Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова, Гомотопическая классификация трехкомпонентных сингулярных зацеплений графов, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 5, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:45:26

Гомотопическая классификация трехкомпонентных сингулярных зацеплений графов

В. М. Нежинский, Ю. В. Маслова

Графом называется клеточное пространство размерности, не большей единицы. Пусть r – натуральное число, и пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ – графы. *Сингулярным* $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r)$ -зацеплением называется последовательность непрерывных отображений $(f_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, f_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \dots, f_r: \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}^3)$ с попарно непересекающимися образами. Два сингулярных $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r)$ -зацепления называются *гомотопными*, если в пространстве сингулярных $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r)$ -зацеплений существует путь, соединяющий эти сингулярные зацепления. Фундаментальная задача – для любых *конечных связных* графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ расклассифицировать сингулярные $(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r)$ -зацепления с точностью до гомотопии. Цель этой работы – решить сформулированную выше задачу в случае $r = 3$. Заметим, что достаточно решить задачу в случае, когда каждый граф Γ_i является букетом конечного числа окружностей; общий случай сводится к этому простыми прямыми рассуждениями.

1. Множества $\mathcal{M}$, F_{ij} и отображение λ . Всюду в дальнейшем мы будем считать фиксированными натуральные числа p_1, p_2, p_3 .

Для любого натурального числа i положим $A(i) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - i)^2 = i^2\}$ и $B(i) = A(1) \cup A(2) \cup \dots \cup A(i)$. (Мы считаем, что окружности $A(i)$ снабжены стандартными ориентациями.) Через $\mathcal{M}$ мы будем обозначать множество классов гомотопных сингулярных $(B(p_1), B(p_2), B(p_3))$ -зацеплений. (Вычислению именно этого множества посвящена настоящая заметка.)

Через F_{ij} мы будем обозначать множество целочисленных матриц строения $p_i \times p_j$ (для $1 \leq i < j \leq 3$).

Определим отображение $\lambda_{ij}: \mathcal{M} \rightarrow F_{ij}$ следующим образом. Пусть $x \in \mathcal{M}$. Выберем какого-нибудь представителя (f_1, f_2, f_3) класса x и обозначим через f_{il} и f_{jm} сужения отображений f_i и f_j на l -ю и s -ю окружности букетов $B(p_i)$ и $B(p_j)$ соответственно. Мы полагаем $\lambda_{ij}(x) = (\text{lk}(f_{il}, f_{jm}))_{1 \leq l \leq p_i, 1 \leq m \leq p_j}$, где lk – коэффициент зацепления. Через λ мы будем обозначать отображение $\mathcal{M} \rightarrow F_{12} \times F_{13} \times F_{23}$, задаваемое формулой $x \mapsto (\lambda_{12}(x), \lambda_{13}(x), \lambda_{23}(x))$.

ТЕОРЕМА А. *Отображение λ является сюръекцией.*

2. Аналог группы Милнора–Левина. Положим $\text{pt}_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ и $D_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 3i)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Назовем сингулярное $(B(p_1), B(p_2))$ -зацепление (f_1, f_2) *специальным*, если (для $i = 1, 2$): 1) f_i – (топологическое) вложение, сужение которого на каждую окружность букета является гладким; 2) $f_i(x, y) = (x + 3i, y)$ при $(x, y) \in D \cap B(p_i)$; 3) $f_i(B(p_i) \setminus D) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$; 4) $\text{pt}_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus f_i(B(p_i))$. Ясно, что *любое сингулярное зацепление гомотопно специальному*.

Пусть (f_1, f_2) – специальное $(B(p_1), B(p_2))$ -зацепление. Наша ближайшая цель – определить его меридианы.

Обозначим $X(f_1, f_2)$ пространство $\mathbb{R}^3 \setminus (\text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2 \cup \text{Int } D_1 \cup \text{Int } D_2)$. Пусть $1 \leq i \leq 2$. Положим $\text{pt}_i = (3i, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ и выберем в пространстве $X(f_1, f_2)$ какой-нибудь путь с началом в точке pt_0 и концом в точке pt_i ; обозначим этот путь через u_i . Далее, положим $S_{i+} = \partial D_i \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 3i\}$ и $S_i^+ = \partial D_i \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$. Пусть $1 \leq j \leq p_i$. Выберем в пространстве $X(f_1, f_2)$ какой-нибудь простой замкнутый путь такой, что: его начало расположено в пространстве $S_{i+} \cap S_i^+$; образ его содержится в пространстве S_{i+} и является (метрической) окружностью; коэффициент зацепления этого (замкнутого) пути с отображением f_{ik} равен нулю

при $k \neq j$ и равен $+1$ при $k = j$. Обозначим этот путь через w_{ij} . Наконец, обозначим через pt_{ij} начало пути w_{ij} . Выберем в пространстве $X(f_1, f_2)$ какой-нибудь путь, соединяющий точку pt_i с точкой pt_{ij} и такой, что его образ содержится в пространстве $S_{i+} \cap S_i^+$. Этот путь мы обозначим через v_{ij} . Назовем j -м меридианом i -й компоненты сингулярного зацепления (f_1, f_2) путь $u_i v_{ij} w_{ij} v_{ij}^{-1} u_i^{-1}$.

Рассмотрим теперь группу $\pi_1(X(f_1, f_2), \text{pt}_0)$. Для $i \leq 2$ и $j \leq p_i$ обозначим через α_{ij} гомотопический класс j -го меридиана i -й компоненты сингулярного зацепления (f_1, f_2) . Рассмотрим коммутаторы, составленные из меридианов α_{ij} , выберем из них те, которые содержат хотя бы два сомножителя с повторяющимися первыми индексами, обозначим через J подгруппу группы $\pi_1(X(f_1, f_2), \text{pt}_0)$, нормально порожденную этими коммутаторами, и положим $\mathcal{G}(f_1, f_2) = \pi_1(X(f_1, f_2), \text{pt}_0)/J$. Это и есть наш аналог группы Милнора–Левина двухкомпонентного классического зацепления.

ЛЕММА. Для любого элемента α группы $\mathcal{G}(f_1, f_2)$ существуют целые числа $d_{ij}(\alpha)$, где $i \leq 2$ и $j \leq p_i$, и $e_{kl}(\alpha)$, где $k \leq p_1$ и $l \leq p_2$, такие, что

$$\alpha = \alpha_{11}^{d_{11}(\alpha)} \dots \alpha_{1p_1}^{d_{1p_1}(\alpha)} \alpha_{21}^{d_{21}(\alpha)} \dots \alpha_{2p_2}^{d_{2p_2}(\alpha)} [\alpha_{21}, \alpha_{11}]^{e_{11}(\alpha)} \dots [\alpha_{21}, \alpha_{1p_1}]^{e_{p_1 1}(\alpha)} \dots \\ \dots [\alpha_{2p_2}, \alpha_{11}]^{e_{1p_2}(\alpha)} \dots [\alpha_{2p_2}, \alpha_{1p_1}]^{e_{p_1 p_2}(\alpha)}.$$

3. Группа $G(L, M, N)$ и отображение $\mu(L, M, N)$. Пусть L, M, N – элементы групп F_{12}, F_{13}, F_{23} соответственно, и пусть G – группа (относительно сложения) кубических матриц строения $p_1 \times p_2 \times p_3$. Зададим: для $l \leq p_3$ отображение $\text{in}_{12}(l): F_{12} \rightarrow G$ формулой $(a_{ij}) \mapsto (a_{ijk})$, где $a_{ijl} = a_{ij}$ и $a_{ijk} = 0$ при $k \neq l$; для $m \leq p_2$ отображение $\text{in}_{13}(m): F_{13} \rightarrow G$ формулой $(b_{ij}) \mapsto (b_{ijk})$, где $b_{imk} = b_{ik}$ и $b_{ijk} = 0$ при $j \neq m$; для $n \leq p_1$ отображение $\text{in}_{23}(n): F_{23} \rightarrow G$ формулой $(c_{ij}) \mapsto (c_{ijk})$, где $c_{nj k} = c_{jk}$ и $c_{ijk} = 0$ при $i \neq n$. Мы определяем группу $G(L, M, N)$ как факторгруппу группы G по подгруппе, порожденной элементами $\text{in}_{12}(1)(L), \dots, \text{in}_{12}(p_3)(L), \text{in}_{13}(1)(M), \dots, \text{in}_{13}(p_2)(M), \text{in}_{23}(1)(N), \dots, \text{in}_{23}(p_1)(N)$.

Определим отображение $\mu(L, M, N): \lambda^{-1}(L, M, N) \rightarrow G(L, M, N)$ следующим образом. Пусть $x \in \lambda^{-1}(L, M, N)$. Выберем такого представителя (f_1, f_2, f_3) класса x , что (f_1, f_2) – специальное зацепление и $f_3(0, 0) = \text{pt}_0$. Для каждого натурального числа $k \leq p_3$ рассмотрим отображение f_{3k} (см. п. 1) и обозначим через γ_k элемент группы $\mathcal{G}(f_1, f_2)$, являющийся классом этого отображения. Согласно лемме из п. 2, имеем $\gamma_k = \alpha_{11}^{d_{11}(\gamma_k)} \dots \alpha_{2p_2}^{d_{2p_2}(\gamma_k)} [\alpha_{21}, \alpha_{11}]^{e_{11}(\gamma_k)} \dots [\alpha_{2p_2}, \alpha_{1p_1}]^{e_{p_1 p_2}(\gamma_k)}$. Мы полагаем $\mu(L, M, N)(x)$ равным классу кубической матрицы $(e_{ij}(\gamma_k))$.

ТЕОРЕМА В. Для любых элементов $L \in F_{12}, M \in F_{13}$ и $N \in F_{23}$ отображение $\mu(L, M, N)$ определено корректно и является биекцией.

Результаты этой заметки, относящиеся к случаю $p_1 = p_2 = 1$ (и произвольному натуральному числу p_3), были анонсированы авторами в [1].

Список литературы

- [1] В. М. Нежинский, Ю. В. Петрова, *Записки науч. сем. ПОМИ*, **299** (2003), 295–299; англ. пер.: V. M. Nezhinskij, Yu. V. Petrova, *J. Math. Sci.*, **131:1** (2005), 5425–5427.

В. М. Нежинский (V. M. Nezhinskii)
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
E-mail: nezhin@pdm.ras.ru

Представлено И. А. Дынниковым
Принято редколлегией
08.08.2008

Ю. В. Маслова (Yu. V. Maslova)
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
E-mail: yuliapetrova@mail.ru