Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, Абелевы решения солитонных уравнений и проблемы типа Римана–Шоттки, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 19–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:09:53

УДК 517.9

Абелевы решения солитонных уравнений и проблемы типа Римана–Шоттки

И. М. Кричевер

Настоящая работа представляет собой изложение доклада, прочитанного автором на конференции, посвященной 70-летию С. П. Новикова. В докладе были представлены доказательство гипотезы Велтерса, дающей решение классической проблемы Римана–Шоттки о характеристике якобианов гладких алгебраических кривых в терминах существования тройной секущей ассоциированного многообразия Куммера, и решение другой классической проблемы алгебраической геометрии – проблемы характеристики многообразий Прима неразветвленных накрытий.

Библиография: 42 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	19
2. Гипотеза Велтерса о тройной секущей.....	23
3. Задача характеристики многообразий Прима.....	25
4. Абелевы решения солитонных уравнений.....	26
Список литературы.....	28

1. Введение

Знаменитая гипотеза Новикова о том, что якобианы гладких алгебраических кривых – это в точности неразложимые главно-поляризованные абелевы многообразия, в терминах тэта-функции которых выражаются решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП), коренным образом изменила взаимоотношения классической алгебраической геометрии римановых поверхностей и теории солитонных уравнений. Оказалось, что конечнозонная, или алгебро-геометрическая, теория интегрирования нелинейных уравнений, возникшая в середине семидесятых годов прошлого века, может играть роль мощного инструмента для решения фундаментальных задач геометрии абелевых многообразий.

В основе предложенной автором [1], [2] общей конструкции, которая набору алгебро-геометрических данных $\{\Gamma, P_\alpha, z_\alpha, S^{g+k-1}(\Gamma)\}$ сопоставляет решение некоторого солитонного уравнения, лежит понятие функции Бейкера–Ахиезера. Здесь Γ – это неособая алгебраическая кривая рода g с отмеченными

Работа выполнена при поддержке гранта NSF DMS-04-05519.

© И. М. Кричевер, 2008

точками P_α , в окрестности которых фиксированы локальные координаты z_α , а $S^{g+k-1}(\Gamma)$ – симметрическая степень кривой. Функции Бейкера–Ахиезера определяются своими аналитическими свойствами на соответствующей алгебраической кривой. Эти аналитические свойства, по существу, являются аксиоматизацией аналитических свойств блоховских функций конечнозонных операторов Шрёдингера, установленных в начальный период развития теории конечнозонного интегрирования уравнения Кортевега–де Фриза [3]–[6].

Частным случаем общей конструкции алгебро-геометрических решений солитонных уравнений является утверждение о том, что

• если симметрическая матрица B является матрицей периодов базиса нормированных голоморфных дифференциалов на некоторой алгебраической кривой Γ , то функция $u(x, y, t)$, заданная формулой

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Vy + Wt + Z \mid B), \quad (1)$$

удовлетворяет уравнению КП

$$3u_{yy} = (4u_t - 6uu_x + u_{xx})_x; \quad (2)$$

при этом U, V, W являются векторами b -периодов нормированных мероморфных дифференциалов с полюсом в некоторой точке $P_0 \in \Gamma$ порядков 2, 3, 4 соответственно.

Здесь и далее $\theta(z \mid B)$ – это тэта-функция Римана, которая для любой симметрической матрицы B с положительно определенной мнимой частью задается формулой

$$\theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(z, m) + \pi i(Bm, m)}, \quad (z, m) = m_1 z_1 + \cdots + m_g z_g. \quad (3)$$

При всей внешней простоте формулы (1), определение в ней матрицы B как матрицы периодов голоморфных дифференциалов на некоторой алгебраической кривой достаточно опосредовано. Это естественно приводит к вопросу о возможности замкнутого описания допустимых параметров. Гипотеза, высказанная Новиковым в рамках поставленной им общей проблемы эффективизации тэта-функциональных формул, эквивалентна утверждению, что прямая подстановка формулы (1) в уравнение КП должна явно задать уравнения, характеризующие матрицы периодов голоморфных дифференциалов, т. е. дать решение знаменитой проблемы Римана–Шоттки о характеристизации якобианов алгебраических кривых. Доказательство гипотезы Новикова, полученное в 1986 г. Шиотой [7], явилось первым эффективным решением этой проблемы, поставленной более 120 лет тому назад.

Для того чтобы дать представление о той роли, которую сыграли новые идеи, привнесенные гипотезой Новикова в решение проблемы Римана–Шоттки, приведем краткое описание истории вопроса и результатов, полученных в рамках классических алгебро-геометрических подходов к ее решению (см. подробности в [8]).

При $g = 2$ и 3 размерности пространства $\mathcal{M}_g$ модулей гладких алгебраических кривых рода g и пространства $\mathcal{A}_g$ модулей главно-поляризованных

g -мерных абелевых многообразий совпадают. Поэтому непосредственным следствием теоремы Торелли является утверждение о том, что в этом случае симметрическая матрица B с положительно определенной мнимой частью общего положения является матрицей периодов римановой поверхности. Единственное ограничение дает теорема Мартенса, согласно которой многообразие Якоби римановой поверхности неразложимо, т. е. не представимо в виде прямого произведения абелевых многообразий положительной размерности. Это условие может быть эффективно описано на языке тэта-констант.

Нетривиальное тождество для матрицы периодов римановой поверхности рода 4 было получено Шоттки в 1888 г. Поскольку для $g = 4$ пространство $\mathcal{M}_g$ имеет коразмерность 1, то соответствующее соотношение Шоттки давало, по крайней мере, локальное решение проблемы характеристики соответствующих многообразий Якоби. Доказательство того, что многообразие, выделяемое соотношением Шоттки, неприводимо, было получено Игусой лишь в 1981 г. [9]. Обобщения этого соотношения на случай кривых произвольного рода были сформулированы в качестве гипотезы в 1909 г. в совместной работе Шоттки и Юнга [10] и доказаны в работе Фаркаша и Рауха [11]. Позднее Ван-Геменом [12] было доказано, что соотношения Шоттки–Юнга дают локальное решение проблемы Римана–Шоттки. Известно, что эти соотношения заведомо не дают полного решения проблемы, поскольку выделяемое ими подмногообразие содержит дополнительные компонентны уже при $g = 5$ (Донаги [13]).

Геометрической по своей исходной формулировке является характеристика якобианов, предложенная Ганнингом [14], [15]. В основе этой характеристики лежит формула тройной секущей Фэя [16].

Рассмотрим отображение главно-поляризованного абелева многообразия X в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^{2g-1}$, задаваемое базисным набором тэта-функций веса два

$$\phi_2(z) = \Theta[\varepsilon_1, 0](z) : \cdots : \Theta[\varepsilon_{2g}, 0](z). \quad (4)$$

Эти функции четны, поэтому отображение ϕ_2 разлагается в композицию

$$X \xrightarrow{\pi} X/\sigma \xrightarrow{K} \mathbb{CP}^{2g-1}, \quad (5)$$

где $\sigma(z) = -z$ – инволюция абелева многообразия и π – проекция на факторпространство. Отображение K называется отображением Куммера, а его образ $K(X)$ – многообразием Куммера. Известно, что отображение Куммера является вложением многообразия с особенностями. N -секущей многообразия Куммера называется $(N - 2)$ -мерная плоскость в $\mathbb{CP}^{2g-1}$, пересекающая $K(X)$ в N точках. Существование N -секущей, проходящей через точки $K(A_i)$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$, эквивалентно условию линейной зависимости этих точек. Прямым следствием формулы тройной секущей Фэя является утверждение о том, что если X является якобианом алгебраической кривой Γ , то любые три различные точки Γ задают *однопараметрическое* семейство тройных секущих. В несколько огрубленной форме основной результат Ганнинга состоит в том, что наличие такого однопараметрического семейства тройных секущих является не только необходимым, но и достаточным условием того,

что главно-поляризованное абелево многообразие является якобианом некоторой алгебраической кривой.

Задача описания геометрического критерия Ганнинга в терминах уравнений оказалась далеко не тривиальной и потребовала для своего решения ряда серьезных шагов. Первые из них были предприняты в работах Велтерса [17], [18], отправной точкой которых, по-видимому, послужило замечание Мамфорда [19] о том, что предельный переход в формуле тройной секущей Фэя дает тэта-функциональную формулу (1) для алгебро-геометрических решений уравнения КП. Инфинитезимальным аналогом тройной секущей является точка перегиба многообразия Куммера, т. е. такая точка A , в которой существует прямая в $\mathbb{CP}^{2g-1}$, содержащая образ формального 2-ростка некоторой кривой в X . Согласно [18], условие существования *формального бесконечного* ростка точек перегиба является характеристическим для якобианов.

Фундаментальный факт теории солитонных уравнений состоит в том, что с каждым из таких уравнений связана целая система совместных уравнений – так называемая иерархия уравнения. Алгебро-геометрические решения иерархии КП даются формулой

$$u(t_1, t_2, \dots) = 2\partial_x^2 \ln \theta \left(\sum_i U_i t_i + Z \mid B \right), \quad t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = t. \quad (6)$$

Следующим шагом явилось доказательство Арбарелло и де Кончини [20] того, что характеристика Велтерса эквивалентна утверждению, что матрица B является матрицей периодов голоморфных дифференциалов тогда и только тогда, когда найдутся векторы U_i такие, что функция $u(t)$, заданная формулой (6), удовлетворяет уравнениям всей иерархии КП. Более того, ими впервые было доказано, что для характеристики якобианов достаточно выполнения лишь конечного числа этих уравнений. Следует отметить, что полученная в [20] оценка числа уравнений иерархии КП, необходимых для характеристики якобианов, была заведомо завышена. Тривиальным следствием теории коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов является утверждение о том, что достаточно взять первые $N = g + 1$ уравнений иерархии. Гипотеза Новикова состояла в том, что число уравнений *не зависит* от g и равно $N = 1$.

Ключевым шагом в доказательстве гипотезы Новикова, предложенным Шиотой, являлось доказательство утверждения о том, что если функция $u(x, y, t)$, заданная формулой (1), удовлетворяет уравнению КП, то найдутся векторы U_i такие, что функция $u(t)$, заданная формулой (6), является решением иерархии КП. Основная проблема, с которой столкнулся Шиота, состояла в том, что возможность такого продолжения решения уравнения КП до решения иерархии КП контролируется некоторым априори нетривиальным кохомологическим препятствием. Достаточным условием тривиальности этого препятствия является условие, что тэта-дивизор Θ не содержит комплексной прямой, параллельной вектору $U = U_1$. Доказательство последнего свойства явилось наиболее технически трудной частью работы Шиоты, значение которой было прояснено в работе [21].

2. Гипотеза Велтерса о тройной секущей

Интерес к тематике, связанной с проблемой Римана–Шоттки, не угас и после доказательства гипотезы Новикова. В первую очередь это связано с рядом других проблем геометрии абелевых многообразий, среди которых отметим задачу характеристики главно-поляризованных абелевых многообразий, являющихся приминами двулистных накрытий алгебраических кривых, а также замечательную гипотезу Велтерса о том, что для характеристики якобианов достаточно существования *одной* тройной секущей. Простое сравнение гипотезы Велтерса с теоремой Ганнинга, которая требует существования однопараметрического семейства таких секущих, показывает, насколько сильным является ее утверждение.

Следует отметить, что имеется три частных случая гипотезы Велтерса, соответствующих трем возможным конфигурациям точек пересечения (a, b, c) тройной секущей и поверхности Куммера $K(X)$:

- (i) все три точки совпадают ($a = b = c$),
- (ii) две из них совпадают ($a = b \neq c$);
- (iii) все три точки пересечения различны ($a \neq b \neq c \neq a$).

Конечно, при рассмотрении *семейств* секущих первые два случая можно считать вырождениями общей ситуации (iii). Однако в ситуации, когда имеется лишь одна секущая, все три случая являются независимыми и требуют отдельного рассмотрения. Доказательство первого частного случая (i) гипотезы Велтерса было получено автором в работе [22] с помощью нового подхода¹. Оказалось, что для решения задачи Римана–Шоттки достаточно рассмотреть не само уравнение КП, а лишь одну из вспомогательных линейных задач. Точнее, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Неразложимое главно-поляризованное абелево многообразие (X, θ) является якобиевым многообразием гладкой алгебраической кривой рода g тогда и только тогда, когда найдутся g -мерные векторы $U \neq 0, V, A$ и константы p, E такие, что выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий:*

(A) *имеет место равенство*

$$(\partial_y - \partial_x^2 + u)\psi = 0, \quad (7)$$

в котором

$$u = -2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Vy + Z), \quad \psi = \frac{\theta(A + Ux + Vy + Z)}{\theta(Ux + Vy + Z)} e^{px + Ey}, \quad (8)$$

где Z – произвольный вектор;

(B) *для всех значений характеристик $\varepsilon \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_2^g$ имеет место равенство*

$$(\partial_V - \partial_U^2 - 2p\partial_U + (E - p^2))\Theta[\varepsilon, 0](A/2) = 0 \quad (9)$$

(здесь и далее ∂_U, ∂_V – производные вдоль направлений, заданных векторами U и V соответственно);

¹При выполнении различных дополнительных предположений соответствующее утверждение было доказано ранее в работах [23]–[25].

(C) на тэта-дивизоре $\Theta = \{Z \in X \mid \theta(Z) = 0\}$ выполняется уравнение

$$\begin{aligned} & [(\partial_V \theta)^2 - (\partial_U^2 \theta)^2] \partial_U^2 \theta + 2[\partial_U^2 \theta \partial_U^3 \theta - \partial_V \theta \partial_U \partial_V \theta] \partial_U \theta \\ & + [\partial_V^2 \theta - \partial_U^4 \theta] (\partial_U \theta)^2 = 0 \pmod{\theta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (7) – это одно из вспомогательных линейных уравнений для уравнения КП. Прямая подстановка в это уравнение выражений (8) и использование формулы сложения для тэта-функций Римана доказывают эквивалентность утверждений (A) и (B) теоремы. Уравнение (9) означает, что образ точки $A/2$ при отображении Куммера является точкой перегиба (случай (i) гипотезы Велтерса). Условие (C) – это то соотношение, которое реально используется в доказательстве теоремы. Формально оно слабее, чем два других условия, поскольку его локальный вывод не использует явный вид решения ψ уравнения (7), а лишь условие мероморфности этого решения. Точнее: рассмотрим целую функцию $\tau(x, y)$ комплексной переменной x , гладко зависящую от параметра y , и предположим, что уравнение (7) с потенциалом $u = -2\partial_x^2 \ln \tau$ имеет в окрестности простого нуля $\eta(y)$ функции τ , т. е. $\tau(\eta(y), y) = 0$, мероморфное решение ψ , тогда выполнено уравнение

$$\ddot{\eta} = 2w, \quad (11)$$

где “точки” обозначают производные по переменной y , а w – третий коэффициент лорановского разложения функции u в точке η , т. е. $u(x, y) = 2(x - \eta(y))^{-2} + v(y) + w(y)(x - \eta(y)) + \dots$. Формально, если представить τ в виде бесконечного произведения

$$\tau(x, y) = c(y) \prod_i (x - x_i(y)), \quad (12)$$

то уравнение (11) окажется эквивалентным бесконечной системе уравнений

$$\ddot{x}_i = -4 \sum_{j \neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^3}, \quad (13)$$

которая в тех случаях, когда τ является рациональным, тригонометрическим или эллиптическим полиномом, совпадает с уравнениями движения рациональной, тригонометрической или эллиптической системы Калоджеро–Мозера соответственно. Уравнения (11) для нулей функции $\tau = \theta(Ux + Vy + Z)$ были впервые выведены в работе [25]. Разлагая функцию θ в окрестности точек ее дивизора $z \in \Theta$: $\theta(z) = 0$, легко получить, что уравнение (11) эквивалентно уравнению (10).

Доказательство гипотезы Велтерса было завершено автором в работе [26]. Хотя доказательство гипотезы в дифференциально-разностном (ii) и полностью дискретном (iii) случаях и потребовало ряда серьезных технических изменений, в целом основные идеи подхода остались без изменения. Для краткости мы приведем ниже формулировку соответствующей теоремы лишь в полностью дискретном случае.

ТЕОРЕМА 2. *Неразложимое главно-поляризованное абелево многообразие (X, θ) является яковиевым многообразием гладкой алгебраической кривой рода g тогда и только тогда, когда найдутся g -мерные векторы $U \neq V \neq A \neq U \pmod{\Lambda}$ такие, что выполнено одно из следующих трех эквивалентных условий:*

(A) имеет место разностное уравнение

$$\psi(m, n+1) = \psi(m+1, n) + u(m, n)\psi(m, n), \quad (14)$$

в котором

$$u(m, n) = \frac{\theta((m+1)U + (n+1)V + Z)\theta(mU + nV + Z)}{\theta(mU + (n+1)V + Z)\theta((m+1)U + nV + Z)} \quad (15)$$

и

$$\psi(m, n) = \frac{\theta(A + mU + nV + Z)}{\theta(mU + nV + Z)} e^{mp+nE}, \quad (16)$$

где p, E – константы, а вектор Z произволен;

(B) для всех $\varepsilon \in \frac{1}{2}Z_2^g$ выполняются уравнения

$$\Theta[\varepsilon, 0] \left(\frac{A - U - V}{2} \right) + e^p \Theta[\varepsilon, 0] \left(\frac{A + U - V}{2} \right) = e^E \Theta[\varepsilon, 0] \left(\frac{A + V - U}{2} \right); \quad (17)$$

(C) на θ -дивизоре $\Theta = \{Z \in X \mid \theta(Z) = 0\}$ имеет место равенство

$$\theta(Z+U)\theta(Z-V)\theta(Z-U+V) + \theta(Z-U)\theta(Z+V)\theta(Z+U-V) = 0 \pmod{\theta}. \quad (18)$$

Следует отметить, что в определенном смысле замена порождающего дифференциального уравнения (7) в формулировке предшествующей теоремы на дискретное уравнение (14) была предсказуемой, поскольку последнее является одной из вспомогательных линейных задач для так называемого билинейного дискретного уравнения Хироты

$$\tau_n(l+1, m) \tau_n(l, m+1) - \tau_n(l, m) \tau_n(l+1, m+1) + \tau_{n+1}(l+1, m) \tau_{n-1}(l, m+1) = 0, \quad (19)$$

которое в полностью континуальном пределе дает уравнение КП, а в промежуточном пределе дает другое фундаментальное уравнение – уравнение двумеризованной цепочки Тоды.

Как и ранее, эквивалентность утверждений (A) и (B) непосредственно следует из формул сложения. Соотношение (C), являющееся дискретным аналогом равенства (10), – это то, что реально используется для доказательства теоремы.

3. Задача характеристики многообразий Прима

Инволюция $\sigma: \Gamma \mapsto \Gamma$ гладкой алгебраической кривой Γ естественным образом индуцирует инволюцию $\sigma^*: J(\Gamma) \mapsto J(\Gamma)$ якобиана кривой. Подпространство, нечетное относительно этой инволюции, является суммой абелева многообразия меньшей размерности, называемого многообразием Прима, и конечной группы. Ограничение главной поляризации якобиана индуцирует поляризацию многообразия Прима, которая является главной тогда и только тогда, когда исходная инволюция кривой имеет не более двух точек ветвления.

Задача характеристики локуса $\mathcal{P}_g$ многообразий Прима размерности g в пространстве $\mathcal{A}_g$ всех главно-поляризованных абелевых многообразий хорошо известна и на протяжении всей своей более чем вековой истории привлекала значительный интерес. Она намного сложнее, чем проблема Римана–Шоттки, и вплоть до недавнего времени ее решение в терминах конечной системы уравнений оставалось полностью открытым.

Задача характеристики приммианов в случае кривых с инволюцией, имеющей две неподвижные точки, была решена в [27] в терминах интегрируемых на одном уровне энергии операторов Шрёдингера. Теория таких операторов была развита Новиковым и Веселовым в работе [28], в которой также было введено и соответствующее нелинейное уравнение – так называемое уравнение Веселова–Новикова.

Кривые с инволюцией, имеющей пару неподвижных точек, могут быть рассмотрены как предельный случай неразветвленных накрывающих. Характеризация последних в терминах существования четверных секущих была решена в недавней работе автора и Грушевского [29].

Существование семейств четверных секущих для кривых с инволюцией, имеющих не более двух неподвижных точек, было доказано в работах [30], [32]. Аналог теоремы Ганнинга, утверждающий, что наличие семейства секущих характеризует приммианы, был доказан Дебарром [32]. При этом следует отметить, что существование одной четверной секущей не характеризует приммианы. Контрпример к наивному обобщению гипотезы Велтерса был построен Бовилем и Дебарром в работе [30].

В работе [29] было доказано, что наличие *двух симметричных* четверных секущих является характеристическим для приммианов неразветвленных накрываний.

ТЕОРЕМА 3 (геометрическая характеристика приммианов). *Неразложимое главно-поляризованное абелево многообразие $(X, \theta) \in \mathcal{A}_g$ лежит в замыкании локуса многообразий Прима гладких неразветвленных накрываний тогда и только тогда, когда найдутся четыре несовпадающих точки $p_1, p_2, p_3, p_4 \in X$, никакая из которых не является точкой порядка два, такие, что образы отображения Куммера восьми точек $p_1 \pm p_2 \pm p_3 \pm p_4$ лежат на двух четверных секущих (соответствующие четверки точек определяются четностью числа знаков плюс).*

Следует отметить, что доказательство этого утверждения потребовало построения и развития теории нового интегрируемого уравнения, поскольку заранее, в отличие от всех остальных случаев, никаких нелинейных уравнений, алгебро-геометрические решения которых были бы связаны с неразветвленными накрываниями, не было известно. Вспомогательное линейное уравнение соответствующего дискретного аналога уравнения Новикова–Веселова является дискретным аналогом потенциального уравнения Шрёдингера и имеет вид

$$\psi(n+1, m+1) - u(n, m)(\psi(n+1, m) - \psi(n, m+1)) - \psi(n, m) = 0. \quad (20)$$

4. Абелевы решения солитонных уравнений

В самое последнее время в совместных работах автора и Шиоты [33], [34] было введено общее понятие абелевых решений солитонных уравнений, естественным образом обобщающее классы решений, выражаемых в терминах тэта-функций главно-поляризованных абелевых многообразий и теорию эллиптических решений солитонных уравнений.

Теория эллиптических решений уравнения КП восходит к замечательной работе [35], в которой было показано, что динамика полюсов эллиптических

(рациональных или тригонометрических) решений уравнения Кортевега–де Фриза может быть описана в терминах эллиптической (рациональной или тригонометрической) системы Калоджеро–Мозера (КМ) с некоторыми ограничениями. В работе [24] было замечено, что ограниченное соответствие становится изоморфизмом при рассмотрении эллиптических решений уравнения КП. Напомним, что эллиптическая система КМ – это вполне интегрируемая гамильтонова система с гамильтонианом

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} \wp(q_i - q_j),$$

где $\wp$ – функция Вейерштрасса. В работе [24] для эллиптической системы КМ было впервые предложено лаксово представление $\dot{L} = [L, M]$ со спектральным параметром, которое позволило доказать алгебраическую интегрируемость задачи. Оказалось, что для общих начальных данных положения частиц $q = q_i(y)$ в любой момент определяются уравнением

$$\theta(Uq + Vy + Z) = 0,$$

где $\theta(Z)$ – это тэта-функция Римана, отвечающая спектральной кривой, явным образом определяемой по начальным данным.

Соответствие между конечномерными интегрируемыми системами и полюсными системами различных солитонных уравнений было рассмотрено в работах [36]–[39]. Общая схема построения таких систем изложена в [40]. В работе [41] она была обобщена на случай полевых аналогов системы типа КМ (см. также [42]).

Согласно [33], решение $u(x, y, t)$ уравнения КП называется *абелевым*, если оно имеет вид

$$u = -2\partial_x^2 \ln \tau(Ux + z, y, t), \quad (21)$$

где $z \in \mathbb{C}^n$ и $0 \neq U \in \mathbb{C}^n$ являются n -мерными векторами и где для всех y, t функция $\tau(\cdot, y, t)$ является голоморфным сечением некоторого линейного расслоения $\mathcal{L} = \mathcal{L}(y, t)$ на абелевом многообразии $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$, т. е. для всех векторов $\lambda \in \Lambda$ она удовлетворяет следующим условиям монодромии:

$$\tau(z + \lambda, y, t) = e^{a_\lambda \cdot z + b_\lambda} \tau(z, y, t) \quad (22)$$

для некоторых $a_\lambda \in \mathbb{C}^n$, $b_\lambda = b_\lambda(y, t) \in \mathbb{C}$.

В случае сечений канонического линейного расслоения на главно-поляризованном абелевом многообразии соответствующая тэта-функция единственна с точностью до нормализации. Поэтому анзац (1) приобретает вид $u = -2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Z(y, t) + z)$. Так как потоки коммутируют, то зависимость вектора $Z(y, t)$ должна быть линейной:

$$u = -2\partial_x^2 \ln \theta(Ux + Vy + Wt + z). \quad (23)$$

Следовательно, задача классификации таких абелевых решений – эта та задача, которая и была поставлена Новиковым.

В случае одномерных абелевых многообразий задача классификации абелевых решений – это задача классификации эллиптических решений, которые

выделяются среди общих алгебро-геометрических решений условием, что соответствующий вектор U порождает эллиптическую кривую, вложенную в якобиан спектральной кривой.

Отметим, что для любого вектора U замыкание группы $\{Ux \mid x \in \mathbb{C}\}$ является абелевым подмногообразием $X \subset J(\Gamma)$. Поэтому в тех случаях, когда это замыкание не совпадает со всем якобианом, мы получаем нетривиальные примеры абелевых решений. Вкратце, основной результат о классификации абелевых решений КП, полученный в [33], может быть сформулирован как утверждение, что все абелевы решения получаются подобным образом.

Для того чтобы избежать некоторых технических усложнений, мы приведем формулировку соответствующей теоремы в ситуации общего положения.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что $u(x, y, t)$ является абелевым решением уравнения КП таким, что подгруппа $\{Ux \mid x \in \mathbb{C}\}$ плотна в X . Тогда существуют единственная алгебраическая кривая Γ с отмеченной гладкой точкой $P \in \Gamma$, голоморфное вложение $j_0: X \rightarrow J(\Gamma)$ и пучок $\mathcal{F} \in \overline{\text{Pic}}^{g-1}(\Gamma)$ без кручения на Γ степени $g-1$ и ранга 1, где $g = g(\Gamma)$ – арифметический род Γ , такие, что, полагая $j(z) = j_0(z) \otimes \mathcal{F}$, мы имеем*

$$\tau(Ux + z, y, t) = \rho(z, y, t) \hat{\tau}(x, y, t, 0, \dots \mid \Gamma, P, j(z)), \quad (24)$$

где $\hat{\tau}(t_1, t_2, t_3, \dots \mid \Gamma, P, \mathcal{F})$ является τ -функцией КП, отвечающей данным $(\Gamma, P, \mathcal{F})$, и функция $\rho(z, y, t) \not\equiv 0$ удовлетворяет условию $\partial_U \rho = 0$.

Отметим, что если Γ является гладкой, то

$$\hat{\tau}(x, t_2, t_3, \dots \mid \Gamma, P, j(z)) = \theta\left(Ux + \sum V_i t_i + j(z) \mid B(\Gamma)\right) e^{Q(x, t_2, t_3, \dots)}, \quad (25)$$

где $V_i \in \mathbb{C}^n$, Q – квадратичная форма, а $B(\Gamma)$ – соответствующая матрица периодов. Линеаризация на якобиане $J(\Gamma)$ нелинейной (y, t) -динамики для $\tau(z, y, t)$ указывает на возможность существования интегрируемых систем на пространствах тэта-функций высших уровней. Система КМ – это пример такой системы для $n = 1$.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, “Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31; англ. пер.: I. M. Krichever, “Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry”, *Funct. Anal. Appl.*, **11**:1 (1977), 12–26.
- [2] И. М. Кричевер, “Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений”, *УМН*, **32**:6 (1977), 183–208; англ. пер.: I. M. Krichever, “Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations”, *Russian Math. Surveys*, **32**:6 (1977), 185–213.
- [3] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1 (1976), 55–136; англ. пер.: B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov, “Non-linear equations of Korteweg–de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties”, *Russian Math. Surveys*, **31**:1 (1976), 59–146.
- [4] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, “Об операторах Хилла с конечным числом лакун”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:1 (1975), 69–70; англ. пер.: A. R. Its, V. B. Matveev, “Hill’s operator with finitely many gaps”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:1 (1975), 65–66.

- [5] H. P. McKean, P. van Moerbeke, “The spectrum of Hill’s equation”, *Invent. Math.*, **30**:3 (1975), 217–274.
- [6] P. D. Lax, “Periodic solutions of the KdV equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28** (1975), 141–188.
- [7] T. Shiota, “Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations”, *Invent. Math.*, **83**:2 (1986), 333–382.
- [8] И. А. Тайманов, “Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения”, *УМН*, **52**:1 (1997), 149–224; англ. пер.: I. A. Taimanov, “Secants of Abelian varieties, theta functions, and soliton equations”, *Russian Math. Surveys*, **52**:1 (1997), 147–218.
- [9] Jun-ichi Igusa, “On the irreducibility of Schottky’s divisor”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **28**:3 (1981), 531–545.
- [10] F. Schottky, H. Jung, “Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel’schen Funktionen der Riemann’schen Theorie”, *Sitzungsber. Akad. Berlin*, 1909, 282–297.
- [11] H. M. Farkas, H. E. Rauch, “Period relations of Schottky type on Riemann surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **92**:3 (1970), 434–461.
- [12] B. van Geemen, “Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves”, *Invent. Math.*, **78**:2 (1984), 329–349.
- [13] R. Donagi, “Big Schottky”, *Invent. Math.*, **89**:3 (1987), 569–599.
- [14] R. C. Gunning, “Some curves in Abelian varieties”, *Invent. Math.*, **66**:3 (1982), 377–389.
- [15] R. C. Gunning, “Some identities for abelian integrals”, *Amer. J. Math.*, **108**:1 (1986), 39–74.
- [16] J. D. Fay, “Theta functions on Riemann surfaces”, *Lecture Notes in Math.*, **352**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
- [17] G. E. Welters, “On flexes of the Kummer variety (note on a theorem of R. C. Gunning)”, *Indag. Math.*, **45**:4 (1983), 501–520.
- [18] G. E. Welters, “A criterion for Jacobi varieties”, *Ann. of Math. (2)*, **120**:3 (1984), 497–504.
- [19] D. Mumford, “An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg–de Vries equation and related nonlinear equations”, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry* (Kyoto, 1977), Kinokuniya Book Store, Kyoto, 1978, 115–153.
- [20] E. Arbarello, C. De Concini, “On a set of equations characterizing Riemann matrices”, *Ann. of Math. (2)*, **120**:1 (1984), 119–140.
- [21] E. Arbarello, C. De Concini, “Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of Abelian integrals on Riemann surfaces”, *Duke Math. J.*, **54**:1 (1987), 163–178.
- [22] I. M. Krichever, “Integrable linear equations and the Riemann–Schottky problem”, *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., **253**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, 497–514.
- [23] G. Marini, “A geometrical proof of Shiota’s theorem on a conjecture of S. P. Novikov”, *Compos. Math.*, **111**:3 (1998), 305–322.
- [24] И. М. Кричевер, “Эллиптические решения уравнения Кадомцева–Петвиашвили и интегрируемые системы частиц”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:4 (1980), 45–54; англ. пер.: I. M. Krichever, “Elliptic solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation and integrable systems of particles”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:4 (1980), 282–290.
- [25] E. Arbarello, I. Krichever, G. Marini, “Characterizing Jacobians via flexes of the Kummer variety”, *Math. Res. Lett.*, **13**:1 (2006), 109–123.
- [26] I. Krichever, “Characterizing Jacobians via trisecants of the Kummer variety”, *Ann. of Math.*, 2008 (to appear); [arXiv:math/0605625](https://arxiv.org/abs/math/0605625), 2006.
- [27] I. Krichever, “A characterization of Prym varieties”, *Int. Math. Res. Not.*, 2006, Art. ID 81476, 36 pp.

- [28] А. П. Веселов, С. П. Новиков, “Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения”, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24; англ. пер.: S. P. Novikov, A. P. Veselov, “Finite-gap two-dimensional potential Schrödinger operators. Explicit formulas and evolution equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **30**:3 (1984), 588–591.
- [29] S. Grushevsky, I. Krichever, *Integrable discrete Schrödinger equations and a characterization of Prym varieties by a pair of quadrisecants*; [arXiv: 0705.2829v1](#), 2007.
- [30] A. Beauville, O. Debarre, “Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **14**:4 (1988), 613–623.
- [31] J. Fay, “On the even-order vanishing of Jacobian theta functions”, *Duke Math. J.*, **51**:1 (1984), 109–132.
- [32] O. Debarre, “Vers une stratification de l’espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées”, *Complex algebraic varieties* (Bayreuth, 1990), Lecture Notes in Math., **1507**, Springer, Berlin, 1992, 71–86.
- [33] I. Krichever, T. Shiota, “Abelian solutions of the KP equation,”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **224**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 173–192; [arXiv: 0804.0274](#), 2008.
- [34] I. Krichever, T. Shiota, *Abelian solutions of the soliton equations and geometry of abelian varieties*, [arXiv: 0804.0794](#), 2008.
- [35] H. Airault, H. McKean, J. Moser, “Rational and elliptic solutions of the Korteweg–de Vries equation and related many-body problem”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **30**:1 (1977), 95–148.
- [36] I. M. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, “Spin generalisation of the Calogero–Moser system and the matrix KP equation”, *Topics in topology and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **170**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 83–119.
- [37] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, “Спиновое обобщение модели Рейсенаарс–Шнайдера, неабелева двумеризованная цепочка Toda и представления алгебры Склянина”, *УМН*, **50**:6 (1995), 3–56; англ. пер.: I. Krichever, A. Zabrodin, “Spin generalization of the Ruijsenaars–Schneider model, the non-Abelian 2D Toda chain, and representations of the Sklyanin algebra”, *Russian Math. Surveys*, **50**:6 (1995), 1101–1150.
- [38] I. Krichever, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin, “Quantum integrable models and discrete classical Hirota equations”, *Comm. Math. Phys.*, **188**:2 (1997), 267–304.
- [39] I. Krichever, “Elliptic analog of the Toda lattice”, *Internat. Math. Res. Notices*, 2000, № 8, 383–412.
- [40] I. Krichever, “Elliptic solutions to difference nonlinear equations and nested Bethe ansatz equations”, *Calogero–Moser–Sutherland models* (Montréal, QC, 1997), CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 2000, 249–271.
- [41] А. А. Ахметшин, Ю. С. Вольвовский, И. М. Кричевер, “Эллиптические семейства решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили и полевой аналог эллиптической системы Калоджеро–Мозера”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:4 (2002), 1–17; англ. пер.: A. A. Akhmetshin, I. M. Krichever, Yu. S. Volvovskii, “Elliptic families of solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation and the field elliptic Calogero–Moser system”, *Funct. Anal. Appl.*, **36**:4 (2002), 253–266.
- [42] A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Hitchin systems – symplectic maps and two-dimensional version*, [arXiv: nlin/0110045v3](#), 2001.

И. М. Кричевер (I. M. Krichever)

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН;

Columbia University, New York, USA

E-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступила в редакцию

02.09.2008