Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Дубровин, Гамильтоновы уравнения в частных производных и фробениусовы многообразия, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 7–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:50:18

УДК 517.957

Гамильтоновы уравнения в частных производных и фробениусовы многообразия

Б. А. Дубровин

Первая часть работы посвящена приложениям теории фробениусовых многообразий к задаче классификации гамильтоновых систем уравнений в частных производных, зависящих от малого параметра. Попутно развивается теория деформаций интегрируемых иерархий, в том числе так называемых иерархий топологического типа. К их числу относятся как хорошо известные иерархии, такие как иерархия уравнения Кортевега–де Фриза, нелинейного уравнения Шрёдингера, Тоды, Буссинеска и т. д., так и ряд новых иерархий, некоторые из которых могут играть важную роль в приложениях. Во второй части работы мы изучаем свойства решений этих уравнений, уделяя особое внимание сопоставлению свойств решений возмущенных и невозмущенных уравнений в окрестности точки градиентной катастрофы. Формулируется *гипотеза универсальности*, описывающая различные типы критического поведения решений возмущенной системы в окрестности точки градиентной катастрофы невозмущенной системы.

Библиография: 10 названий.

Для данного n -мерного многообразия M^n обозначим через

$$\mathcal{L}(M^n) = \{S^1 \rightarrow M^n\}$$

пространство петель со значениями в M^n . Основным объектом нашего исследования являются гамильтоновы векторные поля, зависящие от малого параметра ε . Для краткости обозначений мы их будем называть векторными полями на расширенном пространстве петель $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{R}[[\varepsilon]]$. Более точно, будут изучаться зависящие от параметра ε эволюционные системы уравнений в частных производных с одной пространственной переменной x , записываемые в виде

$$u_t^i = A_j^i(u) u_x^j + \varepsilon \left(B_j^i(u) u_{xx}^j + \frac{1}{2} C_{jk}^i(u) u_x^j u_x^k \right) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь $u = (u^1, \dots, u^n)$ – локальные координаты на M^n . Топология этого многообразия будет предполагаться тривиальной (n -мерный шар), хотя мы и будем делать нелинейные замены координат в этом шаре.

В разложении правых частей системы (1) предполагается, что члены порядка ε^k являются полиномами степени $k+1$ по производным $u_x, \dots, u^{(k+1)}$, где, по определению,

$$\deg u^{(m)} = m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Будет предполагаться, что система (1) является гамильтоновой по отношению к *локальным скобкам Пуассона*

$$u_t^i = \{u^i(x), H\} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{m=0}^{k+1} A_{k,m}^{ij}(u; u_x, \dots, u^{(m)}) \partial_x^{k-m+1} \frac{\delta H}{\delta u^j(x)}, \quad (2)$$

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{m=0}^{k+1} A_{k,m}^{ij}(u(x); u_x(x), \dots, u^{(m)}(x)) \delta^{(k-m+1)}(x-y), \quad (3)$$

$$\deg A_{k,m}^{ij}(u; u_x, \dots, u^{(m)}) = m,$$

с *локальным гамильтонианом*

$$H = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \int h_k(u; u_x, \dots, u^{(k)}) dx, \quad (4)$$

$$\deg h_k(u; u_x, \dots, u^{(k)}) = k.$$

В формуле (3) $\delta(x)$ – это дельта-функция Дирака. Смысл этих обозначений ясен из явного выражения (2). Интеграл в (4) понимается в смысле формального вариационного исчисления. Другими словами, интеграл дифференциального полинома $h = h(u; u_x, \dots, u^{(m)})$ определяется как класс эквивалентности этого полинома по модулю полных производных:

$$h(u; u_x, \dots, u^{(m)}) \sim h(u; u_x, \dots, u^{(m)}) + \partial_x(f(u; u_x, \dots, u^{(m-1)})),$$

$$\partial_x = \sum_{k \geq 0} u^{i(k+1)} \frac{\partial}{\partial u^{i(k)}}, \quad \text{где } u^{i(k)} := \frac{d^k u^i}{dx^k}.$$

Далее, $\delta H / \delta u^j(x)$ – это оператор Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\delta H}{\delta u^j(x)} = \frac{\partial h}{\partial u^j} - \partial_x \frac{\partial h}{\partial u_x^j} + \partial_x^2 \frac{\partial h}{\partial u_{xx}^j} - \dots \quad \text{для } H = \int h dx.$$

Коэффициенты скобок Пуассона и плотностей гамильтониана предполагаются полиномиальными по производным в каждом порядке по ε . Антисимметрия и тождество Якоби должны выполняться как соотношения для формальных степенных рядов по ε . Скобка (3) задает структуру алгебры Ли $\mathcal{G}_{\text{loc}}$ на пространстве всех локальных функционалов:

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} A^{ij} \frac{\delta G}{\delta u^j(x)} dx, \quad (5)$$

$$A^{ij} := \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \sum_{m=0}^{k+1} A_{k,m}^{ij}(u; u_x, \dots, u^{(m)}) \partial_x^{k-m+1},$$

$$F = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \int f_k(u; u_x, \dots, u^{(k)}) dx, \quad G = \sum_{l \geq 0} \varepsilon^l \int g_l(u; u_x, \dots, u^{(l)}) dx,$$

$$\deg f_k(u; u_x, \dots, u^{(k)}) = k, \quad \deg g_l(u; u_x, \dots, u^{(l)}) = l.$$

Полное кольцо функций на бесконечномерном “многообразии” $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{C}[[\varepsilon]]$ строится как подходящим образом пополненная симметрическая тензорная алгебра над $\mathcal{G}_{\text{loc}}$.

Предыдущие формулы определяют класс функций, векторных полей и скобок Пуассона на бесконечномерном “многообразии” $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{C}[[\varepsilon]]$. Чтобы развивать геометрический подход к изучению этих объектов, следует ввести класс допустимых “замен координат” на этом “многообразии”. Таковые замены вводятся через так называемые *обобщенные преобразования Миуры*

$$u^i \mapsto \tilde{u}^i = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k F_k^i(u; u_x, \dots, u^{(k)}), \quad (6)$$

$$\deg F_k^i(u; u_x, \dots, u^{(k)}) = k, \quad \det \left(\frac{\partial F_0^i(u)}{\partial u^j} \right) \neq 0.$$

Коэффициенты $F_k^i(u; u_x, \dots, u^{(k)})$ должны быть дифференциальными полиномами. Легко видеть, что преобразования вида (6) образуют группу. В самом деле, для того чтобы обратить преобразование (6), нужно решить дифференциальное уравнение для $u^1, \dots, u^n$. Необходимое решение получается в виде ВКБ-разложения по малому параметру. Несложное вычисление показывает, что класс эволюционных уравнений в частных производных (1), скобок Пуассона (3), а также класс локальных гамильтонианов (4) инвариантен по отношению к группе обобщенных преобразований Миуры.

Мы скажем, что два объекта нашей теории (т. е. две эволюционные системы вида (1), две локальные скобки Пуассона (3) или же два локальных гамильтониана (4)) *эквивалентны*, если один из них получается из другого посредством обобщенного преобразования Миуры.

Основными задачами нашего исследования являются:

- классификация общих гамильтоновых систем,
- применение к изучению интегрируемых систем,
- выработка новых подходов к изучению свойств решений.

Начнем с классификации скобок Пуассона.

ТЕОРЕМА 1. *В предположении*

$$\det(A_{0,0}^{ij}(u)) \neq 0 \quad (7)$$

любая скобка вида (3) эквивалентна скобке следующего стандартного вида:

$$\{\tilde{u}^i(x), \tilde{u}^j(y)\} = \eta^{ij} \delta'(x - y), \quad \eta^{ij} = \eta^{ji} = \text{const}, \quad \det(\eta^{ij}) \neq 0. \quad (8)$$

В доказательстве этой теоремы используется теория скобок Пуассона гидродинамического типа, развитая С. П. Новиковым и автором в 1983 г. Согласно этой теории, главный член скобки Пуассона задает (контравариантную) метрику нулевой кривизны

$$g^{ij}(u) := A_{0,0}^{ij}(u)$$

на многообразии M^n . Также используется тривиальность пуассоновых когомологий скобки (8), доказанная в 2001 г. Э. Гетцлером.

Следующим шагом в реализации нашей программы исследований является классификация *бигамильтоновых* структур вида (3), (7). Напомним, что системы

$$u_t^i = \{u^i(x), H_1\}_1 = \{u^i(x), H_2\}_2, \quad i = 1, \dots, n,$$

являющиеся гамильтоновыми по отношению к двум *совместным* скобкам Пуассона указанного вида $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$, всегда могут быть включены в максимальную абелеву подалгебру гамильтоновых векторных полей (*интегрируемую иерархию*), что влечет интегрируемость (это можно доказать).

ТЕОРЕМА 2. *При выполнении дополнительных условий сильной невырожденности и полупростоты каждая бигамильтонова структура однозначно определяется:*

1) *пучком скобок Пуассона гидродинамического типа*

$$\{v^i(x), v^j(y)\}_2 - \lambda \{v^i(x), v^j(y)\}_1 = (g_2^{ij}(v(x)) - \lambda g_1^{ij}(v(x)))\delta'(x - y) + (\Gamma_{k1}^{ij}(v) - \lambda \Gamma_{k2}^{ij}(v))v_x^k \delta(x - y); \quad (9)$$

2) *набором из n функций одной переменной*

$$c_1(w^1), \dots, c_n(w^n),$$

называемых центральными инвариантами.

Доказательство этой теоремы основано на

– теореме *квазитривиальности*: любая бигамильтонова структура делается эквивалентной бездисперсной (9), если расширить класс преобразований (6), допуская преобразования, рационально зависящие от производных;

– вычислении *бигамильтоновых когомологий*, т. е. деформаций пары антикоммутирующих ациклических дифференциалов, задаваемых бигамильтоновой структурой.

Центральные инварианты, параметризующие инфинитезимальные деформации, строятся так. Каждой скобке Пуассона (3) поставим в соответствие ряд из матриц, зависящих от вспомогательной переменной p :

$$\pi^{ij}(u; p) = \sum_{k \geq 0} A_{k,0}^{ij}(u) p^k. \quad (10)$$

Напомним, что степень коэффициентов $A_{k,0}^{ij}$ по производным равна нулю, так что они зависят только от u . Паре скобок поставим в соответствие характеристическое уравнение

$$\det(\pi_2^{ij}(u; p) - \lambda \pi_1^{ij}(u; p)) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим его корни $\lambda^1(u; p), \dots, \lambda^n(u; p)$:

$$\lambda^i(u; p) = \sum_{k \geq 0} \lambda_k^i(u) p^k,$$

где

$$\lambda_0^i(u) = w^i(u), \quad \lambda_k^i(u) = 0 \quad \text{для нечетных } k.$$

Условия полупростоты и сильной невырожденности означают, что главные члены $w^1(u), \dots, w^n(u)$ этих разложений попарно различны и не являются константами. Отсюда выводится, что эти функции могут быть использованы как локальные координаты на M^n . Положим

$$c_i = \frac{1}{3} \frac{\lambda_2^i(u)}{\langle dw^i, dw^i \rangle_1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (12)$$

Оказывается, что каждая из функций c_i зависит только от одной координаты w^i . Более того, две бигамильтоновы структуры с одним и тем же бездисперсным пределом (9) эквивалентны, если и только если они имеют одинаковые центральные инварианты.

ПРИМЕР 3. Бигамильтонова структура, задающая иерархию уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t + u u_x + \frac{\varepsilon^2}{12} u_{xxx} = 0, \quad (13)$$

имеет вид

$$\{u(x), u(y)\}_2 - \lambda \{u(x), u(y)\}_1 = (u(x) - \lambda) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} u_x \delta(x - y) + \frac{1}{8} \varepsilon^2 \delta'''(x - y). \quad (14)$$

Каноническое преобразование

$$u = v - \frac{\varepsilon^2}{12} (\log v')'' + \varepsilon^4 \left(\frac{v^{\text{IV}}}{288 v'^2} - \frac{7 v'' v'''}{480 v'^3} + \frac{v''^3}{90 v'^4} \right)'' + O(\varepsilon^6), \quad (15)$$

рациональное по производным $v' = v_x$, $v'' = v_{xx}$ и т. д., превращает бездисперсную бигамильтонову структуру

$$\{v(x), v(y)\}_2 - \lambda \{v(x), v(y)\}_1 = (v(x) - \lambda) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} v_x \delta(x - y) \quad (16)$$

в (14). Здесь $w = u$, единственный центральный инвариант равен константе, $c_1 = 1/24$.

ПРИМЕР 4. Бигамильтонова структура уравнения Камассы–Холма

$$u_t - \varepsilon^2 u_{txx} = \frac{3}{2} u u_x - \varepsilon^2 \left[u_x u_{xx} + \frac{1}{2} u u_{xxx} \right] \quad (17)$$

задается формулой

$$\{u(x), u(y)\}_2 - \lambda \{u(x), u(y)\}_1 = (u(x) - \lambda) \delta'(x - y) + \frac{1}{2} u_x \delta(x - y) + \lambda \frac{\varepsilon^2}{8} \delta'''(x - y). \quad (18)$$

Бездисперсные пределы для (14) и (18) совпадают. Однако центральный инвариант структуры (18) равен

$$c_1 = \frac{1}{24} w, \quad w = u.$$

Таким образом, иерархии КдФ и Камассы–Холма не эквивалентны.

Теория центральных инвариантов описывает строение пространства инфинитезимальных деформаций бигамильтоновых структур гидродинамического типа. Остается открытой проблема зануления высших препятствий, т. е. проблема существования бигамильтоновой структуры с данным бездисперсным пределом и данными центральными инвариантами. Мы обратимся теперь к специальному подклассу так называемых *интегрируемых иерархий топологического типа*, связанных с полупростыми фробениусовыми многообразиями.

Фробениусовы многообразия M^n отвечают специальному классу пуассоновских пучков гидродинамического типа. Характеристическим свойством фробениусовых многообразий служит наличие коммутативного и ассоциативного умножения на касательном пучке

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial u^j} = c_{ij}^k(u) \frac{\partial}{\partial u^k},$$

а также метрики нулевой кривизны, задаваемой в плоских координатах невырожденной постоянной симметрической матрицей

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \eta_{ij}.$$

Требуется наличие локального потенциала $F(u)$ такого, что

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right\rangle = \frac{\partial^3 F(u)}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}.$$

Также предполагается наличие плоского единичного векторного поля e и линейного эйлерова векторного поля E такого, что

$$[e, E] = e, \quad E F = (3 - d)F + \text{квадратичные члены}.$$

Здесь d – некоторая константа.

Замечательным (и, в известной степени, характеристическим) свойством фробениусовых многообразий является наличие плоского пучка метрик

$$\begin{aligned} (du^i, du^j)_1 &= \eta^{ij}, \\ (du^i, du^j)_2 &= i_E du^i \cdot du^j. \end{aligned} \tag{19}$$

Тем самым на пространстве петель фробениусова многообразия $\mathcal{L}(M^n)$ возникает бигамильтонова структура гидродинамического типа и, значит, интегрируемая иерархия. Мы не будем вдаваться в подробности процедуры построения этой иерархии. Укажем лишь одно из ее уравнений:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_x = 0, \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n) \in M^n \simeq T_{\mathbf{u}} M^n. \tag{20}$$

В этой формуле фробениусово многообразие локально отождествляется со своим касательным пространством ввиду наличия плоской метрики.

Фробениусовы многообразия обладают и целым рядом других замечательных свойств. Так, полупростые фробениусовы многообразия (т.е. алгебра в касательном пространстве $T_u M^n$ полупроста для точек общего положения $u \in M^n$) описываются через изомодромные деформации некоторых специальных линейных дифференциальных операторов с рациональными коэффициентами. Примечательной является связь полупростых фробениусовых многообразий с теорией групп, порожденных отражениями. Для наших целей особенно важным является наличие *тау-функций* у интегрируемых иерархий, связанных с фробениусовыми многообразиями. Это свойство служит главной мотивировкой для рассмотрения того специального класса интегрируемых иерархий, к которому мы теперь и переходим.

Основным вопросом здесь является проблема *реконструкции*: для каких фробениусовых многообразий система (20) получается как бездисперсный предел некоторой интегрируемой иерархии на $\mathcal{L}(M^n) \otimes \mathbb{R}[[\varepsilon]]$? Если такое интегрируемое ε -продолжение существует, то как их перечислить?

Сформулированная выше теорема 2 говорит, что каждая такая иерархия однозначно задается своим бездисперсным пределом и центральными инвариантами. Характеристическим свойством *иерархий топологического типа* служит то, что

- бездисперсная бигамильтонова структура задается пучком плоских метрик (19), ассоциированным с некоторым полупростым фробениусовым многообразием;
- все центральные инварианты постоянны и равны друг другу.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого полупростого фробениусова многообразия существует единственная интегрируемая иерархия топологического типа, связанная с этим многообразием, с центральными инвариантами*

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = \frac{1}{24}.$$

Ключом к доказательству этой теоремы служит инвариантность интегрируемых иерархий топологического типа по отношению к вирасоровским симметриям, действующим линейно на тау-функцию.

Обратимся, наконец, к изучению свойств решений построенных уравнений. Естественнo спросить, как свойства решений зависят от выбора фробениусова многообразия? Как они меняются с изменением порядка обрывания по ε ? Какая часть из этих свойств остается справедливой также и для неинтегрируемых возмущений?

Рис. 1. Критическое поведение решений уравнения КдФ

При малых временах вклад высших ε -поправок мал. Решения бездисперсной системы и ее возмущения начинают различаться вблизи точки *градиентной катастрофы*, где производные u_x , u_t делаются большими. Поведение решений гамильтоновых эволюционных систем оказывается качественно отличным от того, что происходит с решениями систем с диссипацией: вместо ударных волн возникают осцилляции с периодом $\sim \varepsilon$ (см. рис. 1).

Таблица 1. Список примеров фробениусовых многообразий и соответствующих интегрируемых иерархий топологического типа

$n = 1$	$F = \frac{1}{6} v^3$	КдФ ¹
$n = 2$	$F = \frac{1}{2} uv^2 + u^4$	Буссинеск
$n = 2$	$F = \frac{1}{2} uv^2 + e^u$	Тода
$n = 2$	$F = \frac{1}{2} uv^2 + \frac{1}{2} u^2 \left(\log u - \frac{3}{2} \right)$	НУШ
$n = 2$	$F = \frac{1}{2} uv^2 - \text{Li}_3(e^{-u})$	Абловиц–Ладик
$n = 3$	$F = \frac{1}{2} (uw^2 + u^2v) + \frac{1}{6} v^2w^2 + \frac{1}{60} w^5$	Иерархия Дринфельда–Соколова типа A_3 , теория пересечений на пространствах модулей кривых “спина 3”
$n = 3$	$F = \frac{1}{2} (uv^2 + vw^2) - \frac{1}{24} w^4 + 4we^u$	Обобщенная цепочка Тоды для разностного оператора Лакса бистепени (2,1); орбифолдные инварианты Громова–Виттена для кривой с особой точкой второго порядка
$n = 3$	$F = \frac{1}{2} (\tau v^2 + vu^2) - \frac{i\pi}{48} u^4 E_2(\tau)$	высшие поправки к эллиптическим уиземовским асимптотикам, случай КдФ
$n = 4$	$F = \frac{i}{4\pi} \tau v^2 - 2uvw + u^2 \log \left[\frac{\pi}{u} \frac{\theta'_1(0 \tau)}{\theta_1(2w \tau)} \right]$	высшие поправки к эллиптическим уиземовским асимптотикам, случай НУШ/Тода

На первый взгляд поведение решений различных уравнений оказывается совершенно различным. Так, не видно сходства в характере критического поведения, показанном на рис. 1 (случай КдФ) и рис. 2 (случай НУШ).

Тем не менее, есть все основания ожидать, что в действительности в решениях общего положения рассматриваемых гамильтоновых систем встречается лишь конечное число типов критического поведения. В этом и заключается *гипотеза универсальности* критического поведения, к обсуждению которой мы переходим.

Как видно из табл. 2, при $n = 1, 2$ типы критического поведения решений общего вида для невозмущенных систем описываются алгебраическими функциями, известными из теории особенностей (бифуркационная диаграмма особенности типа A_3 , особенность Уитни типа сборки, а также эллиптическая омбилическая особенность Тома). Для возмущенных систем эти особенности заменяются некоторыми специальными решениями уравнений типа Пенлеве и их обобщений. Дадим описание этих решений.

¹Здесь под КдФ, Буссинеск, Тода, НУШ и т. д. понимаются иерархии интегрируемых уравнений, связанные соответственно с уравнением Кортевега–де Фриза, уравнением Буссинеска, уравнениями цепочки Тоды, нелинейным уравнением Шрёдингера.

Рис. 2. Критическое поведение решений фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера $i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0$; показан график величины $u = |\psi|^2$

Таблица 2. Типы критического поведения решений систем низкого порядка

Число зависимых переменных	Бездисперсная система	Возмущенная система
$n = 1$	при $t < 0$ решение уравнения $x = ut - \frac{1}{6}u^3$	специальное решение $U(X, T)$ уравнения P_1^2 $X = UT - \frac{1}{6}U^3$ $- \left[\frac{1}{24}(U'^2 + 2UU'') + \frac{U^{IV}}{240} \right]$
$n = 2$ гиперболический случай	при $t < 0$ решение системы в характеристических переменных $x_+ = r_+$, $x_- = r_+r_- - \frac{1}{6}r_-^3$	та же функция $U(X, T)$, $r_+ = x_+ + U''(x_-, x_+)$, $r_- = U(x_-, x_+)$
$n = 2$ эллиптический случай	при $z \neq 0$ решение комплексного квадратного уравнения $z = \frac{1}{2}w^2$	<i>tritronquée</i> (трижды усеченное) решение $W_0(Z)$ уравнения P_1 $W'' = 6W^2 - Z$

Начнем с уравнения

$$X = TU - \left[\frac{1}{6}U^3 + \frac{1}{24}(U'^2 + 2UU'') + \frac{1}{240}U^{IV} \right]. \tag{21}$$

Это – обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $U = U(X)$, зависящее от параметра T . В теории уравнений Пенлеве это уравнение обычно рассматривается как высший аналог уравнения Пенлеве-1 (см. ниже). Известно, что при всех значениях параметра T любое решение этого уравнения – мероморфная функция комплексной переменной X . Интересующее нас решение, существование которого было доказано лишь в 2006 г. Т. Клаесом и М. Ванлессеном, не имеет полюсов на всей вещественной оси X при вещественных значениях параметра T . Это решение, определенное однозначно при всех $(X, T) \in \mathbb{R}^2$, мы будем обозначать через $U(X, T)$ (см. рис. 3).

Рис. 3. Решение $U(X, T)$ уравнения (21) для двух значений параметра T

Мы готовы к тому, чтобы сформулировать гипотезу универсальности для скалярных гамильтоновых уравнений.

ГИПОТЕЗА 6. *Рассмотрим общее гамильтоново возмущение уравнения*

$$v_t + a(v)v_x = 0, \quad a'(v) \neq 0. \quad (22)$$

В окрестности критической точки (x_0, t_0, v_0) решение общего положения представляется в следующем виде:

$$u \simeq v_0 + \left(\frac{\varepsilon^2 c_0}{\kappa^2} \right)^{1/7} U \left(\frac{x - a_0(t - t_0) - x_0}{(\kappa c_0^3 \varepsilon^6)^{1/7}}, \frac{a'_0(t - t_0)}{(\kappa^3 c_0^2 \varepsilon^4)^{1/7}} \right) + O(\varepsilon^{4/7}), \quad (23)$$

где $a_0 = a(v_0)$, $a'_0 = a'(v_0)$, а c_0 и κ – некоторые постоянные, решение $U(X, T)$ уравнения (21) описано выше.

Доказательство этой гипотезы для случая решений уравнения КдФ с быстроубывающими аналитическими начальными данными было получено в самое последнее время Т. Клаесом и Т. Гравой.

Как видно из табл. 2, та же самая специальная функция описывает и критическое поведение общих решений гиперболической системы второго порядка. Для случая возмущений эллиптической системы (например, для фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера) нужна другая специальная функция, к описанию которой мы и переходим.

Речь пойдет о классическом уравнении Пенлеве-1 (P_1)

$$W'' = 6W^2 - Z. \quad (24)$$

Как и выше, все решения этого уравнения – мероморфные функции комплексного переменного Z . Асимптотическое расположение полюсов этих функций было исследовано П. Бутру еще в 1913 г. Бутру показал, что линии полюсов общего решения уравнения P_I накапливаются вдоль пяти лучей

$$\arg Z = \frac{2\pi n}{5}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (25)$$

Основным открытием Бутру является доказательство существования специальных решений, для которых эти линии полюсов обрываются вдоль трех последовательных лучей из числа (25). Эти решения, названные Бутру *tritronquée*, определены однозначно для каждой тройки последовательных лучей.

Рассмотрим, в частности, решение *tritronquée*, отвечающее тройке лучей вида (25) с $n = 0, \pm 1$. Это решение, обозначаемое через $W_0(Z)$, по определению имеет лишь конечное число полюсов в секторе $|\arg Z| < 4\pi/5 - \delta$ при любом положительном δ . Нижеследующее утверждение, сформулированное в виде гипотезы Т. Гравой, К. Клайном и автором, утверждает, что этих полюсов нет вовсе.

ГИПОТЕЗА 7. *Решение tritronquée $W_0(Z)$ является аналитической функцией при всех*

$$|\arg Z| < \frac{4\pi}{5}. \quad (26)$$

Рис. 4. График вещественной (слева) и мнимой (справа) частей решения *tritronquée* $W_0(Z)$ уравнения P_I в секторе $|\arg Z| < 4\pi/5$

Из графика, показанного на рис. 4, видно, что полюсов у интересующего нас решения в секторе (26) нет.

Мы готовы к тому, чтобы сформулировать гипотезу универсальности, описывающую критическое поведение гамильтоновых возмущений систем эллиптического типа. Для таких систем имеется пара комплексно сопряженных римановых инвариантов w и $\bar{w}$. Характеристические направления также комплексно сопряжены; обозначим их через z и $\bar{z}$. Как видно из табл. 2, критические точки невозмущенной системы изолированы; в окрестности этих точек решение имеет особенность типа квадратного корня из комплексной величины.

ГИПОТЕЗА 8. Решение общего положения общего гамильтонова возмущения произвольной квазилинейной системы второго порядка эллиптического типа представляется в виде

$$w \simeq w^0 + \alpha \varepsilon^{2/5} W_0(\varepsilon^{-4/5} z) + O(\varepsilon^{4/5}), \quad z = \beta_+ x + \beta_- t + z_0, \quad (27)$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta_{\pm}$, z_0 – комплексные константы, причем

$$|\arg z| < \frac{4\pi}{5} \quad \text{при малых } |t - t_0|$$

при всех $x \in \mathbb{R}$.

Эта гипотеза, впервые сформулированная Т. Гравой, К. Клайном и автором при изучении критического поведения решений фокусирующего нелинейного уравнения Шрёдингера, на сегодняшний день остается не доказанной.

Список литературы

Часть 1: проблемы классификации

- [1] B. Dubrovin, Y. Zhang, *Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants*, [arxiv: math/0108160](#), 2001.
- [2] Si-Qi Liu, Y. Zhang, “Deformations of semisimple bihamiltonian structures of hydrodynamic type”, *J. Geom. Phys.*, **54**:4 (2005), 427–453.
- [3] B. Dubrovin, Si-Qi Liu, Y. Zhang, “On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws. I: Quasitriviality of bi-Hamiltonian perturbations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **59**:4 (2006), 559–615.
- [4] B. Dubrovin, Si-Qi Liu, Y. Zhang, “Frobenius manifolds and central invariants for the Drinfeld–Sokolov bihamiltonian structures”, *Adv. Math.*, **219**:3 (2008), 780–837.
- [5] B. Dubrovin, “On universality of critical behaviour in Hamiltonian PDEs”, *Geometry, topology, and mathematical physics. S. P. Novikov’s seminar: 2006–2007* (Moscow, Russia, 2006–2007), *Adv. Math. Sci.*, **61**, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, Providence, RI, 2008, 59–109.

Часть 2: универсальность критического поведения

- [6] B. Dubrovin, “On Hamiltonian perturbations of hyperbolic systems of conservation laws. II: Universality of critical behaviour”, *Comm. Math. Phys.*, **267** (2006), 117–139.
- [7] T. Claeys, M. Vanlessen, “The existence of a real pole-free solution of the fourth order analogue of the Painlevé I equation”, *Nonlinearity*, **20**:5 (2007), 1163–1184.
- [8] T. Claeys, M. Vanlessen, “Universality of a double scaling limit near singular edge points in random matrix models”, *Comm. Math. Phys.*, **273**:2 (2007), 499–532.
- [9] T. Grava, Ch. Klein, “Numerical solution of the small dispersion limit of Korteweg–de Vries and Whitham equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **60**:11 (2007), 1623–1664.
- [10] T. Claeys, T. Grava, *Universality of the break-up profile for the KdV equation in the small dispersion limit using the Riemann–Hilbert approach*, [arxiv: math/0801.2326](#), 2008.
- [11] B. Dubrovin, T. Grava, C. Klein, “On universality of critical behaviour in the focusing nonlinear Schrödinger equation, elliptic umbilic catastrophe and the *tritronquée* solution to the Painlevé-I equation”, *J. Nonlinear Sci.* (to appear); [arxiv: math/0704.0501](#), 2007.

Б. А. Дубровин (B. A. Dubrovin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;

International School for Advanced Studies (SISSA)

E-mail: dubrovin@sisssa.it

Поступила в редакцию

01.09.2008