В. В. Власов, Некоторые свойства системы элементарных решений дифференциально-разностных уравнений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 143–144

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

26 апреля 2023 г., 16:17:07

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. Власов

В предлагаемой заметке изучаются некоторые свойства системы элементарных (экспоненциальных) решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с постоянными матричными коэффициентами, а также рассматривается асимптотическое поведение сильных решений упомянутых уравнений.

Введем в рассмотрение уравнение вида

$$(1) \quad \sum_{j=0}^n \left(B_j u(t-h_j) + D_j \frac{d}{dt} u(t-h_j) \right) + \int_0^h B(s) u(t-s) ds = 0.$$

Здесь B_j, D_j ($j = 0, 1, \dots, n$) – матрицы размера $m \times m$ с постоянными вещественными элементами, $u(\cdot)$ – вектор-функция со значениями в $\mathbb{C}^m$, числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, элементы $B_{ij}(s)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) матрицы $B(s)$ принадлежат пространству $L_2(0, h)$.

Введем в рассмотрение матрицу-функцию

$$(2) \quad \mathcal{L}(\lambda) = \sum_{j=0}^n (B_j + \lambda D_j) \exp(-\lambda h_j) + \int_0^h \exp(-\lambda s) B(s) ds,$$

а также числовую функцию $l(\lambda) = \det \mathcal{L}(\lambda)$, нередко (см. [1]) называемую характеристическим квазимногочленом уравнения (1).

Обозначим через λ_q нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные по возрастанию модулей с учетом кратности (числа с равными модулями нумеруются в порядке возрастания аргумента). Собственные векторы из системы собственных и присоединенных векторов $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающие характеристическому числу λ_q , обозначим через $x_{q,j,0}$ ($j = 1, 2, \dots, p_q$), их присоединенные порядка s – через $x_{q,j,s}$ ($s = 0, 1, \dots, r_{pq}$).

Введем систему элементарных решений уравнения (1):

$$(3) \quad y_{q,j,s}(t) = \exp(\lambda_q t) \left(\frac{t^s}{s!} x_{q,j,0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} x_{q,j,1} + \dots + x_{q,j,s} \right).$$

Обозначим через $W_2^1((a, b), \mathbb{C}^m)$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$) пространство Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$, снабженное нормой

$$\|v\|_{W_2^1(a,b)} \equiv \left(\int_a^b (\|v^{(1)}(t)\|_{\mathbb{C}^m}^2 + \|v(t)\|_{\mathbb{C}^m}^2) dt \right)^{1/2},$$

а через $W_{2,\gamma}^1((a, b), \mathbb{C}^m)$ – весовое пространство с нормой

$$\|v\|_{W_{2,\gamma}^1(a,b)} \equiv \|\exp(-\gamma t) v(t)\|_{W_2^1(a,b)}, \quad \gamma \geq 0.$$

Поставим для уравнения (1) начальную задачу:

$$(4) \quad u(t) = g(t), \quad t \in [-h, 0], \quad u(+0) = g(0), \quad g(t) \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W_{2,\gamma}^1((-h, +\infty), \mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}_+$, назовем *сильным решением* задачи (1), (4), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) при п.в. $t \in \mathbb{R}_+$, а также условию (4).

ЛЕММА 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$. Тогда найдется такое $\gamma_0 \geq 0$, что при всех $\gamma \geq \gamma_0$ задача (1), (4) однозначно разрешима в пространстве $W_{2,\gamma}^1((-h, +\infty), \mathbb{C}^m)$ для любой вектор-функции $g(t) \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ и для ее решения $u(t)$ справедливо неравенство

$$(5) \quad \|u\|_{W_{2,\gamma}^1((-h, +\infty), \mathbb{C}^m)} \leq d \|g\|_{W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)}$$

с постоянной d , не зависящей от вектор-функции $g(t)$.

Принимая во внимание лемму 1, введем, аналогично [2], полугруппу U_t ограниченных операторов, действующих в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ согласно правилу

$$(U_t g)(s) = u(t+s), \quad -h \leq s \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Здесь $u(t)$ – решение задачи (1), (4), отвечающее $g(t)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $B(s) \equiv 0$. Тогда U_t есть C^0 -полугруппа операторов, действующих в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$ с генератором $\mathcal{A}$ таким, что $(\mathcal{A}\varphi)(s) = \varphi^{(1)}(s)$, $s \in (-h, 0)$, причем

$$(6) \quad \left\{ \varphi \in W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m), \sum_{j=0}^n (B_j \varphi(-h_j) + D_j \varphi^{(1)}(-h_j)) = 0 \right\} \subseteq \text{Dom } \mathcal{A}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $B(s) \equiv 0$. Тогда спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с множеством Λ нулей квазимногочлена $l(\lambda)$, а элементарные решения $y_{q,j,s}(t)$, $t \in [-h, 0]$, являются его корневыми векторами и образуют минимальную систему в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\det D_0 \neq 0$ и выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) $\det D_n \neq 0$, либо б) $\det B_n \neq 0$.

Тогда система элементарных решений $y_{q,j,s}(t)$ уравнения (1) полна в пространстве $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. Тогда найдутся такие постоянные α, β , что множество Λ лежит в полосе $\{\lambda : \alpha < \text{Re } \lambda < \beta\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, $B(s) \equiv 0$, $s \in [-h, 0]$, запаздывания h_j соизмеримы, а множество Λ отделимо, т.е. существует такое $\delta > 0$, что круги радиуса δ , центрами которых являются попарно различные точки из Λ , не пересекаются.

Тогда система подпространств $\{K_{\lambda_q}\}$, $\lambda_q \in \Lambda$, где K_{λ_q} – линейная оболочка элементарных решений (3), отвечающих характеристическому числу λ_q , образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^1((-h, 0), \mathbb{C}^m)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, максимальная кратность нулей квазимногочлена $l(\lambda)$ равна N , $\varkappa = \sup_{\lambda_q \in \Lambda} (\text{Re } \lambda_q)$.

Тогда любое сильное решение $u(t)$ задачи (1), (4) допускает оценку

$$(7) \quad \left(\int_{-h}^0 (\|u^{(1)}(t+s)\|^2 + \|u(t+s)\|^2) ds \right)^{1/2} \leq p(t+1)^{N-1} e^{\varkappa t} \|g\|_{W_2^1((-h, 0))}, \quad t \geq 0,$$

с постоянной p , не зависящей от вектор-функции $g(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Оценка (7) при $N = 1$, $\varkappa = 0$ справедлива и для известного примера из [3].

Автор признателен А.Г. Костюченко за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
 [2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. [3] Громова П. С., Зверкин А. М. // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 10. С. 1775–1784.