперименты вовсе не обнаруживают растущих решений. В качестве иллюстрации ниже приведены результаты численных расчетов для случая $\nu = 1$, $\mu = 1$ с нулевой начальной энергией $R(0) = 0$ и с разными начальными фазами $\Psi(0)$. На рис. 2, 3 изображена эволюция энергии со временем. Похожие результаты дают все выполненные численные эксперименты. Как видно из графиков, функция $R(\theta)$ осциллирует и в среднем довольно долго растет как $\sqrt{\nu\theta/\mu}$, а затем происходит срыв на асимптотику, ограниченную при $\theta \rightarrow \infty$. Момент срыва зависит от выбранного решения (от начальных данных) и в доступных для компьютера экспериментах достигает значений порядка 10^4 .

Рис. 2. Эволюция энергии $R(\theta)$ для решений с разными начальными фазами $\Psi(0) = -\pi/2$; $\Psi(0) = \pi/2$ при $R(0) = 0$

Поскольку численные эксперименты не обнаруживают решений с неограниченно растущей компонентой R , то создается впечатление, что множество таких решений весьма бедно, и, возможно, все они перечислены в теоремах 2.3 и 2.4. В то же время имеется много решений, амплитуды которых довольно

Рис. 3. Эволюция энергии $R(\theta)$ на этапе срыва промежуточной асимптотики для решения с начальными данными $R(0) = 0$, $\Psi(0) = \pi/2$. Картина соответствует переходу фазовой траектории через сепаратрису “замороженной” системы.

долго растут. Для аналитического описания такого типа эффектов Г.И. Баренблаттом было введено понятие промежуточных асимптотик [91]. Речь идет об асимптотиках вблизи выявленных растущих решений.

Формальная постановка задачи состоит в следующем. Выделяется множество точек на начальной плоскости

$$R(\theta; \rho, \eta)|_{\theta=0} = \hat{R}(0) + \rho \cos \eta, \quad \Psi(\theta; \rho, \eta)|_{\theta=0} = \hat{\Psi}(0) + \rho \sin \eta.$$

Рассматривается семейство решений, параметризованных величинами $\rho > 0$, $\eta \in [0, 2\pi)$, и для них строится асимптотика по малому параметру $\rho \rightarrow 0$. Основная цель построений – определить промежуток времени $[0, \Theta]$, в течение которого решения $R(\theta; \rho, \eta)$, $\Psi(\theta; \rho, \eta)$ остаются на конечном расстоянии от растущего решения $\hat{R}(\theta)$, $\hat{\Psi}(\theta)$. Ответ дается в терминах обратной величины малого параметра $\Theta = \mathcal{O}(\rho^{-8})$, $\rho \rightarrow 0$, и основан на построении асимптотики решения при $\rho \rightarrow 0$. Такие асимптотики названы промежуточными. Они дают представление о поведении определенного класса решений на далеких временах, но не описывают асимптотику при $\theta \rightarrow \infty$. Точное утверждение доказано в [88]:

ТЕОРЕМА 2.5. *Вблизи известного решения с растущей амплитудой $\hat{R}(\theta)$, $\hat{\Psi}(\theta)$ для уравнений (2.2) существует двухпараметрическое семейство решений $R(\theta; \rho, \eta)$, $\Psi(\theta; \rho, \eta)$, амплитуды которых нарастают до большой величины $\mathcal{O}(\rho^{-8})$, сравнимой с обратной степенью расстояния до $\hat{R}(0)$, $\hat{\Psi}(0)$ в начальный момент.*

Подобного типа промежуточные асимптотики, видимо, можно построить и вблизи однопараметрического семейства решений $\check{R}(\theta)$, $\check{\Psi}(\theta)$, однако никаких точных утверждений на этот счет не имеется.

2.5. Проблема перехода через критическую энергию. В задаче о прохождении через критическую энергию следует считать, что резонанс удерживается как до подхода к критическому значению энергии, так и после про-

хождения. Имея в виду, что критическая точка E_{cr} является экстремумом собственной частоты $\omega(E)$, получаем необходимое условие на вынуждающую частоту $\dot{\varphi}(t)$, которая должна иметь подобного типа экстремум по времени t . В таком случае усредненные уравнения, которые описывают эволюцию энергии и фазы при прохождении через критическое значение, должны рассматриваться на всей оси $\theta \in \mathbb{R}^1$. В простейшем случае при $\dot{\varphi}(t) = \Omega_0 + \alpha|t|$ они записываются в виде ¹²

$$\frac{dR}{d\theta} = \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{d\theta} = \mu R^2 - \nu|\theta| = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}^1.$$

Из структуры уравнений видно, что уравнения инвариантны относительно замены $R \Rightarrow -R$, $\Psi \Rightarrow \Psi \pm \pi$. Поэтому при условии $\nu/\mu > 0$ наряду с неограниченно растущими решениями

$$R(\theta) = \sqrt{\nu\theta/\mu} + \mathcal{O}(\theta^{-3/8}), \quad \Psi(\theta) = \pi + \mathcal{O}(\theta^{-1/4}), \quad \theta \rightarrow +\infty,$$

существуют неограниченно убывающие решения

$$R(\theta) = -\sqrt{\nu\theta/\mu} + \mathcal{O}(\theta^{-3/8}), \quad \Psi(\theta) = \mathcal{O}(\theta^{-1/4}), \quad \theta \rightarrow +\infty.$$

Уравнения инвариантны относительно замены $R \Rightarrow -R$, $\varphi \Rightarrow -\varphi$, $\theta \Rightarrow -\theta$. Поэтому существуют однопараметрические решения с похожей асимптотикой на другой бесконечности: при $\theta \rightarrow -\infty$

$$R(\theta) = \mp \sqrt{\frac{\nu\theta}{\mu}} + \mathcal{O}(\theta^{-3/8}), \quad \Psi(\theta) = -(1 \pm 1) \frac{\pi}{2} + \mathcal{O}(\theta^{-1/4}).$$

Помимо того, существует двухпараметрическое семейство решений, ограниченных на плюс бесконечности, а также двухпараметрическое семейство решений, ограниченных на минус бесконечности.

Надо понимать, что для фиксированного решения структура асимптотики на одной бесконечности вовсе не обязана совпадать со структурой асимптотики на другой бесконечности. Проблема удержания резонанса при прохождении через критическую энергию состоит в следующем.

Существуют ли решения усредненных уравнений (2.2), у которых компонента $R(\theta)$ неограниченно убывает на одной бесконечности и неограниченно растет на другой бесконечности:

$$R(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\nu\theta}{\mu}} + \mathcal{O}(\theta^{-3/8}), & \theta \rightarrow +\infty, \\ -\sqrt{-\frac{\nu\theta}{\mu}} + \mathcal{O}(\theta^{-3/8}), & \theta \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Анализ этой задачи в адиабатическом приближении при $\lambda \rightarrow 0$ показывает, что таких решений не существует (см. раздел 7, а также [19]). Для значений $\lambda \approx 1$ вопрос остается открытым. Эту проблему можно было бы решить, описав

¹²Вместо модуля $|t|$ можно использовать гладкую функцию с подходящей асимптотикой на бесконечности $|t| + \mathcal{O}(t^{-N})$, $t \rightarrow \pm\infty$ (для любого $N > 0$).

решения разного типа в терминах начальных данных. Однако идентифицировать область начальных данных, из которых выходят решения с неограниченно растущей (либо убывающей) энергией, не удастся. Ввиду неинтегрируемости уравнений (2.2) в настоящее время не представляется возможным установить связь асимптотик на разных бесконечностях. Даже для интегрируемых уравнений Пенлеве подобная задача не решена до конца [71]. Один из возможных подходов к решению такого типа задач, описанный в работе [92], может быть использован при анализе адиабатического приближения. Однако в целом вопрос о переходе через критическую энергию остается открытым.

3. Авторезонанс вблизи равновесия

В данном разделе исследуется авторезонанс вблизи устойчивого положения равновесия. Задача состоит в переводе системы из состояния с малой амплитудой колебаний (либо из положения равновесия) в состояние с большой амплитудой колебаний (порядка единицы) путем воздействия на систему внешними вынуждающими колебаниями с малой амплитудой и с медленно меняющейся частотой. Решение именно этой задачи зачастую ассоциируется с авторезонансом [43], [45], [72], [93].

По своей постановке такая задача похожа на ту, что была исследована Б. В. Чириковым [37], и решение которой, изложенное в разделе 1, приводит к усредненным уравнениям (0.3). Разница состоит в том, что начальное значение энергии E_0 соответствует положению равновесия. Это отличие ведет к радикальным изменениям в решении. Оказывается, что результаты [37] не имеют отношения к такой задаче. Описание резонансного захвата вблизи положения равновесия оказывается более сложным и на уровне усредненных уравнений приводит к системе (0.5).

Формально неприменимость результатов раздела 1 связана с негладкостью возмущений $f(E, \psi, \varphi)$, $g(E, \psi, \varphi)$ по энергии при $E \rightarrow E_0$. Это можно усмотреть на примере уравнений линейного осциллятора (0.1): $\dot{x} - \omega y = 0$, $\dot{y} + \omega x = (\varepsilon/\omega) \cos \Omega t$, которые после преобразования к переменным энергия–фаза $x = \sqrt{E} \cos \psi$, $y = -\sqrt{E} \sin \psi$ принимают вид

$$\dot{E} = -\varepsilon \frac{2\sqrt{E}}{\omega} \sin \psi \cos \Omega t, \quad \dot{\psi} = \omega - \varepsilon \frac{1}{\omega\sqrt{E}} \cos \psi \cos \Omega t. \quad (3.1)$$

Как видим, правые части имеют особенность в точке равновесия при $E \rightarrow 0$. В общем случае без ограничения общности можно считать, что рассматриваемой точке равновесия соответствует минимум энергии со значением $E = 0$. Тогда возмущенные уравнения в форме (1.1), как правило, содержат зависимость от $\sqrt{E}$ в асимптотике при $E \rightarrow 0$, так что в правых частях f , g возникают особенности того же типа, что в примере (3.1). Эти особенности ведут к изменению структуры усредненных уравнений, и вместо интегрируемого фазового уравнения появляется неинтегрируемая система (0.5).

Как видно из примера, переменная типа действия (либо энергия) E не слишком хорошо подходит для описания возмущенных решений вблизи равновесия.

Более подходящей переменной оказывается либо квадратный корень из энергии $\sqrt{E}$, либо амплитуда колебаний r , что почти одно и то же в асимптотических конструкциях. Поэтому в данном разделе уравнения рассматриваются в переменных типа амплитуда–угол r, σ . Такие переменные можно выбирать разными способами. Если исходные уравнения представлены в форме (1.1), то можно положить $r = \sqrt{E}$, $\sigma = \psi$. Если исходные уравнения не приведены к переменным типа действие–угол, то в качестве r, σ удобно использовать полярные координаты на фазовой плоскости с центром в неподвижной точке. Например, для маятника с внешней накачкой (0.2) после замены $x = r \cos \sigma$, $\dot{x} = y = r \sin \sigma$ уравнения в полярных координатах приобретают вид

$$\begin{aligned}\dot{r} &= [r \cos \sigma - \sin(r \cos \sigma)] \sin \sigma + \varepsilon \sin \sigma \cos \varphi, \\ [\dot{\sigma} + \sin^2 \sigma + r^{-1} \cos \sigma \sin(r \cos \sigma)] r &= \varepsilon \cos \sigma \cos \varphi.\end{aligned}$$

Преимущество переменных амплитуда–угол проявляется в простоте асимптотических конструкций. Такие координаты обычно используются для асимптотических анзацев в методе усреднения [32].

3.1. Постановка задачи и результат. Мы будем иметь дело с уравнениями не самого общего вида. Тем не менее, они соответствуют как исходной системе (1.1), так и приведенному примеру для маятника:

$$\frac{dr}{dt} = f_0(r, \sigma) + \varepsilon f(r, \sigma, \varphi), \quad \left(\frac{d\sigma}{dt} - \omega(r, \sigma) \right) r = \varepsilon g(r, \sigma, \varphi). \quad (3.2)$$

Здесь заданные функции $f_0(r, \sigma)$, $\omega(r, \sigma)$ и $f(r, \sigma, \varphi)$, $g(r, \sigma, \varphi)$, определенные на промежутке $r \in [0, r_0]$, считаются гладкими по всем переменным и 2π -периодическими по σ и φ . Специфика рассматриваемой задачи заложена в структуре асимптотики по малой амплитуде

$$\omega(r, \sigma) = \omega_0 + \omega_1(\sigma)r^2 + \mathcal{O}(r^3), \quad f_0(r, \sigma) = f_{0,2}(\sigma)r^2 + f_{0,3}(\sigma)r^3 + \mathcal{O}(r^4)$$

при $r \rightarrow 0$ с коэффициентами $\omega_0, \langle \omega_1(\sigma) \rangle = \text{const} \neq 0$, $\langle f_{0,2}(\sigma) \rangle = 0$, $\langle f_{0,3}(\sigma) \rangle = 0$. Угловыми скобками здесь и далее обозначается интеграл среднего значения по угловой переменной σ . Задача состоит в построении асимптотики по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

В случае, когда уравнения (3.2) получены из (1.1) заменой $r = \sqrt{E}$, $\sigma = \psi$, они выглядят наиболее просто, поскольку $f_0 \equiv 0$, и невозмущенная частота не зависит от угла: $\omega = \omega(r^2) = \omega(0) + \omega'(0)r^2 + \mathcal{O}(r^4)$, $r \rightarrow 0$. Однако, при этом надо иметь в виду возможное усложнение выражений для функций f, g . Например, в случае маятника возмущения f, g в переменных энергия–фаза E, ψ выписываются через эллиптические функции.

Следует заметить, что выбор амплитуды в качестве зависимой переменной не обеспечивает гладкость уравнений: из-за множителя r дифференциальное уравнение для угла вырождается при $r = 0$. Поскольку для функции $r(t) \geq 0$, как решения возмущенных уравнений, допускается прохождение через нулевое значение, то для корректной постановки задачи следует задать условие скачка для угла в виде

$$|\sigma(t+0) - \sigma(t-0)| = \pi \quad \text{при } r(t) = 0.$$

Это условие соответствует требованию гладкости фазовой траектории при прохождении ею нулевой амплитуды. Далее основное внимание уделяется конструкциям с малой, но ненулевой амплитудой $r(t) \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$ и анализируются решения на далеких временах, поэтому в асимптотических построениях условие скачка не используется.

Полная постановка задачи включает задание начальных данных. Рассматривается случай начальных условий с малой амплитудой:

$$r|_{t=0} = \delta, \quad 0 \leq \delta \ll 1, \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0. \quad (3.3)$$

Главным требованием в постановке задачи является резонансное условие (1.6) в виде:

$$p_0 \omega_0 + q_0 \dot{\varphi}(0) = 0, \quad p_0, q_0 \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Заданная фазовая функция $\varphi(t)$ берется в простейшей форме: $\varphi = \Omega t + \alpha t^2/2$, $\Omega_0 = \text{const}$, $|\alpha| \ll 1$. Считается, что $\omega_0 > 0$, $\Omega > 0$, $\varrho = -q_0/p_0 > 0$.

Цель дальнейших построений – выявить условия на исходные данные: на функции $f(r, \psi, \varphi)$, $g(r, \psi, \varphi)$, на константу σ_0 и на соотношение малых параметров ε , α , δ , при которых амплитуда становится порядка единицы (не малой), $r(t; \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$, на достаточно далеких временах. Мы ограничимся описанием начального этапа захвата в резонанс, где возникают принципиальные отличия от раздела 1. Сформулируем основной результат настоящего раздела.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнено условие (3.4) и разложение Фурье функции $f(0, \psi, \varphi)$ содержит отличные от нуля коэффициенты с резонансными индексами, т.е. существуют p и q такие, что $f_{p,q} \neq 0$ и $-q/p = \varrho$.

1. Чтобы для уравнений (3.2) вблизи равновесия был возможен асимптотический захват в резонанс с положительной амплитудой $r > 0$, необходимо условие $\alpha \cdot \langle \omega_1 \rangle > 0$.

2. Если при этом для малых параметров выполнены соотношения $0 < |\alpha| \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3})$, то существует двухпараметрическое семейство решений с малой начальной амплитудой $\delta \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$, которые захватываются в резонанс, так что имеет место асимптотическая связь частот: $\dot{\sigma} = \varrho \dot{\varphi}(t) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\alpha^{-1})$. На начальном этапе амплитуда имеет асимптотику $r(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} R_1(\varepsilon^{2/3} t) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$, с неограниченно растущим коэффициентом $R_1(\theta) = \mathcal{O}(\sqrt{\theta})$, $\theta \rightarrow \infty$.

3. Имеется двухпараметрическое семейство решений, которые не захватываются в резонанс так, что амплитуда остается порядка $\varepsilon^{1/3}$ с коэффициентом $R_1(\theta) = \mathcal{O}(1)$, $\theta \rightarrow \infty$.

КОММЕНТАРИИ. 1. Условие $\alpha \cdot \langle \omega_1 \rangle > 0$ накладывает ограничение на знак α , т.е. на направление изменения частоты накачки. Это ограничение обусловлено тем, что точка равновесия $r = 0$ соответствует граничному значению амплитуды, так что собственная частота может меняться лишь в одном направлении; например, для маятника частота уменьшается с ростом амплитуды. Если частота накачки меняется в неподходящем направлении с $\alpha \cdot \langle \omega_1 \rangle < 0$, то захват в резонанс невозможен, поскольку резонансное условие (1.6) не выполняется при $t > 0$.

2. Область захвата не удастся описать аналитически. Теорема гарантирует лишь существование двухпараметрического семейства авторезонансных решений, начальные значения которых принадлежат множеству $0 \leq \delta \leq M\varepsilon^{1/3}$, $\sigma_0 \in [0, 2\pi)$ с некоторой константой $M > 0$. Не известно, ограничена ли вся область захвата. В асимптотическом приближении при $\lambda \rightarrow 0$ область захвата анализировалась в [50]. Ввиду сложной структуры этой области в подобных задачах обычно используются вероятностные термины [50], [62], [63], [94].

3. Построение полного асимптотического решения приведено в работе [73] при $\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3})$. Согласование внутреннего и внешнего разложений в главных членах асимптотики следует из явных формул. Согласование асимптотик в старших членах приводит к необходимости выполнения дополнительных конструкций [82], [95], которые во внешней области ведут к появлению степеней, кратных $\varepsilon^{1/12}$. Однако конструкции во внешней области не приводят к новым математическим задачам в отличие от начального этапа.

Ниже излагается наиболее существенная часть доказательства теоремы 3.1 для начального этапа захвата в резонанс.

3.2. Начальный этап захвата в резонанс. Уравнения главного резонанса. Переход к усредненным уравнениям делается на основе двухмасштабных разложений [32] с использованием медленного времени $\theta = \varepsilon^{2/3}t$. В качестве быстрого времени используется фаза внешней накачки $\varphi = \varphi(t)$. Для функций двух переменных $r(t; \varepsilon) = \tilde{r}(\varphi, \theta; \varepsilon)$, $\sigma(t; \varepsilon) = \varrho\varphi + \tilde{\sigma}(\varphi, \theta; \varepsilon)$ исходные уравнения приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) \partial_{\varphi} \tilde{r} + \varepsilon^{2/3} \partial_{\theta} \tilde{r} &= f_0(\tilde{r}, \tilde{\sigma} + \varrho\varphi) + \varepsilon f(\tilde{r}, \tilde{\sigma} + \varrho\varphi, \varphi), \\ (\dot{\varphi}(t)[\varrho + \partial_{\varphi} \tilde{\sigma}] + \varepsilon^{2/3} \partial_{\theta} \tilde{\sigma} - \omega(\tilde{r}, \tilde{\sigma} + \varrho\varphi)) \tilde{r} &= \varepsilon g(\tilde{r}, \tilde{\sigma} + \varrho\varphi). \end{aligned}$$

Асимптотическое решение строится в виде рядов по степеням малого параметра, кратным $\varepsilon^{1/3}$:

$$\tilde{r}(\varphi, \theta; \varepsilon) = \varepsilon^{1/3} R_1(\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} R_n(\varphi, \theta), \quad \tilde{\sigma}(\varphi, \theta; \varepsilon) = \Psi_0(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \Psi_n(\varphi, \theta).$$

Зависимость коэффициентов от быстрой переменной φ находится из рекуррентной системы дифференциальных уравнений. При выбранной частоте накачки $\dot{\varphi}(t) = \Omega + \varepsilon^{2/3}(\alpha/\varepsilon^{4/3})\theta$ уравнения имеют вид

$$\Omega \cdot \partial_{\varphi} R_n = F_n(\varphi, \tau), \quad \Omega \cdot \partial_{\varphi} \Psi_n = G_n(\varphi, \tau) \quad (n \geq 2).$$

Правые части вычисляются через предыдущие приближения. Дополнительным условием к анзацу является требование периодичности коэффициентов $R_n(\varphi, \theta)$, $\Psi_n(\varphi, \theta)$ по быстрой переменной φ . Это секулярное условие эквивалентно требованию обращения в нуль средних значений (по φ) от правых частей. На первых шагах оно дает дифференциальные уравнения для медленно меняющихся функций $R_1(\theta)$, $\Psi_0(\theta)$:

$$\frac{dR_1}{d\theta} = \hat{f}(\Psi_0), \quad R_1 \left[\frac{d\Psi_0}{d\theta} - \varrho \frac{\alpha}{\varepsilon^{4/3}} \theta - \langle \omega_1 \rangle R_1^2 \right] = \hat{g}(\Psi_0). \quad (3.5)$$

Периодические функции $\hat{f}(\Psi)$, $\hat{g}(\Psi)$ вычисляются через интегралы среднего значения аналогично (1.3). В случае, когда исходные возмущения f , g соответствуют монохроматической накачке, эти функции состоят из пары комплексно сопряженных слагаемых: $\{\hat{f}, \hat{g}\}(\Psi) = \{f_{p,q}(0), g_{p,q}(0)\} \exp(ip\Psi) + \text{с.с.}$. Если использовать представление $f_{p,q} = F \exp(i\Phi)$ и ввести новые переменные $R = R_1/(2F)$, $\Psi = p\Psi_0 + \Phi + \pi/2$, то в этом частном случае уравнения (3.5) записываются в виде

$$\frac{dR}{d\theta} = \sin \Psi, \quad R \left[\frac{d\Psi}{d\theta} + \nu\theta - \mu R^2 \right] = b_1 \sin \Psi + b_2 \cos \Psi. \quad (3.6)$$

Здесь $\mu = p\langle\omega_1\rangle \cdot 4F^2$, $\nu = -q\alpha/\varepsilon^{4/3}$, константы b_1 , b_2 вычисляются через коэффициент Фурье $g_{p,q}$. В частных случаях, связанных с приложениями, b_1 оказывается равным нулю и путем перенормировки переменных уравнения приводятся к простейшей форме (0.5) с коэффициентом $\lambda = \nu/\mu^{1/3}$.

В постановке задачи Коши уравнения дополняются соответствующими начальными данными $R|_{\theta=0} = \delta/\varepsilon^{1/3}$, $\Psi|_{\theta=0} = \sigma_0$. Однако решение начальной задачи дальше не обсуждается, поскольку уравнения не удастся проинтегрировать. Исследуются двухпараметрические решения $R(\theta; C, S_0)$, $\Psi(\theta; C, S_0)$ с *расходящейся амплитудой*, определяемые асимптотикой на бесконечности. Эти решения не зависят ни от каких малых параметров. Их значения в начальный момент $R(0; C, S_0)$, $\Psi(0; C, S_0)$ принадлежат ограниченному множеству на плоскости, если параметры C , S_0 меняются на компакте. Отсюда делается вывод о существовании на начальной плоскости области захвата, которая пересекается с достаточно большим кругом $\{0 \leq R \leq M, \Psi \in [0, 2\pi]\}$. В исходной постановке этот круг соответствует малым начальным амплитудам $0 \leq \delta \leq M\varepsilon^{1/3}$.

3.3. Асимптотики решений для уравнений главного резонанса.

Уравнения (3.5) определяют главные члены асимптотики по малому параметру. В силу этих уравнений амплитуда остается малой, $r = \varepsilon^{1/3}R_1(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$, $\varepsilon \rightarrow 0$, на временном масштабе $\theta = \varepsilon^{2/3}t \approx 1$. Другой вопрос – что происходит с главным членом $\varepsilon^{1/3}R_1(\theta)$ при росте времени θ . Здесь возможны два варианта: либо поправки остаются ограниченными, либо неограниченно растут при $\theta \rightarrow \infty$. Ниже показано, что при условии $\alpha \cdot \langle\omega_1\rangle > 0$ всегда существует двухпараметрическое семейство неограниченно растущих решений с асимптотикой $R(\theta) = \theta^{1/2}\rho_0 + \mathcal{O}(\theta^{-3/8})$, $\theta \rightarrow \infty$ ($\rho_0 = \sqrt{\nu/\mu}$). Такие решения описывают начальный этап авторезонанса.

3.3.1. Степенные асимптотики. В случае, когда входящий в уравнения параметр ν/μ положителен, легко построить степенные ряды

$$R(\theta) = \rho_0\theta^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} \theta^{-k/2}\rho_k, \quad \Psi(\theta) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{-k/2}\psi_k, \quad \theta \rightarrow \infty, \quad (3.7)$$

которые представляют собой формальное асимптотическое решение при $\theta \rightarrow \infty$. Константы ρ_k , ψ_k при $k \geq 1$ определяются однозначно из рекуррентных формул, получающихся при подстановке рядов (3.7) в уравнения (3.6). Главные

члены находятся из уравнений $\nu - \mu\rho_0^2 = 0$, $\sin\psi_0 = 0$, которые разрешимы при $\nu\mu > 0$. Поскольку тригонометрическое уравнение имеет два различных (по модулю 2π) корни $\psi_0 = 0$, $\psi_0 = \pi$, то возможно построение двух асимптотических решений. Эти две асимптотические конструкции связаны с разными решениями.

ТЕОРЕМА 3.2. *Если $\nu\mu > 0$, то для уравнений (3.6) существует единственное решение с растущей амплитудой, которое имеет асимптотическое разложение в виде рядов (3.7) с $\psi_0 = \pi$.*

ТЕОРЕМА 3.3. *Если $\nu\mu > 0$, то для уравнений (3.6) существует однопараметрическое семейство решений с растущей амплитудой, которые имеют одно и то же асимптотическое разложение в виде рядов (3.7) с $\psi_0 = 0$. Разные решения экспоненциально близки при $\theta \rightarrow \infty$.*

Обоснование степенных асимптотик приведено, например, в [89], [90].

Для задачи вдали от равновесия, рассмотренной в разделе 1, похожие однопараметрические и изолированные решения выходят из начальных точек, которые соответствуют сепаратрисам либо неподвижным точкам на фазовом портрете возмущенного маятника (см. рис. 1). В рассматриваемом случае, так же как в задаче с критической энергией, не удастся аналитически описать начальные данные, соответствующие предъявленным авторезонансным решениям. Но зато в отличие от задачи с критической энергией здесь удастся построить двухпараметрическое семейство решений с неограниченно растущей амплитудой. Эти решения отличаются от (3.7) тем, что коэффициенты их асимптотики оказываются не константами, а осциллирующими функциями. Такого типа формулы иногда называют ВКБ-приближениями.

3.3.2. ВКБ-асимптотики с неограниченной амплитудой.

ТЕОРЕМА 3.4. *Если $\nu\mu > 0$, то уравнения (3.6) имеют двухпараметрическое семейство растущих решений $R(\theta; C, S_0)$, $\Psi(\theta; C, S_0)$ с асимптотикой*

$$R = \rho_0\theta^{1/2} + \theta^{-1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n/8} \rho_n(S; C), \quad \Psi = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n/8} \psi_n(S; C)$$

при $\theta \rightarrow \infty$. Коэффициенты являются 2π -периодическими функциями по фазовой переменной

$$S = S_5\theta^{5/4} + \sum_{n=1}^4 S_n(C)\theta^{n/4} + S_{0,1}(C)\ln\theta + S_0, \quad S_5 = \frac{4}{5}\sqrt{2}(\nu\mu)^{1/4};$$

в частности, $\rho_1 = C \sin S$.

Для построения асимптотики используется аналог нелинейного метода ВКБ [96], [97], [51]. Приведем набросок построений из [66], [67], которые могут служить образцом для анализа других уравнений главного резонанса.

Первый этап в решении таких задач состоит в идентификации уравнений для главных членов асимптотики после выделения растущих на бесконечности

слагаемых. В рассматриваемом случае такое выделение сводится к замене $R = \rho_0\sqrt{\theta} + \tilde{R}(\theta)$. При этом уравнения (3.6) переходят в следующие:

$$\frac{d\tilde{R}}{d\theta} - \sin \Psi = -\frac{\rho_0}{2\sqrt{\theta}}, \quad \frac{d\Psi}{d\theta} - 2\mu\rho_0\sqrt{\theta}\tilde{R} = \mu\tilde{R}^2 + \frac{b_1 \sin \Psi + b_2 \cos \Psi}{\rho_0\sqrt{\theta} + \tilde{R}}.$$

Из структуры этих уравнений можно догадаться, что при $\theta \rightarrow \infty$ главные члены содержатся в левых частях. Но из этих частей желательно выделить оператор, который можно обратить (проинтегрировать). С этой целью можно сделать еще одну замену переменных, выделив множитель из амплитуды $\tilde{R} = \theta^{-1/4}\hat{R}/\beta$, $\beta = \sqrt{2\mu\rho_0}$. В таком случае уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{R}}{d\theta} - \beta\theta^{1/4}\sin \Psi &= -\frac{\rho_0}{2\sqrt{\theta}} + \theta^{-1}\hat{R}, \\ \frac{d\Psi}{d\theta} - \beta\theta^{1/4}\hat{R} &= (\mu/\beta^2)\theta^{-1/2}\hat{R}^2 + \frac{b_1 \sin \Psi + b_2 \cos \Psi}{\rho_0\sqrt{\theta} + \theta^{-1/4}\hat{R}/\beta}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Как видим, левая часть содержит оператор для системы маятника. Периодическое решение маятника $\hat{R}_0(S, E)$, $\Psi_0(S, E)$ с переменной $S \approx \theta^{5/4} \cdot 4\beta/5$ берется в качестве главного члена асимптотики при $\theta \rightarrow \infty$. Дальнейшая конструкция состоит в построении асимптотики в виде рядов по степеням $\theta^{-n/4}$, $n = 1, 2, \dots$, с периодическими коэффициентами $\hat{R}_n(S, E)$, $\Psi_n(S, E)$. При этом приходится строить в виде таких же рядов асимпотику для фазовой переменной $S = S(\theta)$ и для “энергии” $E = E(\theta)$; в этом состоит суть нелинейного метода ВКБ. В функциях $E(\theta)$, $S(\theta)$ появляются две константы интегрирования, которые соответствуют двум параметрам рассматриваемого решения. При этом оказывается, что $E(\theta) \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$. Окончательная асимптотика по степеням, кратным $\theta^{-1/8}$, получается после перераспределения сложных функций $\hat{R}_n(S(\theta), E(\theta))$, $\Psi_n(S(\theta), E(\theta))$ с учетом асимптотики по малой энергии $E(\theta) \rightarrow 0$. Наличие двух произвольных констант интегрирования в асимптотическом решении позволяет обосновать такую асимпотику, доказав теорему существования для остатка [68], [69]. Описанную конструкцию можно сделать более прозрачной, если в уравнениях (3.8) выполнить переход к переменным типа энергия–фаза, используя решение для невозмущенного маятника.

3.3.3. ВКБ-асимптотики с ограниченной амплитудой. Для полноты изложения приведем результаты о решениях с ограниченной амплитудой, которые не являются авторезонансными [67].

ТЕОРЕМА 3.5. *Если $\nu\mu < 0$, то любое решение уравнений (3.6) имеет амплитуду $R(\theta)$, ограниченную на бесконечности.*

Ограниченные решения существуют и в случае $\nu\mu > 0$.

ТЕОРЕМА 3.6. *Если $\nu\mu > 0$, то уравнения (3.6) имеют двухпараметрическое решение с амплитудой $R(\theta)$, ограниченной на бесконечности.*

Захват в резонанс вблизи равновесия обладает одним преимуществом по сравнению с описанным в разделе 1. Он случается даже в ситуации, когда

внешняя частота накачки, меняясь, проходит резонансное значение. Этот вывод следует из результата о существовании двухпараметрического семейства решений, амплитуда которых ограничена при $\theta \rightarrow -\infty$ и растет при $\theta \rightarrow +\infty$ (см. [98]).

Все результаты переносятся на усредненные уравнения в общем случае (3.5). В главных членах асимптотики отличие будет лишь для фазы, которая определяется из уравнения $\hat{f}(\Psi) = 0$.

3.4. Авторезонанс на субгармониках. Если при выбранной частоте накачки с условием (3.4) в возмущении $f(0, \sigma, \varphi)$ отсутствуют резонансные слагаемые: $f_{p,q}(0) = 0$ для $q/p = \varrho$, то амплитуда остается ограниченной при $\theta \rightarrow \infty$ и авторезонанс не возникает. Здесь следует добавить: “не возникает в масштабе медленного времени $\theta = \varepsilon^{2/3}t$ ”. Оказывается, что при некоторых условиях авторезонанс может обнаружиться в более медленных временных масштабах, например при $\vartheta = \varepsilon^{4/3}t$. К такого типа явлениям приводит резонанс на субгармониках. Он возникает, например, в случае монохроматической накачки, когда собственная частота кратна вынуждающей частоте в начальный момент $\dot{\varphi}(0) = \omega_0/n$ с целым n . Нелинейность уравнений является тем механизмом, который порождает основную гармонику, на которой проявляется авторезонанс. Однако из-за малости амплитуды эти эффекты имеют место на более далеких временах. Так, в случае накачки с полуцелым соотношением $\dot{\varphi}(0) = \omega_0/2$ субгармонический резонанс порождается квадратичными нелинейностями. Формальные асимптотические конструкции мало отличаются от приведенных выше и приводят к усредненным уравнениям того же типа [99], [100]. Отличия содержатся лишь в масштабе медленного времени и в формулах для коэффициентов. Субгармонический авторезонанс исследован не полностью, и имеются указания [101] на отсутствие этого явления для $n \geq 4$.

4. Параметрический авторезонанс

В теории усреднения принято особо выделять параметрически возмущенные задачи, связывая с ними понятие параметрического резонанса. Такое выделение частично обусловлено спецификой получаемых усредненных уравнений, в решениях которых (в линейном случае) обнаруживается неустойчивость в виде экспоненциального роста по времени: [32; гл. III, § 17, с. 250]; [7; гл. 11, п. 11.2, с. 223]. В теории авторезонанса для подобных задач также обнаруживается специфика как усредненных уравнений, так и их решений. Однако в отличие от линейных уравнений никаких неустойчивостей здесь не случается.

Обычно под параметрическим возмущением понимается наличие малого параметра в коэффициентах уравнений. Так, в системе

$$\dot{x} - \omega y = 0, \quad \dot{y} + [1 + \varepsilon \cos \Omega t] \omega x = 0 \quad (0 < \varepsilon \ll 1) \quad (4.1)$$

параметрическое возмущение содержится в коэффициенте $\varepsilon \cos(\Omega t)$. В случае нелинейного уравнения возмущение может быть более сложным; например,

$\ddot{x} + \sin((1 + \varepsilon \cos \Omega t)x)$. Возможно, в качестве подходящего определения можно взять следующее: *неподвижная точка невозмущенной системы остается решением при параметрическом возмущении.*

4.1. Постановка задачи и результат. При исследовании нелинейных колебаний вдали от равновесия принципиальных отличий между параметрическим и непараметрическим возмущениями не возникает. Сходство таких задач проявляется на уровне усредненных уравнений, которые слабо зависят от типа возмущения. Этот факт легко усмотреть из совпадения структуры исходных уравнений в переменных типа действие–угол. Например, в случае параметрически возмущенного линейного осциллятора (4.1) после преобразования к переменным энергия–угол $x = \sqrt{E} \cos \psi$, $y = \dot{x} = -\sqrt{E} \sin \psi$ уравнения принимают вид, соответствующий общему случаю (1.1):

$$\dot{E} = \varepsilon E \omega \sin 2\psi \cos \Omega t, \quad \dot{\psi} = \omega + \varepsilon \frac{\omega}{2} (1 + \cos 2\psi) \cos \Omega t. \quad (4.2)$$

Заметим, что здесь возмущение не содержит первой гармоники по ψ и резонанс возможен лишь на второй гармонике с частотой накачки $\Omega = 2\omega$. В нелинейном случае параметрически возмущенные уравнения имеют подобную структуру, которая соответствует (1.1). Их усреднение вдали от равновесия приводит к фазовому уравнению типа (1.11), как это описано в разделе 1.

Специфика параметрического возмущения проявляется вблизи устойчивого равновесия, где усредненные уравнения получаются совершенно иные, отличные от выписанных в предыдущих разделах. На уровне исходной задачи существенную разницу с непараметрическим возмущением можно усмотреть на примере (4.2). Правые части здесь, в отличие от (3.1), не только не содержат особенности в точке равновесия $E = 0$, но имеют нуль в первой компоненте при $E \rightarrow 0$. Подобные свойства обнаруживаются и в нелинейных уравнениях с параметрическим возмущением, так что в переменных типа энергия–фаза следует рассматривать уравнения типа (1.1) с правыми частями $f(E, \psi, \varphi) = \mathcal{O}(E)$, $g(E, \psi, \varphi) = \mathcal{O}(1)$ при $E \rightarrow 0$. Именно такая структура приводит к особому виду усредненных уравнений вблизи равновесия $E = 0$. Если исходные уравнения не приведены к переменным энергия–фаза, то удобно использовать полярные координаты r , σ на фазовой плоскости с центром в неподвижной точке. При этом вместо амплитуды r можно взять квадрат амплитуды $\mathcal{E} = r^2$ – величину, асимптотически совпадающую с энергией при $r \rightarrow 0$. Например, для системы маятника с параметрическим возмущением

$$\dot{x} - y = 0, \quad \dot{y} + (1 + \varepsilon \cos \varphi) \sin x = 0 \quad (4.3)$$

после замены $x = \sqrt{\mathcal{E}} \cos \sigma$, $y = -\sqrt{\mathcal{E}} \sin \sigma$ уравнения в координатах $\mathcal{E}$, σ приобретают вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= 2\sqrt{\mathcal{E}} [\sin(\sqrt{\mathcal{E}} \cos \sigma) - \sqrt{\mathcal{E}} \cos \sigma] \sin \sigma - \varepsilon \sqrt{\mathcal{E}} \sin(\sqrt{\mathcal{E}} \cos \sigma) \sin \sigma \cos \varphi, \\ \dot{\sigma} &= \left[\sin^2 \sigma + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \sin(\sqrt{\mathcal{E}} \cos \sigma) \cos \sigma \right] + \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \sin(\sqrt{\mathcal{E}} \cos \sigma) \cos \sigma \cos \varphi. \end{aligned}$$

Эти уравнения не содержат особенностей в точке равновесия при $\mathcal{E} \rightarrow 0$.

Мы объединим оба типа уравнений, рассматривая их в общей форме

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = f_0(\mathcal{E}, \sigma) + \varepsilon \mathcal{E} \cdot f(\mathcal{E}, \sigma, \varphi), \quad \frac{d\sigma}{dt} = \omega(\mathcal{E}, \sigma) + \varepsilon g(\mathcal{E}, \sigma, \varphi). \quad (4.4)$$

Здесь заданные функции $f_0(\mathcal{E}, \sigma)$, $\omega(\mathcal{E}, \sigma)$ и $f(\mathcal{E}, \sigma, \varphi)$, $g(\mathcal{E}, \sigma, \varphi)$, определенные в окрестности нуля $\mathcal{E} \in [0, E_0]$, считаются гладкими по всем переменным и 2π -периодическими по σ и φ . Величину $\mathcal{E}$ будем называть энергией. Ставится задача о построении асимптотики решений при $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 \leq t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-2})$.

Специфика рассматриваемых уравнений заложена в множителе $\mathcal{E}$ и в структуре асимптотики при $\mathcal{E} \rightarrow 0$:

$$\omega(\mathcal{E}, \sigma) = \omega_0 + \omega_1(\sigma)\mathcal{E} + \mathcal{O}(\mathcal{E}^2), \quad f_0(\mathcal{E}, \sigma) = f_{0,1}(\sigma)\mathcal{E} + \mathcal{O}(\mathcal{E}^2), \quad \mathcal{E} \rightarrow 0,$$

с коэффициентами $\omega_0, \langle \omega_1(\sigma) \rangle = \text{const} \neq 0$, $\langle f_{0,1}(\sigma) \rangle = 0$. Угловыми скобками обозначается интеграл среднего значения по угловой переменной. В случае, когда уравнения (4.4) получены из (1.1), они выглядят наиболее просто, поскольку $f_0 \equiv 0$ и невозмущенная частота не зависит от угла: $\omega = \omega(\mathcal{E}) = \omega(0) + \omega'(0)\mathcal{E} + \mathcal{O}(\mathcal{E}^2)$, $\mathcal{E} \rightarrow 0$.

Далее анализируются решения, для которых энергия $\mathcal{E}(t; \varepsilon)$ в начальный момент $t = 0$ мала:

$$\mathcal{E}(t; \varepsilon)|_{t=0} = \Delta \quad (0 < \Delta \ll 1), \quad \sigma(t; \varepsilon, \alpha)|_{t=0} = \sigma_0. \quad (4.5)$$

Главным требованием в постановке задачи является резонансное условие в форме (3.4). Неавтономный характер возмущения определяется заданной функцией $\varphi = \Omega t + \alpha t^2/2$, $\Omega = \text{const}$, $|\alpha| \ll 1$.

Цель дальнейших построений – выявить условия на исходные данные, т. е. на функции $f(r, \psi, \varphi)$, $g(r, \psi, \varphi)$ и на соотношение малых параметров ε , α , Δ , при которых энергия нарастает со временем и становится порядка единицы (не малой величиной), так что $\mathcal{E}(t; \varepsilon) = \mathcal{O}(1)$ на достаточно далеких временах. Такие решения будем называть авторезонансными.

Решение этой задачи основано на построении асимптотики по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$ на начальном этапе захвата в резонанс $t \ll \varepsilon^{-2}$. Асимптотика на далеких временах (во внешней области) $t \approx \varepsilon^{-2}$ может быть построена аналогично [80], [82]; однако согласование асимптотик не проводилось, и публикации отсутствуют. Формулируя основной результат, обратим внимание на изменение масштабов по сравнению с непараметрическим возмущением и на более медленное изменение частоты накачки.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнено резонансное условие (3.4) и разложение Фурье функции $f(0, \psi, \varphi)$ содержит отличные от нуля резонансные коэффициенты, т. е. существуют p и q такие, что $f_{p,q} \neq 0$ и $-q/p = \varrho$.

1. Чтобы для уравнений (4.4) вблизи равновесия был возможен асимптотический захват в резонанс с положительной энергией $\mathcal{E} > 0$, необходимо условие $\alpha \cdot \langle \omega_1 \rangle > 0$.

2. Если при этом для малых параметров выполнены соотношения $0 < |\alpha| \leq \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, то существует двухпараметрическое семейство решений с малой начальной энергией $\Delta \leq \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, которые захватываются в резонанс, так

что имеет место асимптотическая связь частот: $\dot{\sigma} = \varrho \dot{\varphi}(t) + o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, на большом промежутке времени $0 < t \leq \mathcal{O}(\alpha^{-1})$. На начальном этапе энергии имеет асимптотику $\mathcal{E}(t; \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{E}_1(\varepsilon t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $0 < t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, с неограниченно растущим коэффициентом $\mathcal{E}_1(\vartheta) = \mathcal{O}(\vartheta)$, $\vartheta \rightarrow \infty$.

3. Имеется двухпараметрическое семейство решений, которые не захватываются в резонанс, так что энергия остается порядка ε с коэффициентом $\mathcal{E}_1(\vartheta) = \mathcal{O}(1)$, $\vartheta \rightarrow \infty$.

КОММЕНТАРИЙ. Аналитическое описание области захвата отсутствует. Асимптотический анализ при $\lambda \rightarrow 0$ для этой задачи приведен в разделе 7, результаты численного моделирования приведены в разделе 8.

Следующие пункты содержат доказательство теоремы 4.1.

4.2. Уравнения главного параметрического резонанса. Вывод усредненных уравнений на начальном этапе захвата в резонанс основан на методе двухмасштабных разложений [32] с использованием медленного времени $\vartheta = \varepsilon t$. В качестве быстрого времени используется фаза внешней накачки φ . Решение ищется в виде функций, зависящих от двух времен $\mathcal{E}(t; \varepsilon) = \tilde{\mathcal{E}}(\varphi, \vartheta; \varepsilon)$, $\sigma(t; \varepsilon) = -(q/p)\varphi + \tilde{\sigma}(\varphi, \vartheta; \varepsilon)$. В двухмасштабной записи исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} \partial_{\varphi} \tilde{\mathcal{E}} + \varepsilon \partial_{\vartheta} \tilde{\mathcal{E}} &= f_0(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\sigma} + \varrho \varphi) + \varepsilon \tilde{\mathcal{E}} \cdot f(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\sigma} + \varrho \varphi, \varphi), \\ \dot{\varphi} [\varrho + \partial_{\varphi} \tilde{\sigma}] + \varepsilon \partial_{\vartheta} \tilde{\sigma} &= \omega(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\sigma} + \varrho \varphi) + \varepsilon g(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\sigma} + \varrho \varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Асимптотическое решение строится в виде рядов по целым степеням ε :

$$\tilde{\mathcal{E}}(\varphi, \vartheta; \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{E}_1(\vartheta) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{E}_n(\varphi, \vartheta), \quad \tilde{\sigma}(\varphi, \vartheta; \varepsilon, \alpha) = \Psi_0(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_n(\varphi, \vartheta).$$

Зависимость коэффициентов от быстрой переменной φ находится из рекуррентной системы дифференциальных уравнений. При выбранной частоте накачки $\dot{\varphi} = [\Omega + \varepsilon(\alpha/\varepsilon^2)\vartheta]$ уравнения имеют вид

$$\Omega \cdot \partial_{\varphi} \mathcal{E}_n = F_n(\varphi, \vartheta), \quad \Omega \cdot \partial_{\varphi} \Psi_{n-1} = G_{n-1}(\varphi, \vartheta) \quad (n \geq 2).$$

Правые части вычисляются через предыдущие приближения. Дополнительным условием к анзацу является требование периодичности коэффициентов $\mathcal{E}_n(\varphi, \vartheta)$, $\Psi_n(\varphi, \vartheta)$ по быстрой переменной φ . Это секулярное условие на первых шагах приводит к усредненным уравнениям для $\mathcal{E}_1(\vartheta)$, $\Psi_0(\vartheta)$:

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{d\vartheta} = \mathcal{E}_1 \hat{f}(\Psi_0), \quad \frac{d\Psi_0}{d\vartheta} = \langle \omega_1 \rangle \mathcal{E}_1 - \varrho \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \vartheta + \hat{g}(\Psi_0). \quad (4.6)$$

В постановке задачи Коши уравнения дополняются соответствующими начальными данными $\mathcal{E}_1|_{\vartheta=0} = \Delta/\varepsilon$, $\Psi_0|_{\vartheta=0} = \sigma_0$.

Если исходные возмущения f, g содержат лишь одну резонансную гармонику, то для коэффициента Фурье можно использовать представление $f_{p,q} = F \exp(i\Phi) + \text{с.с.}$ и ввести новые переменные $R = \mathcal{E}_1$, $\Psi = p\Psi_0 + \Phi + \pi/2$. Тогда уравнения (4.6) приводятся к виду

$$\frac{dR}{d\vartheta} = 2FR \sin \Psi, \quad \frac{d\Psi}{d\vartheta} = \mu R - \nu\vartheta + b_s \sin \Psi + b_c \cos \Psi, \quad (4.7)$$

где $\mu = p\langle\omega_1\rangle$, $\nu = -q\alpha/\varepsilon^2$, $b_s, b_c = \text{const}$; без ограничения общности можно считать, что $F\nu > 0$. В конкретных ситуациях [48], [102] и, в частности, для примера параметрически возмущенного маятника (4.3) уравнения (4.7) имеют коэффициенты $b_s = 0$, $F = b_c$ и после перенормировки получается система (0.6) с $\lambda = \nu \operatorname{sgn} \mu / (4F^2)$. Если перейти к амплитуде $r = \sqrt{R}$, то приходим к уравнениям, выведенным в [48], [49].

Полученная конструкция показывает, что на временном масштабе $\vartheta = \varepsilon t \approx 1$ энергия остается малой в главном члене асимптотики

$$\mathcal{E}(t; \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{E}_1(\vartheta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При росте времени $\vartheta \rightarrow \infty$ возможны два варианта: функция $R(\vartheta)$ либо ограничена, либо неограниченно растет. Второй случай соответствует захвату в параметрический резонанс.

4.3. Асимптотики решений для уравнений главного параметрического резонанса. В данном пункте для уравнений параметрического главного резонанса приводятся результаты о существовании решений с неограниченно растущей энергией. Главный член асимптотики на бесконечности определяется соотношением $R(\vartheta) = \nu\vartheta/\mu + \mathcal{O}(\vartheta^{-3/8})$, $\vartheta \rightarrow \infty$. Эти решения описывают начальный этап авторезонанса. Однако уравнения (4.6) не являются интегрируемыми, и начальные данные для авторезонансных решений не удастся идентифицировать. Исследование этой задачи для уравнения (0.6) в асимптотике при $\lambda \rightarrow 0$ проведено в [59].

4.3.1. Решения с ограниченной энергией. Чтобы понять структуру асимптотики разных решений, полезно проанализировать частные случаи. Прежде всего укажем на тривиальные решения с нулевой амплитудой $R(\vartheta) \equiv 0$. Соответствующее уравнение для фазы не интегрируется. Тем не менее, для его решений легко выписывается асимптотика на бесконечности в виде степенного ряда

$$\Psi(\vartheta) = -s + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta^{-n} \psi_n(s), \quad \vartheta \rightarrow \infty,$$

с коэффициентами, периодическими по “быстрой” переменной $s = \nu\vartheta^2/2 + \gamma \ln \vartheta + s_0$ ($\gamma = \text{const}$) для любого $s_0 = \text{const}$. Получаемое таким образом семейство решений зависит от одного параметра s_0 . Очевидно, что на всех других решениях амплитуда не обращается в нуль, $R(\vartheta) \neq 0$, в силу теоремы единственности. Асимптотики ограниченных решений построены в [102]:

ТЕОРЕМА 4.2. Для уравнений (4.7) существует двухпараметрическое семейство решений $R(\vartheta; c, s_0)$, $\Psi(\vartheta; c, s_0)$, которые на бесконечности разлагаются в асимптотические ряды:

$$R(\vartheta; c, s_0) = c\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta^{-n} \rho_n(s; c), \quad \Psi(\vartheta; c, s_0) = -s + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta^{-n} \psi_n(s; r_0).$$

Коэффициенты являются гладкими периодическими функциями от “быстрой” переменной $s = \nu\vartheta^2/2 - c\mu\vartheta + \gamma \ln \vartheta + s_0$. Этим исчерпываются все ограниченные решения.

Найденные решения усредненных уравнений не имеют отношения к авторезонансу. Более того, они указывают на наличие богатого множества начальных значений, при которых авторезонанс невозможен.

4.3.2. Решения с неограниченной энергией. Нетрудно построить асимптотическое решение в виде степенных рядов

$$R(\vartheta) = \frac{\nu\vartheta}{\mu} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^{-k/2} \rho_k, \quad \Psi(\vartheta) = \psi_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \vartheta^{-k/2} \psi_k, \quad \vartheta \rightarrow \infty. \quad (4.8)$$

Конструкции незначительно отличаются от тех, что приведены в предыдущем разделе. Главный член фазы извлекается из уравнения $\sin \psi_0 = 0$. Поскольку тригонометрическое уравнение имеет два различных (по модулю 2π) корни $\psi_0 = 0$, $\psi_0 = \pi$, то возможно построение двух асимптотических решений.

ТЕОРЕМА 4.3. Для уравнений (4.7) существует единственное решение, которое имеет асимптотическое разложение вида (4.8) с $\psi_0 = \pi$.

ТЕОРЕМА 4.4. Для уравнений (4.7) существует однопараметрическое семейство решений, которые имеют одно и то же асимптотическое разложение в виде рядов (4.8) с $\psi_0 = 0$. Разные решения экспоненциально близки при $\vartheta \rightarrow \infty$.

Помимо того, имеется двухпараметрическое семейство решений, которые разлагаются в асимптотические ряды с осциллирующими коэффициентами.

ТЕОРЕМА 4.5. Для уравнений (4.7) существует двухпараметрическое семейство решений $R(\vartheta; C, S_0)$, $\Psi(\vartheta; C, S_0)$, которые на бесконечности разлагаются в степенные асимптотические ряды с коэффициентами, зависящими от “быстрой” переменной $S = S_3\vartheta^{3/2} - S_2(C)\vartheta + S_1(C)\vartheta^{1/2} + S_{0,1}(C) \ln \vartheta + S_0$, $S_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2F\nu}$. Первые члены асимптотики имеют вид:

$$R(\vartheta; C, S_0) = \frac{1}{\mu} [\vartheta\nu + \sqrt{\vartheta 2F\nu} \cdot \rho(S; C)] + \mathcal{O}(1),$$

$$\Psi(\vartheta; C, S_0) = \psi(S; C) + \mathcal{O}(\vartheta^{-1/2})$$

при $\vartheta \rightarrow \infty$. Функции $\rho(S; C)$, $\psi(S; C)$ определяются из уравнений маятника: $\dot{\rho} = \sin \psi$, $\dot{\psi} = \rho$. Произвольный параметр C соответствует первому интегралу этой системы. Неподвижные точки системы маятника индуцируют решения со степенными асимптотиками (4.8).

Формальные конструкции и обоснования асимптотик во многом аналогичны тем, что приведены в разделе 3 для уравнений типа (0.5) (см. [68]). Отличие состоит в том, что в старших поправках асимптотики возникают дробные степени $\vartheta^{-\nu}$, показатели которых определяются через отношения коэффициентов F , b_c , b_s . Все результаты можно перенести на усредненные уравнения в общем случае (4.6), однако детальный анализ не проводился.

5. Конечномерные системы

Для систем с более чем одной степенью свободы математических исследований по теории авторезонанса имеется не много¹³. Опубликованные в этом направлении работы физиков ориентированы на использование известных результатов и имеют дело с задачами, которые при усреднении сводятся к одномерной системе типа (0.5). Рассматриваемые при этом исходные уравнения имеют весьма специфическую структуру [103]–[106]. Фактически были исследованы одночастотные системы, которые не содержат внутренних резонансов, т.е. по существу одномерные. Естественно, что на таком пути нельзя ожидать новых серьезных математических результатов. Более перспективными представляются исследования существенно неодномерных задач. Пример такого типа дает система слабо связанных нелинейных осцилляторов при наличии квадратичных либо кубических (внутренних) резонансов [107]. Еще один пример получается при редукции системы трех волн для задачи из физики плазмы [108]. Проблема состоит в переводе системы из состояния, близкого к равновесию, в состояние с конечными (не малыми) амплитудами колебаний за счет внешней накачки с малой амплитудой и медленно меняющейся частотой.

Уравнения, которые рассматриваются ниже, имеют определенный физический смысл; однако связь с конкретными приложениями мы не обсуждаем. Акцент делается на новых математических задачах, которые касаются асимптотики решений на бесконечности для неавтономных систем нелинейных уравнений. Эти уравнения возникают при усреднении и представляют собой аналоги уравнений главного резонанса (0.5) вблизи устойчивого равновесия. Одна из таких систем для задачи с тремя степенями свободы, записанная в переменных амплитуда–угол, имеет вид

$$\frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = f_j \sin(\psi_j - \varphi_j), \quad \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi = f_j \cos(\psi_j - \varphi_j); \quad (5.1)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = -1 \quad (j = 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6, \quad k \neq l).$$

Характерной чертой уравнений является квадратичный рост на бесконечности заданных фазовых функций: $\varphi_j(\theta) = \theta^2 \alpha_j / 2 + \theta \alpha_j^1 + \alpha_j^0$. Задача состоит

¹³Не исследованы даже задачи о прохождении через локальный и нелинейный резонанс [84; гл. 4, § 22, п. 22.11, с. 105].

в построении асимптотики на бесконечности для шести параметрических решений. *Основная цель – выявление решений с резонансным захватом, когда амплитуды неограниченно растут.*

5.1. Вывод усредненных уравнений. Уравнения типа (5.1) возникают при рассмотрении разных физических задач. В частности, к ним приводит описание процесса синхронизации в двухконтурном генераторе [109], описание взаимодействия акустических волн в резонаторе [110], наконец, в пространственно однородном случае к (5.1) редуцируется известная система трех волн [111]. Все эти конкретные физические процессы моделируются системой трех слабо-нелинейных осцилляторов. В случае слабой нелинейности и слабой внешней накачки математическая модель содержит малый параметр:

$$\frac{d^2 z_j}{dt^2} + \omega_j^2 z_j = \varepsilon G_j(\mathbf{z}, \varepsilon) + \varepsilon F_j(\theta) \cos(\omega_j t + \varphi_j(\theta)), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), \quad \theta = \varepsilon t.$$

Здесь $\omega_j = \text{const}$; задача с переменными собственными частотами $\omega_j(\varepsilon^2 t)$ при $F_j \equiv 0$ исследована в [112], [113].

Уравнения вида (5.1) получаются в асимптотическом пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и описывают медленные деформации амплитуд и сдвигов фаз быстрых гармонических колебаний. Вывод таких усредненных уравнений в самых общих ситуациях можно найти в известных монографиях, например в [32]. Структура этих уравнений определяется как видом возмущения, так и резонансными соотношениями. Мы укажем класс исходных задач, которые ведут к специфическим усредненным уравнениям (5.1). В качестве нелинейных слагаемых в возмущении рассматриваются квадратичные формы

$$G_j(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=k}^3 P_j^{kl} z_k z_l, \quad P_j^{kl} = \text{const}.$$

Временной масштаб, на котором эти нелинейности проявляются в главном члене асимптотики, зависит от резонансных соотношений между собственными частотами. Рассматривается случай квадратичного резонанса $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$. Обратим внимание на наличие резонансов между собственными и вынуждающими частотами в начальный момент.

Для формального построения асимптотического решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ используется анзац двухмасштабного разложения на основе общего решения линейного осциллятора

$$z_j = A_j(\theta) \exp(i\omega_j t) + A_j(\theta) \exp(-i\omega_j t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n z_j^n(t, \theta), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\theta = \varepsilon t).$$

Зависимость от быстрой переменной t в коэффициентах $z_j^n(t, \theta)$ определяется из рекуррентной системы линейных уравнений

$$\frac{\partial^2 z_j^n}{\partial t^2} + \omega_j^2 z_j^n = H_j^n(t, \theta).$$

Требование отсутствия в коэффициентах растущих по t (секулярных) слагаемых приводит к уравнениям, из которых определяется зависимость от медленного времени θ . На первом шаге получаются уравнения для комплексных амплитуд $A_j(\theta)$:

$$iA'_j - \tilde{\gamma}_j \bar{A}_k \bar{A}_l = \tilde{F}_j(\theta) \exp(i\varphi_j(\theta)), \quad j = 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6, \quad j \neq k \neq l,$$

с коэффициентами $\tilde{\gamma}_j = \omega_j^{-1} P_j^{kl}/2$, $\tilde{F}_j(\theta) = \omega_j^{-1} F_j(\theta)/4$. Нелинейные слагаемые с участием произведения сопряженных функций $\bar{A}_k \bar{A}_l$ возникают из-за основного внутреннего резонанса.

После подходящей перенормировки переменных для амплитуд и фаз комплексных функций $A_j = 2\omega_j |P_k^{jl} P_l^{jk}|^{-1/2} \rho_j(\theta) \exp(i\psi_j(\theta))$ получаются уравнения (5.1) с данными

$$\gamma_j = \operatorname{sgn} P_j^{kl}, \quad f_j(\theta) = -\frac{1}{8} \omega_j^{-2} \sqrt{|P_k^{jl} P_l^{jk}|} F_j(\theta), \quad j + k + l = 6, \quad j \neq k \neq l.$$

В уравнениях (5.1) легко усмотреть редукцию к двумерной системе с $\rho_2 \equiv \rho_3$.

Если каждую пару переменных ρ_j, ψ_j рассматривать как полярные координаты на плоскости, то в соответствующих декартовых координатах $x_j = \rho_j \cos \psi_j$, $y_j = \rho_j \sin \psi_j$ уравнения (5.1) принимают более симметричный вид

$$\frac{dx_j}{d\theta} + \gamma_j(x_k y_l + y_k x_l) = f_j \sin \varphi_j, \quad \frac{dy_j}{d\theta} + \gamma_j(x_k x_l - y_k y_l) = f_j \cos \varphi_j.$$

Однако при построении асимптотик удобнее пользоваться уравнениями в форме (5.1). При аккуратной постановке задачи дифференциальные уравнения должны быть дополнены условиями скачка для фаз при переходе амплитудой нулевого значения: $\psi_j(\theta + 0) - \psi_j(\theta - 0) = \pi$ при $\rho_j(\theta) = 0$.

5.2. Решения с ограниченными амплитудами. В случае, когда все f_j тождественно равны 0, получается однородная система, которая интегрируется в эллиптических функциях, и для любого решения амплитуды $\rho_j(\theta)$ ограничены равномерно по θ (см. ниже теорему 5.1). Неоднородная система с $f_j \neq 0$ не интегрируема; для ее решений можно исследовать асимптотики при $\theta \rightarrow \infty$ с использованием решения однородной системы в качестве главного члена. На этом пути было установлено существование шестипараметрического решения с ограниченными амплитудами [112]. В отличие от одномерного случая здесь наблюдается новый эффект, обусловленный неоднородностью системы. Он состоит в том, что в пространстве параметров $\mathbb{R}^6$ обнаруживаются резонансные поверхности, вблизи которых меняется структура асимптотики. Этот эффект обязан появлению малых знаменателей так же, как в теории КАМ. Асимптотика решений на резонансных поверхностях остается не исследованной.

Для проблемы авторезонанса более существенным является нахождение шестипараметрических семейств решений с неограниченно растущими амплитудами.

5.3. Резонансный захват в системе. Ниже речь пойдет о решениях уравнений (5.1) с неограниченно растущими амплитудами $\rho_j(\theta)$. В частном случае при $\varphi_j(\theta) = \alpha_j^0 + \alpha_j \theta^2/2$, когда исходные константы связаны соотношениями $\alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 = -3\pi/2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $f_1^2 = \alpha_2 \alpha_3$, $f_2^2 = -\alpha_1 \alpha_3$, $f_3^2 = -\alpha_1 \alpha_2$, можно выписать одно точное решение такого типа: $\rho_j = \theta f_j$, $\psi_j = \pi/2 + \varphi_j$. В общем случае наличие шестипараметрического семейства решений с растущими амплитудами $\rho_j(\theta) \approx \theta$ при $\theta \rightarrow \infty$ обнаруживается в численных экспериментах. Целью данного пункта является описание асимптотики на бесконечности для такого типа решений. Предлагаемый подход отличается от того, что был использован в одномерной задаче. Ввиду важности этих результатов приведем их в подробном изложении.

5.3.1. Автономная система. Основой для предлагаемых ниже асимптотических конструкций служат решения автономной системы, которая получается из (5.1) при $f_j = 0$:

$$\frac{d\rho_j}{d\eta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = 0, \quad \rho_j \frac{d\psi_j}{d\eta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi = 0 \quad (\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3); \quad (5.2)$$

здесь уравнения записаны с независимой переменной η ; значения γ_j, j, k, l те же, что в (5.1). Такая система легко интегрируется.

ТЕОРЕМА 5.1. *Для системы уравнений (5.2) существует общее шестипараметрическое решение*

$$\rho_j = \overset{0}{R}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}), \quad \psi_j = \overset{0}{\Psi}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}) + \eta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.3)$$

с шестью произвольными константами: $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ при $S_1 + S_2 + S_3 = 0$. Вектор-функции $\overset{0}{R}_j(\eta; \mathbf{E})$, $\overset{0}{\Psi}_j(\eta; \mathbf{E})$ являются гладкими, периодическим по η с периодом $\Theta = \Theta(\mathbf{E})$ и с частотой $\Omega = 2\pi/\Theta$. В фазовых функциях ψ_j содержатся линейные по η слагаемые с коэффициентами Ω_j , которые удовлетворяют соотношению $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Все остальные решения входят в четыре параметрические семейства и не представляют для нас интереса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы основано на наличии трех первых интегралов: $\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos \psi = E_1$, $\rho_2^2 + \rho_1^2 = E_2$, $\rho_3^2 + \rho_1^2 = E_3$, значения которых используются в качестве параметров. Поскольку уравнения для четырех функций ψ, ρ_j ($j = 1, 2, 3$) можно отделить от остальных, то первые интегралы обеспечивают решение задачи в терминах эллиптических функций Якоби. Например, выражение одной из компонент через функцию синус амплитуды имеет вид

$$\overset{0}{R}_1(\eta; \mathbf{E}) = [\eta_1 + (\eta_3 - \eta_1)k^2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{\eta_3 - \eta_1} \eta, k)]^{1/2}, \quad k^2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1}.$$

Используемые здесь значения $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ являются корнями полинома $\eta(E_2 - \eta)(E_3 - \eta) - E_1^2$. В терминах этой эллиптической функции выписываются остальные компоненты решения ρ_j, ψ_j .

При интегрировании уравнений для ψ_j появляются непериодические слагаемые $\eta\Omega_j$, обусловленные ненулевыми средними значениями в выражениях для Ω_j :

$$\Omega_j = -\gamma_j E_1 \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta (\overset{0}{R}_j)^{-2} d\eta \equiv -\gamma_j E_1 \langle (\overset{0}{R}_j)^{-2} \rangle.$$

Очевидно, что коэффициенты Ω_j отличны от нуля при $E_1 \neq 0$. Однако сумма их равна нулю: $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$, поскольку комбинационная фаза $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ является периодической функцией. По той же причине три константы интегрирования S_j содержат лишь два произвола; связь между ними определяется способом фиксации средних значений фаз $\overset{0}{\Psi}_j$. Например, можно считать, что $S_1 + S_2 + S_3 = 0$.

В декартовых переменных решение в ситуации общего положения представляется трехпериодическими функциями $x_j(\eta; \mathbf{E})$, $y_j(\eta; \mathbf{E})$ с частотами $\Omega(\mathbf{E})$, $\Omega_j(\mathbf{E})$. Имеются исключительные значения параметров: на плоскости $E_2 = E_3$ при $E_1 \neq 0$ решение вырождается в двухчастотное с $\Omega_2 = \Omega_3$ и $\rho_2(\eta) \equiv \rho_3(\eta)$; на плоскости $E_1 = 0$ при $E_2 \neq E_3$ решение вырождается в одночастотное с $\Omega_j = 0$. На пересечении плоскостей решение будет непериодическим. Еще одно исключительное множество в пространстве параметров выделяется условием функциональной зависимости частот:

$$\mathcal{E}_0 = \{\mathbf{E} \in \mathbb{R}^3 : \det \partial(\Omega, \Omega_k, \Omega_l) / \partial(\mathbf{E}) = 0 \ \forall k \neq l\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для матрицы, составленной из градиентов частот $\partial(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) / \partial(\mathbf{E})$, ранг зависит от параметров $\mathbf{E}$ и вне плоскостей $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ его значение $r = r(\mathbf{E}) \geq 2$; максимальный ранг равен 3 всюду вне $\mathcal{E}_0$.

5.3.2. Линеаризованная система. Построение асимптотик на основе решения невозмущенной системы, как обычно, приводит к линеаризованным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{d\eta} + \gamma_j [\overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l \cos \overset{0}{\Psi}] \Psi + \gamma_j [\overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l + \overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l] \sin \overset{0}{\Psi} &= H_{\rho,j}(\eta), \\ \frac{d\Psi_j}{d\eta} - \gamma_j \Psi \frac{\overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l \sin \overset{0}{\Psi}}{\overset{0}{R}_j} + \gamma_j \cos \overset{0}{\Psi} \frac{\overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l + \overset{0}{R}_l \overset{0}{R}_k - \overset{0}{R}_j \overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l / \overset{0}{R}_j}{\overset{0}{R}_j} &= H_{\psi,j}(\eta); \end{aligned} \quad (5.4)$$

здесь $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$ ($j = 1, 2, 3$; $j + k + l = 6$, $k \neq l$).

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть вектор-столбец

$$\overset{0}{\mathbf{Y}}(\eta; \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \left\{ \overset{0}{R}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}), \overset{0}{\Psi}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}) + \theta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j \right\}^\top$$

представляет собой построенное выше шестипараметрическое решение нелинейной системы (5.2) вне плоскостей $E_1 = 0$ и $E_2 = E_3$. Тогда для линеаризованной однородной системы, соответствующей (5.4), существует фун-

даментальная матрица решений $\mathcal{W}$, столбцы которой имеют следующую структуру:

$$\mathbf{Y}_i(\eta), \quad i = 0, 1, 2; \quad \mathbf{Y}_i(\theta) = \widehat{\mathbf{Y}}_i(\eta) + \eta \sum_{m=0}^2 \nu_{i,m} \mathbf{Y}_m(\eta), \quad i = 3, 4, 5.$$

Вектор-функции $\mathbf{Y}_i(\eta)$ ($i = 0, 1, 2$) и $\widehat{\mathbf{Y}}_i(\eta)$ ($i = 3, 4, 5$) являются периодическими по η с частотой $\Omega(\mathbf{E})$. Число линейно независимых непериодических решений равно r – рангу матрицы $\partial(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)/\partial(\mathbf{E})$, через элементы которой выражаются коэффициенты $\nu_{i,m} = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одна тройка линейно независимых решений получается при дифференцировании вектор-функции $\overset{0}{\mathbf{Y}}(\eta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ по переменным S_i и имеет вид: $\mathbf{Y}_0 = \partial_\eta \{ \overset{0}{R}_j, \overset{0}{\Psi}_j \}^\top$, $\mathbf{Y}_1 = (0, 0, 0, 1, 0, -1)^\top$, $\mathbf{Y}_2 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)^\top$. Другая тройка линейно независимых решений получается при дифференцировании по параметрам $\mathbf{E}$. Непериодические слагаемые обязаны зависимости частот от параметров $\mathbf{E}$; ранг матрицы $\{\nu_{i,m}\}$ равен r . Вронскиан вычисляется через след матрицы линеаризованной системы и для определенной выше системы решений выражается по формуле $\det \mathcal{W} = -(\overset{0}{4R}_1 \overset{0}{R}_2 \overset{0}{R}_3)^{-1}$.

Наличие фундаментальной системы решений, очевидно, позволяет выписать решения соответствующих неоднородных уравнений через интегралы. При этом основными объектами являются определители $W_i[\mathbf{H}]$, которые получаются из вронскиана $W = \det \mathcal{W}$ заменой i -го столбца $\mathbf{Y}_i$ на столбец правых частей $\mathbf{H}$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть значения параметров $\mathbf{E}$ не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и поверхности $\mathcal{E}_0$. Если вектор-функция правых частей $\mathbf{H}(\eta)$ имеет период $\Theta(\mathbf{E})$, то линеаризованная неоднородная система (5.4) имеет ограниченное (периодическое) решение тогда и только тогда, когда выполняются три условия ортогональности

$$\int_0^\Theta W_i[\mathbf{H}] \overset{0}{R}_1 \overset{0}{R}_2 \overset{0}{R}_3(\eta) d\eta = 0, \quad i = 3, 4, 5.$$

Общее периодическое решение содержит три константы при $\mathbf{Y}_i$, $i = 0, 1, 2$.

5.3.3. ВКБ-асимптотики растущих решений. Неавтономные уравнения (5.1) в общем случае не интегрируются. В этом пункте предъявляются асимптотические при $\theta \rightarrow \infty$ осциллирующие решения с линейно растущими амплитудами. Для их построения используется полученное выше невозмущенное решение (5.3) и применяются идеи нелинейного метода ВКБ [96]. Рост амплитуд идентифицируется множителем θ , который фигурирует в главном члене асимптотики $\rho_j \approx \theta \cdot \overset{0}{R}_j(\eta; \mathbf{E})$. Параметры $\overset{0}{\mathbf{E}} = (\overset{0}{E}_1, \overset{0}{E}_2, \overset{0}{E}_3) = \text{const}$ выбираются из резонансных условий: $\Omega_j(\overset{0}{\mathbf{E}}) - \alpha_j = m_j \Omega(\overset{0}{\mathbf{E}})$, $j = 1, 2, 3$, $m_j \in \mathbb{Z}$. Эти соотношения являются ключевыми при выделении решений с растущими амплитудами. При разных наборах целых чисел (m_1, m_2, m_3) получаются

разные корни $\overset{0}{\mathbf{E}}$, поэтому возможно построение растущих решений с разными главными членами.

Описание анзаца для асимптотического решения. Асимптотическая конструкция базируется на идеях двухмасштабных разложений в подходе Г. Е. Кузмака [96]. Вводится дополнительная, быстрая по сравнению с θ переменная $\eta = S_0(\theta)/\Omega(\overset{0}{\mathbf{E}})$ с фазовой функцией, определяемой из уравнения типа эйконала

$$\frac{dS_0}{d\theta} = \theta \cdot \Omega(\mathbf{E}). \quad (5.5)$$

В параметрах $\mathbf{E}$ допускается слабая зависимость от времени: $\mathbf{E} = \overset{0}{\mathbf{E}} + \theta^{-1}\mathbf{e}(\theta)$. Решение исходных уравнений (5.1) ищется в виде функций с выделенной зависимостью от быстрой переменной и с выделенным растущим множителем в амплитуде:

$$\rho_j(\theta) = \theta \cdot R_j(\eta, \theta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}), \quad \psi_j(\theta) = \Psi_j(\eta, \theta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}) + [m_j S_0 + S_j + \varphi_j(\theta)].$$

Зависимость от θ , допускаемая в параметрах $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, находится из уравнений переноса и эйконала:

$$\frac{d(\overset{0}{\mathbf{E}} + \theta^{-1}\mathbf{e})}{d\theta} = \mathbf{Q}(\theta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}), \quad \frac{dS_j}{d\theta} = -\varphi'_j(\theta) + \theta [\Omega_j(\overset{0}{\mathbf{E}} + \theta^{-1}\mathbf{e}) - m_j \Omega(\overset{0}{\mathbf{E}} + \theta^{-1}\mathbf{e})]. \quad (5.6)$$

Правые части уравнений переноса будут отыскиваться в виде асимптотических рядов по обратным степеням в ходе дальнейших построений:

$$\mathbf{Q} = \theta^{-1}\overset{1}{\mathbf{Q}}(\mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}) + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^{-n}\overset{n}{\mathbf{Q}}(\mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}). \quad (5.7)$$

Зависимость от медленной переменной θ содержится явно в асимптотическом решении в виде обратных степеней:

$$R_j = \overset{0}{R}_j(\eta; \overset{0}{\mathbf{E}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\overset{n}{R}_j(\eta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}), \quad \Psi_j = \overset{0}{\Psi}_j(\eta; \overset{0}{\mathbf{E}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n}\overset{n}{\Psi}_j(\eta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}). \quad (5.8)$$

Целью асимптотической конструкции является вычисление коэффициентов рядов (5.7), (5.8) с последующим интегрированием уравнений (5.6). На этом пути удастся разделить задачи по определению зависимости от быстрой η и медленной θ переменных в асимптотическом решении (5.8). Зависимость от η в поправках $\overset{n}{\Psi}_j$, $\overset{n}{R}_j$ находится из линеаризованных уравнений (5.4). Три условия, гарантирующие периодичность этих функций по η , приводят к определению коэффициентов $\overset{n}{\mathbf{Q}}(\mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}})$ через интегралы среднего значения по η . При этом для фаз $\psi_j - \varphi_j$ из правых частей (5.1) в главном члене асимптотики используется представление $\psi_j - \varphi_j = S_j + \sigma_j(\eta)$, где $\sigma_j(\eta) = \overset{0}{\Psi}_j(\eta; \overset{0}{\mathbf{E}}) + m_j \Omega(\overset{0}{\mathbf{E}})\eta$. По сути дела описанная процедура представляет собой замену переменных,

выполняемую в форме асимптотических рядов (5.8). Эта замена переводит исходные уравнения (5.1) в уравнения (5.5), (5.6), которые естественно назвать усредненными. Лишнее уравнение для фаз S_0 , S_j исключается требованием совместности главного члена с решением невозмущенных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 [m_j S_0 + S_j + \varphi_j(\theta)] = 0. \quad (5.9)$$

В результате получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.4. *При значениях параметров $\mathbf{E}^0$, которые не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и поверхности $\mathcal{E}_0$, существуют асимптотические ряды (5.7), (5.8) такие, что исходные уравнения (5.1) переходят в асимптотически эквивалентные уравнения (5.5), (5.6) с условием (5.9).*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Предъявляемые ряды (5.8) в членах с номерами $n \geq 1$ содержат произвольные константы при трех периодических решениях однородных уравнений (5.4). Однако, независимо от выбора этих констант, получаемые окончательно решения асимптотически совпадают, как это обычно бывает в ВКБ-приближениях [114], [115].

Основным результатом описанной процедуры следует считать формулы для первых членов асимптотики правых частей $\mathbf{Q}^1$, из которых извлекается структура уравнений (5.6) в главном члене при $\theta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{de_j}{d\theta} &= \beta_j(\mathbf{E}^0) - \sum_{k=1}^3 f_k [\beta_{j,k}^s(\mathbf{E}^0) \sin S_k + \beta_{j,k}^c(\mathbf{E}^0) \cos S_k], \\ \frac{dS_j}{d\theta} &= -\alpha_j^1 + \nabla [\Omega_j(\mathbf{E}^0) - m_j \Omega(\mathbf{E}^0)] \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Эти уравнения похожи на уравнения возмущенного маятника, которые возникают в такой же ситуации для одномерной задачи [67]. Коэффициенты выписываются через интегралы средних значений по быстрой переменной η . В этих интегралах, обозначаемых ниже угловыми скобками, участвуют эллиптические функции из невозмущенного решения с аргументом η и тригонометрические функции с аргументами $\sigma_k(\eta)$. Приведем соответствующие формулы в комплексном виде для $\beta_{j,k} = \beta_{j,k}^s + i\beta_{j,k}^c$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\mathring{E}_2\Omega_2(\mathbf{E}^0) + 2\mathring{E}_3\Omega_3(\mathbf{E}^0), \quad \beta_j = 2\mathring{E}_j \quad (j = 2, 3); \\ \beta_{1,1} &= \langle [((\mathring{R}_1)^{-2} + (\mathring{R}_2)^{-2} + (\mathring{R}_3)^{-2})\mathring{R}_1\mathring{E}_1 + i\partial_\eta\mathring{R}_1] \exp(i\sigma_1) \rangle; \\ \beta_{1,k} &= \langle (\mathring{R}_k)^{-1} [2\mathring{E}_1 + i\mathring{R}_1\partial_\eta\mathring{R}_1] \exp(i\sigma_k) \rangle \quad (k > 1); \\ j > 1: \quad \beta_{j,k} &= 2\langle \mathring{R}_k \exp(i\sigma_k) \rangle \quad (k = 1 \vee k = j); \quad \beta_{j,k} = 0 \quad (k > 1 \wedge k \neq j). \end{aligned}$$

В конечном счете коэффициенты усредненных уравнений (5.10) определяются параметрами возмущения $\{\alpha_j, f_j\}$.

Главное преимущество усредненных уравнений (5.6) состоит в их автономности в главном члене при $\theta \rightarrow \infty$ и в слабой зависимости от θ в последующих поправках. Это дает возможность эффективного исследования асимптотики их решений при $\theta \rightarrow \infty$, а тем самым, и асимптотики решений исходной системы (5.1). Сформулируем основной результат этого раздела:

ТЕОРЕМА 5.5. *При тех значениях исходных параметров $\{f_j, \alpha_j, \alpha_j^1, \alpha_j^0\}$, для которых усредненные уравнения (5.10) имеют ограниченные на бесконечности решения, существуют асимптотические решения уравнений (5.1) с растущими амплитудами $\rho_j(\theta) \approx \theta \cdot R_j^0(\eta; \mathbf{E}^0)$ при $\theta \rightarrow \infty$.*

В ряде случаев система (5.10) редуцируется к отдельным уравнениям возмущенного маятника, которые имеют ограниченные решения при достаточно больших амплитудах накачки f_j . В ситуации общего положения при больших f_j существует шестипараметрическое семейство таких решений.

6. Распределенные системы

Идея об авторезонансной накачке энергии в бесконечномерных системах, которые описываются уравнениями в частных производных, выглядит привлекательно как в прикладном, так и в теоретическом аспекте. Анализ соответствующих математических задач практически отсутствует на сегодняшний день. Известные аналитические результаты состоят в редукции (с той или иной степенью строгости) исходных уравнений к системе с одной степенью свободы и, в конечном счете, к известным уравнениям главного резонанса.

Самый простой шаг для перехода к задачам с уравнениями в частных производных состоит в использовании идей геометрической оптики (лучевого метода) [116]–[119]. При построении асимптотик по малому параметру возникают уравнения переноса для комплексной амплитуды, которые по сути представляют собой те же уравнения главного резонанса вдоль лучей. Отличие состоит в том, что в этих уравнениях имеется дополнительный параметр, “нумерующий” лучи. Авторезонансу соответствует неограниченный рост амплитуды на далеких временах. Однако в этой задаче надо учитывать фокусировку лучей и связанную с ней перестройку решения [116], [117]. Баланс этих двух эффектов (рост амплитуды и фокусировка) не исследован даже при медленной фокусировке. Пример конкретной задачи из физики плазмы, приведенный в [108], ограничивается случаем параллельных лучей, так что фокусировка отсутствует и специфика уравнений в частных производных никак не проявляется.

Другой, наиболее прозрачной по постановке представляется задача о возбуждении солитонов посредством малого внешнего возмущения [120]. Речь идет о солитонных решениях интегрируемых уравнений, у которых амплитуда меняется на величину порядка единицы под влиянием специфического малого возмущения с медленно меняющимися параметрами. В следующем разделе

обсуждается подход к этой задаче. Он основан на использовании теории возмущения солитонов, которая обеспечивает переход от исходного уравнения в частных производных к конечномерной динамической системе. На этом пути получаются обыкновенные дифференциальные уравнения с малым параметром, к которым затем применяются приемы, изложенные в предыдущих разделах. В конечном счете дело сводится к известным уравнениям главного резонанса. Такой подход реализован в [102], [121], [122].

Проблема авторезонансного возбуждения конечнозонных решений остается открытой. Аналитические результаты имеются лишь для сравнительно простых случаев [120], [123], [124], когда дело можно свести к одномерной системе уравнений главного резонанса типа (0.5). Наиболее эффективные результаты для конечнозонных решений получены численным моделированием [124]–[128]. В них, в частности, можно усмотреть аналогии с асимптотикой для “ступенчатых” решений интегрируемых уравнений [129]. Понятно, что в общем случае надо анализировать усредненные уравнения гидродинамического типа – аналоги уравнений главного резонанса, которые получаются методом Уизема [119], [130], однако публикации на этот счет отсутствуют.

Для полноты обзора отметим близкую по постановке задачу об использовании локального резонанса для возбуждения малоамплитудных солитонов. Так же, как в тривиальном примере (1.7), внешняя накачка с малой амплитудой порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$ при наличии локального резонанса приводит к изменению амплитуды решения на величину порядка $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Структура решения в главном члене асимптотики определяется амплитудой накачки и может иметь вид солитона [131]–[136]. Эти результаты, однако, не имеют отношения к авторезонансу ввиду малого изменения амплитуды решения и отсутствия резонансного захвата.

Ниже рассматривается уравнение sin-Gordon с малым осциллирующим по времени возмущением и с солитонными начальными данными. Исследуется задача о параметрическом авторезонансе вблизи равновесия, когда начальная амплитуда солитона мала и под действием малого возмущения нарастает до величины порядка единицы. Анализ похожей задачи вдали от равновесия выполнен в [121]. В том и другом случае специфика уравнения sin-Gordon не играет особой роли, поскольку по сути используются результаты теории возмущения солитонов, которая в своих конструкциях опирается на свойство интегрируемости невозмущенного уравнения. Поэтому предлагаемая методика годится для тех интегрируемых уравнений в частных производных, для которых разработана теория возмущений [137]–[139].

6.1. Параметрическое возбуждение бризера. Постановка исходной задачи сводится к исследованию асимптотики по малому параметру для решений уравнения sin-Gordon со специфическими возмущениями:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \sin u = -\beta \partial_t u + \varepsilon H \sin\left(\frac{u}{2}\right); \quad (6.1)$$

малые параметры содержатся в правой части: $0 \leq \beta, \varepsilon \ll 1$.

Выбор конкретного уравнения (6.1) продиктован двумя соображениями: 1) для решений, не зависящих от пространственной переменной x , уравнение редуцируется к математическому маятнику, и соответствующая задача об авторезонансе хорошо исследована; 2) для математической модели в форме (6.1) решения, локализованные в пространстве и описывающие аналог явления авторезонанса, представляют интерес в теории магнетизма [140]–[143].

Уравнения (6.1) интерпретируются как модель слабого ферромагнетика во внешнем магнитном поле H , которое параллельно намагниченности в основном состоянии. Дополнительные слагаемые, которые представлены в правой части соотношения (6.1), рассматриваются как малые параметрические возмущения. Учет в возмущении переменного магнитного поля $H = h_0 + \cos(\varphi(t))$, $h_0 = \text{const}$, $\varphi = \Omega t - \alpha t^2/2$, частота которого $\dot{\varphi} = \Omega - \alpha t$ медленно меняется (при $|\alpha| \ll 1$), представляет главную специфику задачи. Кроме того, в возмущении учитывается малая диссипация с коэффициентом $\beta \geq 0$.

Если ограничиться исследованием влияния возмущения на локализованные в пространстве неоднородности, то в качестве невозмущенного состояния естественно взять бризер. Такие состояния представляются посредством быстро убывающего на бесконечности решения невозмущенного уравнения sin-Gordon

$$u_0(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{A_0}{\omega_0} \frac{\sin(\omega_0 t + \psi_0)}{\cosh(A_0 x)} \right) \quad (A_0^2 + \omega_0^2 = 1, \quad A_0, \psi_0 = \text{const}).$$

Они характеризуются двумя константами – “амплитудой” A_0 и сдвигом фазы ψ_0 . В формальной постановке математической задачи возмущенные уравнения (6.1) дополняются начальными условиями, которые соответствуют невозмущенному бризеру с заданными значениями A_0, ψ_0 :

$$u|_{t=0} = u_0(x, 0), \quad \partial_t u|_{t=0} = \partial_t u_0(x, t)|_{t=0}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Требуется выявить условия на исходные данные β, H, A_0, ψ_0 , при которых решение возмущенной задачи со временем становится отличным от невозмущенного бризера на величину порядка единицы.

Предлагаемый ниже приближенный анализ возмущенного решения основан на наличии малых параметров в уравнении (6.1) и проводится с использованием результатов теории возмущения солитонов. Основная идея работ [137], [138] состоит в том, что главный член асимптотического решения представляется в виде бризера

$$u(x, t) = 4 \arctan \left(\frac{A(t)}{\omega} \frac{\sin \psi(t)}{\cosh(Ax)} \right) + o(1), \quad \varepsilon, \beta \rightarrow 0,$$

с $\omega = \sqrt{1 - A^2}$ при подходящем выборе фазы $\psi = \psi(t)$ и амплитуды $A = A(t)$. Известные результаты по существу состоят в предъявлении уравнений для функций $A(t), \psi(t)$ и в доказательстве малости поправок к главному члену асимптотики. Приведенные в [138] уравнения наиболее просто выглядят для

переменных типа энергия $\mathcal{E} = A^2$ – фаза ψ :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} &= \left(\varepsilon \frac{H}{\omega(\mathcal{E})} \sin \psi - \beta \cos \psi \right) \omega^2(\mathcal{E}) \cdot 2\mathcal{E} \cos \psi \cdot F(\mathcal{E}, \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(\mathcal{E}) - \left(\varepsilon \frac{H}{\omega(\mathcal{E})} \sin \psi - \beta \cos \psi \right) \sin \psi [1 + \mathcal{E} \cos^2 \psi \cdot F(\mathcal{E}, \psi)].\end{aligned}\quad (6.3)$$

В правой части здесь фигурирует функция

$$F(\mathcal{E}, \psi) = \frac{1}{1 - \mathcal{E} \cos^2 \psi} \left[1 + \int_0^\infty \left(\cosh^2 z + \frac{\mathcal{E} \sin^2 \psi}{1 - \mathcal{E}} \right)^{-1} dz \right],$$

которая является π -периодической по ψ . Величина ω соответствует собственной частоте невозмущенного брызера: $\omega(\mathcal{E}) = \sqrt{1 - \mathcal{E}}$ при $0 < \mathcal{E} < 1$.

На уровне приближенных уравнений (6.3) обсуждаемая проблема сводится к поиску условий, при которых функция $\mathcal{E}(t)$, как решение уравнений (6.3), меняется на величину порядка единицы, при том, что ε, β остаются малыми. Особый интерес представляет отыскание решений, у которых энергия, стартуя с малых значений $\mathcal{E}(t)|_{t=0} = A_0^2 \ll 1$, значительно нарастает со временем.

Фактически уравнения (6.3) описывают в переменных типа действие–угол $\mathcal{E}, \psi$ параметрическое возмущение нелинейного осциллятора, который имеет собственную частоту $\omega = \sqrt{1 - \mathcal{E}}$. Эти уравнения соответствуют тем, что рассматривались в разделе 4, при дополнительном учете малой диссипации с коэффициентом $0 < \beta \ll 1$. Анализ проводится *при переменной частоте накачки* $\dot{\varphi} = \Omega - \alpha t$ ($\Omega = 2, \alpha > 0$). На далеких временах эволюция по времени энергии $\mathcal{E}(t)$ в главном члене асимптотики определяется из резонансного условия

$$2\sqrt{1 - \mathcal{E}} = \dot{\varphi} \equiv 2 - \alpha t. \quad (6.4)$$

Это соотношение интерпретируется как захват системы в параметрический резонанс. Ясно, что изменения энергии на величину порядка единицы будут лишь на соответствующем временном масштабе $t \approx 1/|\alpha|$.

Главная проблема, которая здесь возникает, состоит в следующем: *существуют ли для дифференциальных уравнений (6.3) решения, для которых корень алгебраического уравнения (6.4) представляет собой главный член асимптотики по малому параметру $\varepsilon \rightarrow 0$, и как много существует таких решений?*

Ответы на эти вопросы даются при анализе начального этапа захвата в резонанс. Вблизи начального момента ($t \ll 1/\varepsilon^2$) имеется погранслоя, в котором приближенное решение определяется из дифференциальных уравнений. Основные результаты связаны с исследованием усредненных уравнений в этом погранслое. Для них доказывалось существование двухпараметрического семейства решений с растущей на бесконечности (на выходе из погранслоя) амплитудой. Именно эти решения соответствуют захвату в резонанс. Помимо того, существуют решения с амплитудой, ограниченной на выходе из погранслоя, которые соответствуют отсутствию захвата в резонанс. Разные классы решений в принципе можно разделить по начальным данным A_0, ψ_0 .

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть в начальный момент выполнено резонансное условие $\Omega = 2$ и малые параметры связаны соотношениями $0 < \alpha \leq \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $0 \leq \beta < \varepsilon/2$. Тогда существует область захвата начальных значений бризера A_0, ψ_0 с малой амплитудой $A_0 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$, для которых асимптотическое решение задачи Коши (6.1), (6.2) имеет амплитуду, нарастающую до величины порядка единицы. Если диссипация велика: $\beta > \varepsilon/2$, то резонансный захват невозможен.

Доказательство теоремы сводится к анализу усредненных уравнений на начальном этапе захвата в резонанс и приводится ниже. Область захвата аналитически не описана.

6.2. Начальный этап. Усредненные уравнения. Мы ограничиваемся анализом главных членов асимптотического решения уравнений (6.3), не выписывая старшие поправки рядов теории возмущения, (см. раздел 4). Анзац в начальном погранслое берется в виде

$$\mathcal{E} = \varepsilon R(\vartheta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \psi = \frac{1}{2} \left[\Omega t - \frac{\alpha t^2}{2} + \Psi(\vartheta) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\vartheta = \varepsilon t).$$

Целью конструкции является поиск решений, у которых $R(\vartheta) \rightarrow \infty$ при $\vartheta \rightarrow \infty$.

Формально уравнения для функций $R(\vartheta)$, $\Psi(\vartheta)$ получаются из (6.3) путем усреднения. При условии выполнения резонансного условия в начальный момент (на малой амплитуде), $2\omega(0) = \Omega$, эти уравнения имеют вид:

$$\frac{dR}{d\vartheta} = R \left[-\frac{2\beta}{\varepsilon} + \sin \Psi \right], \quad \frac{d\Psi}{d\vartheta} = -R + \frac{\alpha}{\varepsilon^2} \vartheta + \frac{1}{2} \cos \Psi \quad (6.5)$$

и отличаются от (0.6) лишь слагаемым, отвечающим за диссипацию при $\beta \neq 0$. В постановке задачи Коши уравнения дополняются начальными условиями, которые соответствуют параметрам начального бризера: $R|_{t=0} = A_0^2/\varepsilon$, $\Psi|_{t=0} = \psi_0$.

6.3. Захват в резонанс при наличии диссипации. Наиболее важным для наших целей является поиск решений с неограниченно растущими амплитудами. Нетрудно построить асимптотическое решение в виде степенных рядов

$$R(\vartheta) = \frac{\alpha \vartheta}{\varepsilon^2} + R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta^{-n} R_n, \quad \Psi(\vartheta) = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta^{-n} \Psi_n, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Постоянные коэффициенты $R_n, \Psi_n = \text{const}$ вычисляются по рекуррентным формулам. Например, на первых двух шагах имеем

$$\sin \Psi_0 = \frac{2\beta}{\varepsilon}, \quad R_0 = \frac{1}{2} \cos \Psi_0; \quad \Psi_1 \cos \Psi_0 = 1, \quad R_1 = -\Psi_1 \sin \Psi_0. \quad (6.7)$$

Легко понять, что при условии $|2\beta/\varepsilon| < 1$ на этом пути строятся два различных асимптотических решения, которые в главных членах отличаются выбором корня в тригонометрическом уравнении (6.7). Оказывается, что с одной парой рядов связано однопараметрическое семейство решений, а с другой парой рядов связано двухпараметрическое семейство решений.

ТЕОРЕМА 6.2. Если $0 < \beta < \varepsilon/2$, то существует однопараметрическое семейство решений уравнений (6.5), которые экспоненциально близки на бесконечности и имеют общую степенную асимптотику (6.6) с главным членом фазы ψ_0 , выбранным из (6.7) при условии $\cos \Psi_0 > 0$.

ТЕОРЕМА 6.3. Если $0 < \beta < \varepsilon/2$, то существует двухпараметрическое семейство решений уравнений (6.5), которые экспоненциально близки на бесконечности и имеют общую степенную асимптотику (6.6) с главным членом фазы ψ_0 , выбранным из (6.7) при условии $\cos \Psi_0 < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в обосновании построенного выше асимптотического решения и основано на анализе линеаризованной задачи [64].

В случае $\beta > \varepsilon/2$ все решения ограничены в компоненте $R(\vartheta)$. При отсутствии диссипации ($\beta = 0$) значительно изменяется структура асимптотики для амплитуды, в которой появляются осциллирующие коэффициенты. Соответствующая теорема приведена в разделе 4.

7. Адиабатические приближения

Уравнения главного резонанса (0.4), (0.5), (0.6) содержат параметр λ , который характеризует отношение скорости изменения частоты накачки α к ее амплитуде ε . В случае, когда это отношение мало, $|\lambda| \ll 1$, для анализа решений $R(T; \lambda)$, $\Psi(T; \lambda)$ можно использовать асимптотические разложения при $\lambda \rightarrow 0$. Методика исследования уравнений с медленно меняющимися коэффициентами давно и хорошо разработана [96], [97], [51], [144]. Соответствующие приемы иногда ассоциируются с нелинейным методом ВКБ. В гамильтоновых системах главные члены таких асимптотик принято называть адиабатическими приближениями [9]. Использование этого подхода для уравнений главного резонанса дает способ приближенного нахождения областей захвата [50], [62], [63]. Возникающие здесь погрешности, естественно, зависят от величины λ и будут малы лишь при $|\lambda| \ll 1$.

Обсуждаемый подход основан на интегрируемости уравнений с “замороженными коэффициентами”, когда множитель λT в (0.4), (0.5), (0.6) заменяется константой Λ . Для соответствующих автономных уравнений легко выписываются первые интегралы, например, в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \frac{1}{3} R^3 - \Lambda R + \cos \Psi; \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{b+3} R^{b+3} - \Lambda \frac{1}{b+1} R^{b+1} + R^b \cos \Psi; \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{b+1} R^{b+1} - \Lambda \frac{1}{b} R^b + R^b \cos \Psi.\end{aligned}$$

После этого можно выписать двухпараметрическое семейство решений $R = R_0(T + T_0, \mathcal{E}; \Lambda)$, $\Psi = \Psi_0(T + T_0, \mathcal{E}; \Lambda)$ ($T_0, \mathcal{E} = \text{const}$). Эти функции рассматриваются при тех значениях $\mathcal{E}$, когда они периодичны по T . Период Π и частота ω зависят от параметра Λ и энергии $\mathcal{E}$: $\Pi = 2\pi/\omega(\mathcal{E}, \Lambda)$.

Для возмущенных уравнений, когда коэффициент $\Lambda = \lambda T$ считается переменным, функции R_0, Ψ_0 не будут точными решениями. Они используются для асимптотических конструкций, в основу которых положена замена переменных в исходных уравнениях по формулам:

$$R = R_0\left(\frac{\psi}{\omega}, E; \Lambda\right), \quad \Psi = \Psi_0\left(\frac{\psi}{\omega}, E; \Lambda\right) \quad (\omega = \omega(E, \Lambda)). \quad (7.1)$$

Для новых искомым функций E, ψ получаются уравнения с малым параметром в форме (1.1). Эти уравнения будут слабо неавтономными, т.е. зависят от медленного времени λT . При усреднении в главных членах асимптотики $E = E_0(\lambda T) + \mathcal{O}(\lambda)$, $\psi = \lambda^{-1}\psi_0(\lambda T) + \mathcal{O}(1)$, $\lambda \rightarrow 0$, переменные разделяются так, что дело сводится к интегрированию уравнения первого порядка для E_0 .

Получаемое таким способом первое приближение описывается быстро осциллирующими функциями (7.1), в которых медленно меняются параметры E и Λ . На фазовой плоскости им соответствуют медленно деформирующиеся “почти” замкнутые траектории. Нас интересуют траектории, которые при такой медленной деформации уходят на бесконечность. Они ассоциируются с авторезонансными решениями.

В случае, когда возмущенная система гамильтонова, уравнение для E_0 может оказаться тривиальным: $\dot{E}_0 = 0$, так что его общее решение является константой. Это случается тогда, когда в качестве первого интеграла $\mathcal{E}$ в формулах для точного решения “замороженной” задачи используется площадь, охватываемая замкнутой фазовой траекторией. В таком случае говорят, что площадь является адиабатическим инвариантом, т.е. сохраняется при возмущении в главном порядке асимптотики. Для уравнений с медленно меняющимися коэффициентами таким способом можно изучать качественное поведение решения путем анализа медленных деформаций фазового портрета, без выписывания явных формул для функций R_0, Ψ_0 . В частности, на этом пути можно идентифицировать решения с медленно растущими амплитудами R , т.е. найти часть области захвата.

Рассмотрим уравнения (0.4). Они являются гамильтоновыми на плоскости с декартовыми координатами Ψ, R . При фиксированном значении Λ фазовый портрет определяется линиями уровня первого интеграла; он содержит неподвижную точку типа центр и семейство замкнутых траекторий, ограниченных сепаратрисами (см. рис. 4). При $\Lambda \rightarrow \infty$ эта часть фазового портрета уходит на бесконечность. При этом площадь, ограниченная сепаратрисами, стремится к нулю. Следовательно, из рассматриваемого семейства решений лишь одно (соответствующее неподвижной точке) имеет неограниченно растущую амплитуду при $T \rightarrow \infty$. Траектории остальных решений покидают окрестность этой точки при уходе ее на бесконечность. Отсюда делается вывод о невозможности захвата в авторезонанс на критической энергии. Этот результат приведен в книге [19].

Иная ситуация возникает в случае параметрического авторезонанса. Уравнения главного резонанса (0.6) рассмотрим для простоты в частном случае $b = 1$, когда они оказываются гамильтоновыми в переменных Ψ, R . Фазовый

Рис. 4. Деформация фазового портрета уравнений (0.4) с ростом $\Lambda = \lambda T = 9, 10, 900$ на плоскости с декартовыми координатами Ψ, R

портрет снова содержит семейство замкнутых траекторий (см. рис. 5). Область, занимаемая этими траекториями, уходит на бесконечность, а ее площадь увеличивается и стабилизируется к величине $8\sqrt{2}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$. Следовательно, имеется двухпараметрическое семейство осциллирующих решений, амплитуда которых $R(T)$ неограниченно растет при $T \rightarrow \infty$. Область захвата (в момент $T = 0$) содержит множество точек, ограниченных сепаратрисой $R = -2 \cos \Psi$ ($\pi/2 < \Psi < 3\pi/2$) на фазовом портрете в случае $\Lambda = 0$. Это множество описывается неравенством $-1/2 \leq R^2/2 + R \cos \Psi \leq 0$ и составляет детерминированную часть области захвата. Дополнительная часть области захвата возникает из-за увеличения площади между сепаратрисами при росте параметра Λ . Она может быть описана в вероятностных терминах, как это делается в [50].

Такой же вывод можно сделать для уравнений (0.5). Здесь надо учесть, что в случае $b = 1$ эти уравнения будут гамильтоновыми в переменных $x = R \cos \Psi$, $y = R \sin \Psi$. Площадь области между сепаратрисными петлями неограниченно увеличивается с ростом Λ и уходит на бесконечность. Деформация фазово-

Рис. 5. Деформация фазового портрета уравнений (0.6) с ростом $\Lambda = \lambda T = 0, 1, 10, 10^6$ на плоскости с декартовыми координатами Ψ, R

го портрета в плоскости x, y представлена на рис. 6. Детальный анализ приведен в [50], [60]. На основании этих результатов можно сделать некоторые выводы об области захвата в начальный момент $T = T_0$. В эту область попадают точки из области между сепаратрисными петлями на фазовом портрете при $\Lambda = \lambda T_0$. Получаемая таким образом детерминированная часть области захвата зависит от начального момента T_0 и может оказаться пустой. Это случается, если T_0 меньше критического значения, при котором происходит бифуркация (рождение) сепаратрисной петли. Например, для начального момента $T_0 = 0$ вся область захвата имеет вероятностную природу. Более полные результаты по нахождению области захвата в адиабатическом приближении при $\lambda \rightarrow 0$ для уравнений (0.5), (0.6) можно извлекать из результатов работ [50], [62], [63], [94] о захвате траектории сепаратрисной петли. Подчеркнем, что результаты в [50], [62], [63], [94] предъявляются в вероятностных терминах; считается, что структура области захвата настолько сложна, что при малых λ детерминированное описание не имеет смысла. Сложность области захвата

можно объяснять неинтегрируемостью рассматриваемых уравнений главного резонанса, а точнее, отсутствием формул связи для констант интегрирования. К сожалению, асимптотики по малому параметру $\lambda \rightarrow 0$ мало помогают в решении задачи о формулах связи.

Рис. 6. Деформация фазового портрета уравнений (0.5) с ростом $\Lambda = \lambda T = 0.5, 4, 17$ на плоскости с декартовыми координатами x, y

Выявление авторезонансных эффектов, в частности, областей захвата основано на анализе решений уравнений главного резонанса в их асимптотике при $T \rightarrow \infty$. Использование при этом асимптотик по малому параметру $\lambda \rightarrow 0$ требует обоснования. Для уравнений (0.4)–(0.6) такое обоснование дает один из результатов А.И. Нейштадта [145]. Из вида уравнений (0.4)–(0.6) легко понять, что эффект авторезонанса со значительным изменением амплитуды $R(T; \lambda) \gg 1$ обнаруживается лишь на далеких временах $T \gg |\lambda|^{-1}$. Можно ли этот эффект выявить на уровне адиабатических приближений из асимптотики при $\lambda \rightarrow 0$? Обычно применимость адиабатического приближения, как одного из методов усреднения, обосновывается до времен $T \approx |\lambda|^{-1}$ (см. [76; гл. 4, § 17,

теорема, с. 138]). Известны способы обоснования методов усреднения на далеких временах при $T \gg |\lambda|^{-1}$, которые опираются на конструкции асимптотических решений в более медленных масштабах типа $\lambda^2 T$ и подразумевают автономность исходных уравнений (без условия гамильтоновости) [146], [147]. Рассматриваемые уравнения главного резонанса (0.4)–(0.6) являются неавтономными. Однако они гамильтоновы, с аналитическим гамильтонианом, который содержит гладкую зависимость от медленного времени λT . Как раз для таких уравнений в [145] доказано сохранение адиабатического инварианта на экспоненциально большом промежутке времени $0 \leq T \leq \exp(-\gamma/\lambda)$, $\gamma = \text{const} > 0$. Этот результат и служит основанием для использования адиабатических приближений при анализе уравнений (0.4)–(0.6) на далеких временах. Неизвестно, являются ли вечными адиабатические инварианты в рассматриваемых уравнениях; результат из [148] не подходит из-за неперiodичности по медленному времени λT .

8. Численное моделирование

Численное моделирование играет заметную роль в создании теории авторезонанса. Характерно, что первая теоретическая работа по этой тематике [43] была инициирована, по словам Л. Фридлянда, случайной находкой в численном эксперименте. Простейшее использование численных расчетов состоит в иллюстрации эффекта авторезонанса. Чаще всего приводятся графики зависимости энергии системы от времени. Например, для нелинейного осциллятора

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (1 - x^2)x = \varepsilon G \cos\left(t - \frac{1}{8}\varepsilon^2 t^3\right)$$

такие графики приведены на рис. 7. В этом примере ради разнообразия используется накачка с частотой, квадратично убывающей по времени: $\dot{\varphi} = 1 - 3\varepsilon^2 t^2/8$. Верхняя и нижняя кривые получены для $G = 2.2$ и $G = 1$ при $\varepsilon = 10^{-3}$, $\rho(0) = 0$. Два промежуточных графика получены при $G = 2.2$,

Рис. 7. Эволюция энергии возмущенного нелинейного осциллятора

$\rho(0) = 0.07$ с разными начальными фазами: $\psi(0) = 3\pi/2$ и $\psi(0) = \pi$. Верхние кривые соответствуют авторезонансным решениям, а нижние кривые соответствуют решениям в состоянии нелинейного резонанса. При малой амплитуде накачки $\varepsilon = 10^{-3}$ энергия $H = (\dot{x}^2 + x^2)/2 - x^4/4 - x\varepsilon G \cos(t + \varepsilon^2 t^3 \alpha/3)$ нарастает от малого значения порядка $\varepsilon^{1/3}$ до величины порядка единицы в первом случае и остается малой во втором случае. Различия резонансного и нерезонансного решений нарастают при уменьшении параметра ε .

Более существенное использование численных расчетов связано не с иллюстрациями, а с исследованиями задач, которые остаются недоступными для аналитических методов. Одна из таких задач состоит в определении порогового значения для амплитуды накачки при анализе авторезонанса вблизи равновесия [98]. Рассматривается решение уравнений главного резонанса (0.5), в котором компонента $R(T)$ стремится к нулю на одной из бесконечностей – при $T \rightarrow -\infty$. Известно, что на другой бесконечности (при $T \rightarrow +\infty$) оно может быть ограниченным, либо неограниченно растущим в зависимости от коэффициента λ . Существует пороговое значение этого коэффициента, при переходе через которое меняется тип асимптотики. Найти его аналитическими методами не удастся. Поэтому приходится ограничиваться результатами численного расчета для уравнения (0.5). Найденная таким образом константа определяет приближенно пороговое значение $3.275 < \lambda < 3.278$ в задаче о захвате в резонанс системы, находящейся в равновесии.

Похожая ситуация возникает при анализе областей захвата в неинтегрируемых уравнениях главного резонанса. Из-за отсутствия формул связи не удастся аналитически описать множество начальных данных, которые соответствуют авторезонансным решениям. Результаты численных экспериментов для уравнения (0.6) приведены на рис. 8. Здесь черным цветом выделены области захва-

Рис. 8. Область захвата в авторезонанс для уравнения (0.6) на плоскости с полярными координатами R, Ψ при $\lambda = 1$ и при $\lambda = 25$

та на фазовой плоскости с полярными координатами R, Ψ в момент $T = 0$. Брошающаяся в глаза спиральная структура этих множеств может быть получена

аналитически с использованием адиабатических приближений и асимптотики решений при большой начальной амплитуде. Тем не менее, опубликованных результатов на эту тему не известно; некоторые указания на такую структуру области захвата можно усмотреть в результатах работы [50], [62], [63], см. также рис. 23 в [78]. Отметим, что спиральная структура обнаруживается и в интегрируемом случае, когда уравнения главного резонанса сводятся к возмущенному маятнику (0.3). Область захвата здесь описывается аналитически неравенствами (1.13) и на плоскости с декартовыми координатами R, Ψ представлена на рис. 1. На плоскости с полярными координатами R, Ψ это множество состоит из точек, ограниченных сепаратрисными петлями, и одной из сепаратрис, спирально уходящей на бесконечность (см. рис. 9).

Рис. 9. Область захвата в авторезонанс для уравнения (0.3) при $\lambda = -1/\sqrt{2}$ на плоскости с полярными координатами R, Ψ состоит из множества, ограниченного сепаратрисными петлями, и из сепаратрисы, спирально уходящей на бесконечность

Для неинтегрируемых уравнений (0.5), (0.6) можно исследовать зависимость области захвата от параметра λ в асимптотике как при $\lambda \rightarrow 0$ (см. предыдущий раздел), так и при $\lambda \rightarrow \infty$ (см. [98]). Однако для описания конечной части области захвата (с начальной амплитудой порядка единицы) и при $\lambda \approx 1$ никакой альтернативы численным методам пока нет. Численные эксперименты для уравнений типа (0.5) выполнены в работе [149], где приведены рисунки для областей захвата в виде спиралей, как на рис. 8.

Как уже отмечалось, значительные трудности возникают при попытке переноса идей об авторезонансе на системы, задаваемые уравнениями в частных производных. Описанная в разделе 7 редукция такого типа задач к конечномерным системам на основе теории возмущения солитонов представляется довольно ограниченным подходом, поскольку полностью игнорирует бесконечномерность системы. Математически аккуратных аналитических результатов для несолитонных решений практически нет, хотя были попытки использования метода Уизема [123]. Между тем, численное моделирование дает здесь

весьма впечатляющие результаты. Такие исследования по резонансному возбуждению конечнозонных решений опубликованы в [124]–[128]. Основной результат здесь состоит в генерации конечнозонных решений посредством внешней накачки с медленно меняющейся частотой. Особо следует указать, что эти результаты опираются на специально разработанную методику расчетов с использованием идей метода обратной задачи [150]. Такой подход обеспечивает надежность и обоснованность численных результатов.

9. Заключение

Исследование проблемы авторезонанса приводит к постановкам новых задач для нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений. Эти задачи решаются с использованием асимптотических методов и с привлечением численных экспериментов. Основные достижения связаны с построением асимптотик для общих решений неавтономных уравнений главного резонанса. Такие асимптотики построены для систем с одной степенью свободы. Остаются нерешенными задачи аналитического описания областей резонансного захвата.

Авторезонанс в существенно неоднмерных системах практически не исследован. Основная задача состоит в построении асимптотики решений для неавтономных систем уравнений, которые представляют собой аналоги уравнений главного резонанса. Такие системы можно получать методом усреднения в общем виде. Однако чисто формальный подход может увести в сторону серьезных математических трудностей, далеких от проблем авторезонанса. Здесь необходима связь с первоисточником. К сожалению, в настоящее время известно мало математических моделей для неоднмерных физических систем с авторезонансом, которые могли бы корректировать постановки математических задач. Между тем, такие системы, несомненно, встречаются в разных областях естествознания, в частности, они обнаруживаются в задачах о синхронизации колебаний. Явления типа авторезонанса, по-видимому, играют ключевую роль в нелинейных осциллирующих системах на этапах перестройки, когда наблюдается существенное перераспределение “энергии” между подсистемами, и такие ситуации заслуживают пристального изучения. Математическое моделирование могло бы обеспечить понимание сути этих процессов и выявление возможностей контроля и управления ими в том духе, как это описано в [151]. Исследованные выше одномерные системы с внешней накачкой при переменной частоте дают простейшие примеры в этом направлении. В более общей ситуации наличие существенной динамики в резонансных соотношениях (с зависимостью частот от времени) служит признаком, по которому выделяются явления, подозрительные на авторезонанс. Однако соответствующие математические модели в виде неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений зачастую отпугивают прикладников, поскольку известные методы ориентированы на изучение систем со статическими резонансами, когда частоты не зависят от времени, либо зависят слабо. Результаты, приведенные в данной работе, показывают, что математические модели авторезонанса допускают эффективное аналитическое исследование. С одной стороны, хотелось

бы привлечь внимание математиков к новому классу задач из теории дифференциальных уравнений. С другой стороны, хотелось бы обратить внимание прикладников, имеющих дело с колебательными системами, на возможности эффективного анализа нелинейных неавтономных уравнений.

Выражаю признательность А. Г. Шагалову за знакомство с проблемами автоторезонанса и А. М. Ильину, О. М. Киселеву, Л. Фридлянду за плодотворные дискуссии.

Список литературы

- [1] *Физическая энциклопедия*, Сов. энциклопедия, М., 1988.
- [2] *Математическая энциклопедия*, т. 4, ред. И. М. Виноградов, Сов. энциклопедия, М., 1984.
- [3] F. Calogero, *Isochronous systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
- [4] F. Calogero, “Isochronous dynamical systems”, *Appl. Anal.*, **85**:1–3 (2006), 5–22.
- [5] J. P. Francoise, “Isochronous systems and perturbation theory”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:1 (2005), 315–326.
- [6] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, М., 1988.
- [7] М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2000.
- [8] А. Ю. Лоскутов, “Динамический хаос. Системы классической механики”, *УФН*, **177**:9 (2007), 989–1014; англ. пер.: A. Yu. Loskutov, “Dynamical chaos: systems of classical mechanics”, **50** (2007), 939–964.
- [9] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, ВИНТИ, М., 1985; англ. пер.: V. I. Arnol'd, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, 3rd ed., Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [10] В. И. Векслер, “Новый метод ускорения релятивистских частиц”, *Докл. АН СССР*, **43** (1944), 346–348.
- [11] В. И. Векслер, “О новом методе ускорения частиц”, *Докл. АН СССР*, **44** (1944), 393–396.
- [12] E. M. McMillan, “The synchrotron – a proposed high energy particle accelerator”, *Phys. Rev.*, **68** (1945), 143–144.
- [13] E. M. McMillan, “Resonance acceleration of charged particles”, *Phys. Rev.*, **70** (1946), 800.
- [14] А. А. Андронов, Г. А. Горелик, “О резонансных явлениях при движении релятивистской частицы в циклотроне”, *Докл. АН СССР*, **49**:9 (1945), 664–666.
- [15] D. Bohm, L. Foldy, “The theory of the synchrotron”, *Phys. Rev.*, **70**:5–6 (1946), 249–258; “Theory of the synchro-cyclotron”, **72**:8 (1947), 649–661.
- [16] М. С. Рабинович, *Теория современных резонансных ускорителей*, ФИАН, 1948.
- [17] М. С. Ливингстон, *Ускорители. Установки для получения заряженных частиц больших энергий*, ИЛ, М., 1956; пер. с англ.: M. S. Livingston, *High-energy particle accelerators*, Interscience, New York, 1954.
- [18] M. S. Livingston, J. P. Blewett, *High-energy particle accelerators*, Internat. Ser. Pure Appl. Phys., Interscience, New York, 1962.
- [19] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, *Теория циклических ускорителей*, Физматгиз, М., 1962.
- [20] А. А. Коломенский, *Физические основы методов ускорения заряженных частиц*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980.

- [21] K. S. Golovanivsky, "Autoresonant acceleration of electrons at nonlinear ECR in magnetic field which is smoothly growing in time", *Phys. Scripta*, **22**:2 (1980), 126–133.
- [22] K. S. Golovanivsky, "The gyromagnetic autoresonance", *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **11**:1 (1983), 28–35.
- [23] К. С. Голованевский, "Гиромагнитный авторезонанс с переменной частотой", *Физика плазмы*, **11**:3 (1985), 295–299; англ. пер.: K. S. Golovanivskii, "Gyromagnetic autoresonance with variable frequency", *Soviet J. of Plasma Physics*, **11** (1985), 171–173.
- [24] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Наука, М., 1981; англ. пер. 2-го изд.: A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin, *Theory of oscillators*, Pergamon Press, Oxford–New York–Toronto, Ont., 1966.
- [25] И. И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике*, Наука, М., 1981.
- [26] А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев, "Авторезонансное движение частицы в плоской электромагнитной волне", *Докл. АН СССР*, **145**:6 (1962), 1259–1261; англ. пер.: A. A. Kolomenskij, A. N. Lebedev, "Self-resonant particle motion in a plane electromagnetic wave", *Soviet Phys. Dokl.*, **7** (1963), 745–747.
- [27] В. Я. Давыдовский, "О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле", *ЖЭТФ*, **43** (1962), 886–888; англ. пер.: V. Ya. Davydovskij, "Possibility of resonance acceleration of charged particles by electromagnetic waves in a constant magnetic field", *Sov. Phys., JETP*, **16** (1963), 629–630.
- [28] В. П. Милантьев, "Явление циклотронного авторезонанса и его применения", *УФН*, **167**:1 (1997), 3–16; англ. пер.: V. P. Milant'ev, "Cyclotron autoresonance and its applications", *Physics-Uspekhi*, **40**:1 (1997), 1–14.
- [29] В. Ф. Кравченко, А. А. Кураев, А. К. Синицын, "Несинхронные взаимодействия", *УФН*, **177**:5 (2007), 511–534; англ. пер.: V. F. Kravchenko, A. A. Kuraev, A. K. Sinitsyn, "Nonsynchronous interactions", *Physics-Uspekhi*, **50**:5 (2007), 489–511.
- [30] М. В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1985.
- [31] Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, *Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики*, Наукова думка, Киев, 1983.
- [32] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974; англ. пер.: N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropol'skij, *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*, Hindustan Publ. Corp., Delhi; Gordon and Breach, New York, 1961.
- [33] Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы в нелинейной механике*, Наука, М., 1981.
- [34] J. Kevorkian, "Passage through resonance for one-dimensional oscillator with slow varying frequency", *SIAM J. Appl. Math.*, **20**:3 (1971), 364–373.
- [35] M. J. Ablowitz, B. A. Funk, A. C. Newell, "Semi-resonant interactions and frequency dividers", *Stud. Appl. Math.*, **52**:1 (1973), 51–74.
- [36] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989; англ. пер.: A. M. Il'in, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [37] Б. В. Чириков, "Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс", *Докл. АН СССР*, **125**:5 (1959), 1015–1018; англ. пер.: B. V. Chirikov, "The passage of a nonlinear oscillating system through resonance", *Soviet Phys. Dokl.*, **4** (1959), 390–394.
- [38] А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*, Техносфера, М., 2003.

- [39] Ю. Ю. Багдерина, “Интегрируемые уравнения главного резонанса”, *Матем. заметки*, **80**:3 (2006), 465–468; англ. пер.: Yu. Yu. Bagderina, “Integrable main resonance equations”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 442–446.
- [40] F. Calogero, “Why are certain nonlinear PDEs both widely applicably and integrable?”, *What is integrability?*, Springer, Berlin, 1991, 1–62.
- [41] A. T. Sinclair, “On the origin of the commensurabilities amongst the satellites of Saturn”, *Month. Not. Royal Astron. Soc.*, **160**:2 (1972), 169.
- [42] R. J. Greenberg, “Spin-orbit coupling in the solar system”, *Astron. J.*, **71**:6 (1966), 425–438.
- [43] B. Meerson, L. Friedland, “Strong autoresonance excitation of Rydberg atoms: the Rydberg accelerator”, *Phys. Rev. A.*, **41**:9 (1990), 5233–5236.
- [44] L. Friedland, “Control of Kirchhoff vortices by a resonant strain”, *Phys. Rev. E* (3), **59**:4 (1999), 4106–4111.
- [45] J. Fajans, L. Friedland, “Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators”, *Amer. J. Phys.*, **69**:10 (2001), 1096–1102.
- [46] L. Friedland, “Migration timescale thresholds for resonant capture in the plutino problem”, *Astrophys. J.*, **547**:1 (2001), L75–L79.
- [47] J. Fajans, E. Gilson, L. Friedland, “Second harmonic autoresonant control of the $l = 1$ diocotron mode in pure-electron plasmas”, *Phys. Rev. E*, **62**:3 (2000), 4131–4136.
- [48] E. Khain, B. Meerson, “Parametric autoresonance”, *Phys. Rev. E*, **64**:3 (2001), 036619.
- [49] M. Assaf, B. Meerson, “Parametric autoresonance in Faraday waves”, *Phys. Rev. E* (3), **72**:1 (2005), 016310.
- [50] А. И. Нейштадт, “Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром”, *ПММ*, **39**:4 (1975), 621–632; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly-varying parameter”, *J. Appl. Math. Mech.*, **39**:4 (1975), 594–605.
- [51] F. J. Bourland, R. Haberman, “The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying, and weakly damped oscillators”, *SIAM J. Appl. Math.*, **48**:4 (1988), 737–748.
- [52] R. Haberman, E. K. Ho, “Boundary of the basin of attraction for weakly damped primary resonance”, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **62**:4 (1995), 941–946.
- [53] A. P. Itin, A. I. Neishtadt, A. A. Vasiliev, “Captures into resonance and scattering on resonance in dynamics of a charged relativistic particle in magnetic field and electrostatic wave”, *Phys. D*, **141**:3–4 (2000), 281–296.
- [54] С. Г. Глебов, О. М. Киселев, “Асимптотика жесткого режима возбуждения собственных колебаний. I”, *Сб. тр. междунар. конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. II. Дифференциальные уравнения”*, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2000, 49–52.
- [55] О. М. Киселев, С. Г. Глебов, “Асимптотика жесткого режима возбуждения собственных колебаний. II”, *Сб. тр. междунар. конференции “Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. II. Дифференциальные уравнения”*, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2000, 95–97.
- [56] S. G. Glebov, O. M. Kiselev, “Applicability of the WKB method in the perturbation problem for the equation of principal resonance”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:1 (2002), 60–83.
- [57] O. M. Kiselev, S. G. Glebov, “Asymptotic description of separatrix crossing near a saddle-center point”, *Progress in nonlinear science*, vol. 1 (Nizhny Novgorod, 2001), RAS, Inst. Appl. Phys., Nizhnii Novgorod, 2002, 269–274.
- [58] O. M. Kiselev, S. G. Glebov, “An asymptotic solution slowly crossing the separatrix near a saddle-centre bifurcation point”, *Nonlinearity*, **16**:1 (2003), 327–362.

- [59] O. M. Kiselev, S. G. Glebov, "The capture into parametric autoresonance", *Nonlinear Dynam.*, **48**:1–2 (2007), 217–230.
- [60] L. A. Kalyakin, "Asymptotic analysis of an autoresonance model", *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:1 (2002), 84–95.
- [61] А. И. Нейштадт, "Об изменении адиабатического инварианта при переходе через сепаратрису", *Физика плазмы*, **12**:8 (1986), 992–1000.
- [62] J. R. Cary, R. J. Skodje, "Phase change between separatrix crossing", *Phys. D*, **36**:3 (1989), 287–316.
- [63] A. Neishtadt, A. Vasiliev, "Phase change between separatrix crossing in slow-fast Hamiltonian systems", *Nonlinearity*, **18**:3 (2005), 1393–1406.
- [64] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1996.
- [65] А. Д. Брюно, *Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях*, Наука, М., 1998; англ. пер.: A. D. Bruno, *Power geometry in algebraic and differential equations*, North-Holland Math. Library, **57**, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [66] Л. А. Калякин, "Асимптотика решений уравнений главного резонанса на бесконечности", *Докл. РАН*, **388**:3 (2003), 305–308; англ. пер.: L. A. Kalyakin, "The asymptotic behavior of the solution to the principal resonance at infinity", *Dokl. Math.*, **67**:1 (2003), 107–110.
- [67] Л. А. Калякин, "Асимптотики решений уравнений главного резонанса", *ТМФ*, **137**:1 (2003), 142–152; англ. пер.: L. A. Kalyakin, "Asymptotic behavior of solutions of equations of main resonance", *Theoret. Math. Phys.*, **137**:1 (2003), 1476–1484.
- [68] Л. А. Калякин, "Обоснование асимптотик для уравнений главного резонанса", *Тр. ИММ УрО РАН*, **9**:1, 88–101; англ. пер.: L. A. Kalyakin, "Justification of asymptotic expansions for the principal resonance equations", *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl., **1**, 2003, S108–S122.
- [69] Л. А. Калякин, "Асимптотика на бесконечности решений уравнений, близких к гамильтоновым", *Итоги науки и техники. Соврем. матем. и ее прил.*, **53**, 2008, 138–160.
- [70] Л. А. Калякин, "Резонансный захват в нелинейной системе", *ТМФ*, **144**:1 (2005), 74–82; англ. пер.: L. A. Kalyakin, "Resonance capture in a nonlinear system", *Theoret. Math. Phys.*, **144**:1 (2005), 944–951.
- [71] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", М.–Ижевск, 2005; англ. пер.: A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapayev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé transcendents. The Riemann–Hilbert approach*, Math. Surveys Monogr., **128**, AMS, Providence, RI, 2006.
- [72] Л. А. Калякин, "Асимптотический анализ модели авторезонанса", *Докл. РАН*, **378**:5 (2001), 594–597; англ. пер.: L. A. Kalyakin, "Asymptotic analysis of an autoresonance model", *Dokl. Math.*, **63**:3 (2001), 379–382.
- [73] Л. А. Калякин, "Авторезонанс в динамической системе", *Итоги науки и техники. Соврем. матем. и ее прил.*, **5**, 2003, 79–109; англ. пер.: L. A. Kalyakin, "Autoresonance in a dynamical system", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **125**:5 (2005), 658–688.
- [74] Р. Н. Гарифуллин, "Построение асимптотических решений в задаче об авторезонансе", *Докл. РАН*, **398**:3 (2004), 306–309.
- [75] В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, "О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний", *ПММ*, **49**:3 (1985), 377–383; англ. пер.: V. D. Azhotkin, V. M. Babich, "Application of the method of two-scale expansions to the single-frequency problem of the theory of nonlinear oscillations", *J. Appl. Math. Mech.*, **49**:3 (1986), 290–295.

- [76] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978.
- [77] Д. В. Трещев, *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем*, ФАЗИС, М., 1998.
- [78] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике”, *УМН*, **18**:6 (1963), 91–192; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics”, *Russian Math. Surveys*, **18**:6 (1963), 85–191.
- [79] Л. А. Калякин, “Асимптотическое решение задачи об авторезонансе”, *ТМФ*, **133**:3 (2002), 429–438; англ. пер.: L. A. Kalyakin, “Asymptotic solution of the autoresonance problem”, *Theoret. and Math. Phys.*, **133**:3 (2002), 1684–1691.
- [80] Л. А. Калякин, “Усреднение в модели авторезонанса”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 449–452; англ. пер.: L. A. Kalyakin, “Averaging in the autoresonance model”, *Math. Notes*, **73**:3–4 (2003), 414–418.
- [81] Р. Н. Гарифуллин, “Построение асимптотического решения задачи об авторезонансе. Внешнее разложение”, *Электронный журнал “Исследовано в России”*, 2005, 1857–1875.
- [82] Р. Н. Гарифуллин, “Асимптотика авторезонансных колебаний. Внешнее разложение”, *ЖВМ и МФ*, **46**:9 (2006), 1605–1617; англ. пер.: R. N. Garifullin, “Asymptotic solution to the problem of autoresonance: Outer expansion”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:9 (2006), 1526–1538.
- [83] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, “Искусство асимптотики”, *Вестник ЛГУ*, **13** (1977), 5–12.
- [84] В. И. Арнольд, А. Авец, *Эргодические проблемы классической механики*, Сер. Регулярная и хаотическая динамика, **11**, НИЦ “РХД”, Ижевск, 1999; англ. пер.: V. I. Arnold, A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1968.
- [85] В. К. Мельников, “Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях”, *Труды ММО*, **12** (1963), 3–52; англ. пер.: V. K. Mel'nikov, “On the stability of the center for time-periodic perturbations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 1–56.
- [86] А. Д. Морозов, “К вопросу о полном качественном исследовании уравнения Дюффинга”, *ЖВМ и МФ*, **13**:5 (1973), 1134–1152.
- [87] А. И. Нейштадт, “О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче”, *Докл. АН СССР*, **221**:2 (1975), 301–304; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “Passage through a resonance in the two-frequency problem”, *Soviet Phys. Dokl.*, **20** (1975), 189–191.
- [88] Л. А. Калякин, “Промежуточные асимптотики для решений вырожденного главного резонанса”, *ЖВМ и МФ*, **46**:1 (2006), 83–94; англ. пер.: L. A. Kalyakin, “Intermediate asymptotics for solutions of degenerate equations of principal resonance”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:1 (2006), 79–89.
- [89] А. Н. Кузнецов, “Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 41–51; англ. пер.: A. N. Kuznetsov, “Differentiable solutions to degenerate systems of ordinary equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:2 (1972), 119–127.
- [90] А. Н. Кузнецов, “О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:4 (1989), 63–74; англ. пер.: A. N. Kuznetsov, “Existence of solutions entering at a singular point of an autonomous system having a formal solution”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:4 (1989), 308–317.

- [91] Г. И. Баренблатт, *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике*, Гидрометеиздат, Л., 1978; англ. пер.: G. I. Barenblatt, *Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics*, Consultants Bureau, New York–London, 1979.
- [92] P. Holmes, D. Spence, “On a Pairevé-type boundary-value problem”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **37**:4 (1984), 525–538.
- [93] L. A. Kalyakin, “Asymptotic analysis of a model of autoresonance”, *J. Phys.: Conference Series*, **23**:1 (2005), 17–22.
- [94] А. А. Васильев, А. И. Нейштадт, К. Симо, Д. В. Трещев, “Острова устойчивости в области переходов через сепатрису в гамильтоновых системах с быстрыми и медленными движениями”, *Анализ и особенности*, ч. 2, Тр. МИАН, **259**, 2007, 243–255; англ. пер.: A. A. Vasiliev, A. I. Neishtadt, C. Simo, D. V. Treschev, “Stability islands in domains of separatrix crossings in slow-fast Hamiltonian systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **259**:2 (2007), 236–247.
- [95] Р. Н. Гарифуллин, “Построение асимптотического решения задачи об авторезонансе. Внутреннее разложение”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:6 (2006), 33–48; англ. пер.: R. N. Garifullin, *J. Math. Sci.*, **151**:1 (2008), 2651–2663.
- [96] Г. Е. Кузмак, “Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами”, *ПММ*, **23**:3 (1959), 515–526; англ. пер.: G. E. Kuzmak, “Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients”, *J. Appl. Math. Mech.*, **23** (1959), 730–744.
- [97] М. В. Федорюк, “Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка”, *ЖВМ и МФ*, **26**:2 (1986), 198–210; англ. пер.: M. V. Fedoryuk, “The WKB method for a second-order nonlinear equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **26**:1 (1986), 121–128.
- [98] Л. А. Калякин, “Асимптотическое решение задачи о пороговом эффекте для уравнений главного резонанса”, *Дифференц. уравнения*, **40**:6 (2004), 731–739; англ. пер.: L. A. Kalyakin, “Asymptotic solution of the problem of the threshold effect for principal resonance equations”, *Differ. Equ.*, **40**:6 (2004), 780–788.
- [99] L. Friedland, “Subharmonic autoresonance”, *Phys. Rev. E*, **61**:4 (2000), 3732–3735.
- [100] L. Friedland, J. Fajans, E. Gilson, “Subharmonic autoresonance of the diocotron mode”, *Phys. Plasmas*, **7**:5 (2000), 1712–1718.
- [101] Р. Н. Гарифуллин, “Асимптотический анализ модели субгармонического авторезонанса”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **9**:1, 56–63; англ. пер.: R. N. Garifullin, “Asymptotic analysis of a subharmonic autoresonance model”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl., **1**, 2003, S75–S83.
- [102] Л. А. Калякин, Р. Н. Гарифуллин, М. А. Шамсутдинов, “Авторезонансное возбуждение бризера в слабых ферромагнетиках”, *ЖВМ и МФ*, **47**:7 (2007), 1208–1220; англ. пер.: R. N. Garifullin, L. A. Kalyakin, M. A. Shamsutdinov, “Autoresonance excitation of a breather in weak ferromagnetics”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:7 (2007), 1158–1170.
- [103] Sh. Yariv, L. Friedland, “Autoresonant interaction of three nonlinear adiabatic oscillators”, *Phys. Rev. E*, **48**:4 (1993), 3072–3076.
- [104] U. Rokni, L. Friedland, “Double autoresonance in two-dimensional dynamical systems”, *Phys. Rev. E*, **59**:5 (1999), 5242–5252.
- [105] J. Marcus, L. Friedland, A. Zigler, “Autoresonant excitation and control of molecular degrees of freedom in three dimensions”, *Phys. Rev. A*, **72** (2005), 033404.
- [106] J. Barth, L. Friedland, “Multiresonant control of two-dimensional dynamical systems”, *Phys. Rev. E*, **76** (2007), 016211.
- [107] O. Yaakobi, L. Friedland, Z. Henis, “Driven, autoresonant three-oscillator interactions”, *Phys. Rev. E* (3), **76**:2 (2007), 026205.

- [108] O. Yaakobi, L. Friedland, R. R. Lindberg, A. E. Charman, G. Penn, J. S. Wurtele, “Spatially autoresonant stimulated Raman scattering in nonuniform plasmas”, *Phys. Plasmas* (to appear).
- [109] А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов, *Параметрические генераторы и делители частоты*, Советское радио, М., 1966.
- [110] К. А. Наугольных, Л. А. Островский, *Нелинейные волновые процессы в акустике*, Наука, М., 1990; англ. пер.: K. Nalogolnykh, L. Ostrovsky, *Nonlinear wave processes in acoustics*, Cambridge Texts Appl. Math., Cambridge Univ. Press, 1998.
- [111] Н. Бломберген, *Нелинейная оптика*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: N. Bloembergen, *Nonlinear optics*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1965.
- [112] Л. А. Калякин, Ю. Ю. Багдерина, “Асимптотика ограниченных на бесконечности решений уравнений квадратичного главного резонанса”, *Матем. заметки*, **78**:1 (2005), 85–97; англ. пер.: L. A. Kalyakin, Yu. Yu. Bagderina, “Asymptotics of bounded-at-infinity solutions of the principal resonance equation”, *Math. Notes*, **78**:1–2 (2005), 76–87.
- [113] Л. А. Калякин, Ю. Ю. Багдерина, “Асимптотика решения усредненных уравнений для системы связанных осцилляторов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:6 (2006), 99–113; англ. пер.: L. A. Kalyakin, Yu. Yu. Bagderina, “Asymptotics for the solution of averaged equations for a system of coupled oscillators”, *J. Math. Sci.*, **151**:1 (2008), 2699–2709.
- [114] L. A. Kalyakin, “Asymptotic well-posedness for the problem of soliton perturbation”, *Russ. J. Math. Phys.*, **5**:4 (1997), 447–458.
- [115] Л. А. Калякин, “Усреднение одночастотных колебаний”, *Вестник УГАТУ*, **1**:3 (2001), 40–46.
- [116] В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. I. Метод эталонных задач*, Наука, М., 1972.
- [117] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [118] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [119] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Pure Appl. Math., Wiley, New York–London–Sydney, 1974.
- [120] I. Aranson, B. Meerson, T. Tajima, “Excitation of solitons by an external resonant wave with a slowly varying phase velocity”, *Phys. Rev. A*, **45** (1992), 7500–7510.
- [121] Е. М. Маслов, Л. А. Калякин, А. Г. Шагалов, “Резонансный захват фазы бризера внешним возмущением”, *ТМФ*, **152**:2 (2007), 356–367; англ. пер.: E. M. Maslov, L. A. Kalyakin, Ya. G. Shagalov, “Resonance capture of the breather phase by an external perturbation”, *Theoret. Math. Phys.*, **152**:2 (2007), 1173–1182.
- [122] Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов, Р. Н. Гарифуллин, Р. К. Салимов, “Авторезонансное параметрическое возбуждение локализованных колебаний намагниченности в ферромагнетике полем переменной частоты”, *Физика металлов и металловедение*, **104**:2 (2007), 115–128.
- [123] L. Friedland, “Autoresonant excitation and evolution of nonlinear waves: The variational approach”, *Phys. Rev. E*, **55**:2 (1997), 1929–1939.
- [124] L. Friedland, A. G. Shagalov, “Excitation of multiphase waves of nonlinear Schrödinger equation by capture into resonances”, *Phys. Rev. E*, **71**:3 (2005), 036206.
- [125] L. Friedland, A. G. Shagalov, “Excitation of solitons by adiabatic multiresonant forcing”, *Phys. Rev. Lett.*, **81**:20 (1998), 4357–4360.
- [126] L. Friedland, A. G. Shagalov, “Emergence of nonuniform V-states by synchronization”, *Phys. Fluids*, **14**:9 (2002), 3074–3086.

- [127] L. Friedland, A. G. Shagalov, "Emergence and control of breather and plasma oscillations by synchronizing perturbations", *Phys. Rev. E*, **73** (2006), 066612.
- [128] Y. Gopher, L. Friedland, A. G. Shagalov, "Multiphase autoresonant excitations in discrete nonlinear Schrödinger systems", *Phys. Rev. E* (3), **72**:3 (2005), 036604.
- [129] В. Ю. Новокшенов, "Временные асимптотики для солитонных уравнений в задачах со ступенчатыми начальными данными", *Итоги науки и техники. Современ. матем. и ее прил.*, **5**, 2003, 138–168; англ. пер.: V. Yu. Novokshenov, "Time asymptotics for soliton equations in problems with step initial conditions", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **125**:5 (2005), 717–749.
- [130] И. М. Кричевер, "Гессианы интегралов уравнения Кортевега–де Фриза и возмущение конечнозонных решений", *Докл. АН СССР*, **270**:6 (1983), 1312–1317; англ. пер.: I. M. Krichever, "The 'Hessian' of integrals of the Korteweg–de Vries equation and perturbations of finite-gap solutions", *Soviet Math. Dokl.*, **27**:3 (1983), 757–761.
- [131] S. G. Glebov, V. A. Lazarev, O. M. Kiselev, "Generation of solitary packets of waves by resonance", *Proceedings of International seminar "Day on Diffraction-2003"* (Saint-Petersburg), 46–51.
- [132] С. Г. Глебов, О. М. Киселев, В. А. Лазарев, "Рождение солитонов при прохождении через локальный", *Тр. ИММ УрО РАН*, **9**:1, 64–71; англ. пер.: S. G. Glebov, O. M. Kiselev, V. A. Lazarev, "Birth of solitons during passage through local resonance", *Proc. Steklov Inst. Math., Suppl.*, **1**, 2003, S84–S90.
- [133] S. G. Glebov, O. M. Kiselev, "The slow passage through the resonances and wave packets with the different carriers", *Dyn. Partial Differ. Equ.*, **2**:3 (2005), 261–280.
- [134] S. G. Glebov, O. M. Kiselev, "The stimulated scattering of solitons on a resonance", *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 330–341.
- [135] S. G. Glebov, O. M. Kiselev, V. A. Lazarev, "Slow passage through resonance for a weakly nonlinear dispersive wave", *SIAM J. Appl. Math.*, **65**:6 (2005), 2158–2177.
- [136] N. K. Gorbatoва, O. M. Kiselev, S. G. Glebov, "Resonant excitation of nonlinear waves", *AIP Conf. Proc.*, **834**, 2006, 196–205.
- [137] В. И. Карпман, Е. М. Маслов, "Теория возмущений для солитонов", *ЖЭТФ*, **73**:2 (1977), 281–291; англ. пер.: V. I. Karpman, E. M. Maslov, "Perturbation theory for solitons", *Soviet Phys. JETP*, **46**:2 (1977), 537–559.
- [138] А. М. Косевич, Ю. С. Кившарь, "Эволюция солитон–антисолитонной пары под действием возмущений в системе, описываемой синус-уравнением Гордона", *Физика низк. темп.*, **12** (1982), 1270–1284.
- [139] А. Ньюэлл, "Обратное преобразование рассеяния", *Солитоны*, Мир, М., 1983, 193–269; англ. оригинал: A. C. Newell, "The inverse scattering transform", *Solitons*, eds. R. K. Bullough, Ph. J. Caudrey, Springer-Verlag, Berlin–N. Y., 1980, 177–242.
- [140] А. К. Звездин, "О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках", *Письма в ЖЭТФ*, **29**:10 (1979), 605–610; англ. пер.: A. K. Zvezdin, "Dynamics of domain walls in weak ferromagnets", *J. Exper. Theor. Phys. Letters*, **29** (1979), 553.
- [141] В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, "Нелинейные волны и динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках", *ЖЭТФ*, **78**:4 (1980), 1509–1522; англ. пер.: V. G. Bar'yakhtar, B. A. Ivanov, A. L. Sukstanskii, "Nonlinear waves and the dynamics of domain walls in weak ferromagnets", *J. Exper. Theor. Phys.*, **51** (1980), 757.
- [142] М. А. Шамсутдинов, И. Ю. Ломакина, В. Н. Назаров, "Динамика локализованных магнитных неоднородностей в слабых ферромагнетиках в магнитном поле при наличии затухания", *Физика металлов и металловедение*, **100**:5 (2005), 17–33.
- [143] М. А. Шамсутдинов, И. Ю. Ломакина, В. Н. Назаров, А. Т. Харисов, Д. М. Шамсутдинов, *Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны*, Гилем, Уфа, 2007.

- [144] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, “Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях”, *Итоги науки и техники. Современ. матем. и ее прил.*, **15**, 1980, 4–94; англ. пер.: S. Yu. Dobrokhotov, V. P. Maslov, “Finite-zone, almost-periodic solutions in WKB approximations”, *J. Sov. Math.*, **16** (1981), 1433–1487.
- [145] А. И. Нейштадт, “О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой”, *ПММ*, **48**:2 (1984), 197–204; англ. пер.: A. I. Neishtadt, “The separation of motions in systems with rapidly rotating phase”, *J. Appl. Math. Mech.*, **48**:2 (1984), 133–139.
- [146] В. В. Ларичева, “О расширении интервала применимости осреднения”, *Докл. АН СССР*, **220**:4 (1975), 775–778; англ. пер.: V. V. Laricheva, “On extension of the averaging interval”, *Soviet Math. Dokl.*, **16** (1975), 146–150.
- [147] А. М. Ильин, “О методе двух масштабов в задаче о возмущении двухчастотного колебания”, *ТМФ*, **118**:3 (1999), 383–389; англ. пер.: A. M. Il'in, “On the two-scale method for the problem of perturbed one-frequency oscillations”, *Theoret. Math. Phys.*, **118**:3 (1999), 301–306.
- [148] В. И. Арнольд, “О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона”, *Докл. АН СССР*, **142**:4 (1962), 758–761; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “On the behavior of an adiabatic invariant under slow periodic variation of the Hamiltonian”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 136–140.
- [149] Р. Н. Гарифуллин, “Исследование роста решений нелинейного уравнения в зависимости от начальных данных”, *Сборник трудов Региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Том 1 – Математика*, Уфа, 2003, 189–195.
- [150] А. Г. Шагалов, *Сингулярные солитоны и пространственно-неоднородные структуры в конденсированных средах*, Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук, ИФМ УрО РАН, Екатеринбург, 1999.
- [151] А. Л. Фрадков, “О применении кибернетических методов в физике”, *УФН*, **175**:2 (2005), 113–138; англ. пер.: A. L. Fradkov, “Application of cybernetic methods in physics”, *Physics-Uspekhi*, **48**:2 (2005), 103–127.

Л. А. Калякин (L. A. Kalyakin)

Институт математики с вычислительным центром РАН

E-mail: klenru@mail.ru

Поступила в редакцию

10.05.2008