Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Алхутов, А. Н. Гордеев, L_p -разрешимость задачи Дирихле для оператора теплопроводности, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 137–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:54:50

L_p -разрешимость задачи Дирихле для оператора теплопроводности**Ю. А. Алхутов, А. Н. Гордеев**

Настоящая заметка посвящена вопросу об однозначной L_p -разрешимости задачи Дирихле для оператора теплопроводности в цилиндрической области $Q_T = D \times (0, T)$ с ограниченным основанием $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ниже $W_p^{1,0}(Q_T)$ означает соболевское пространство функций, L_p -суммируемых в Q_T вместе с обобщенными производными первого порядка по переменным x_i , $i = 1, \dots, n$, а $\dot{W}_p^{1,0}(Q_T)$ – пополнение гладких функций, равных нулю в окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T , по норме $W_p^{1,0}(Q_T)$. Обозначим через $\partial_p(Q_T)$ параболическую границу Q_T и рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u - u_t = \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i} \quad \text{в } Q_T, \quad f_i \in L_p(Q_T), \quad i = 1, \dots, n, \quad u|_{\partial_p(Q_T)} = 0, \quad (1)$$

под решением которой понимается функция $u \in \dot{W}_p^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству $\int_{Q_T} \left(u \varphi_t - \sum_{i=1}^n u_{x_i} \varphi_{x_i} \right) dx dt = - \int_{Q_T} \sum_{i=1}^n f_i \varphi_{x_i} dx dt$ на гладких в $\bar{Q}_T$ пробных функциях φ , равных нулю в окрестности боковой поверхности и верхней крышки цилиндра Q_T .

Основной целью является нахождение необходимого и достаточного условия на границу ∂D области D , при выполнении которого задача (1) однозначно разрешима для всех $p \in (1, \infty)$ и имеет место коэрцитивная оценка

$$\|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)} \leq C \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_p(Q_T)}, \quad (2)$$

в которой постоянная C не зависит от u и f_i , $i = 1, \dots, n$.

Для дивергентных эллиптических уравнений разрешимость задачи Дирихле хорошо изучена в областях с изолированными особенностями на границе. В плоском случае рассмотрены угловые точки [1], [2], в многомерном – конические точки, ребра, многогранные углы и т. п. [1], [3]–[5]. Задача в выпуклой области изучена в [6]. Необходимое и достаточное условие на границу области, обеспечивающее однозначную L_p -разрешимость задачи Дирихле для уравнения Лапласа при всех $p > 1$ вместе с соответствующей коэрцитивной оценкой, найдено в [7]. Уравнение теплопроводности в цилиндре с двугранным углом на боковой поверхности изучено в [8]. Здесь разрешимость задачи Дирихле доказана в L_p -пространствах с весом. Для параболических уравнений дивергентного вида в цилиндрах с выпуклым основанием L_p -разрешимость задачи Дирихле исследована в [9].

В последующем важную роль будет играть понятие гармонической меры. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область и $E \subset \partial\Omega$ – открытое на $\partial\Omega$ множество. Гармоническое продолжение в Ω полунепрерывной снизу на $\partial\Omega$ функции, равной единице на E и нулю на $\partial\Omega \setminus E$, которое обозначим через $\omega(x, E, \Omega)$, называется гармонической мерой множества E в точке x относительно области Ω . Конструкцию построения гармонической меры и ее свойства можно найти в работе [10].

Ниже $B_r^{x_0}$ – открытый n -мерный шар $\{x : |x - x_0| < r\}$, $S_r^{x_0}$ – сфера $\{x : |x - x_0| = r\}$, d – диаметр области D . При исследовании задачи (1) будем использовать гармоническую меру множества $E = S_{\rho^0}^{x_0} \cap D$ относительно области $B_{\rho^0}^{x_0} \cap D$, где $x_0 \in \partial D$,

и в дальнейшем положим $\omega_{\rho^{x_0}}(x) = \omega(x, S_{\rho^{x_0}} \cap D, B_{\rho^{x_0}} \cap D)$. Следующее условие введено в работе [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Область D удовлетворяет R -условию, если для всех $\alpha \in (0, 1)$, $\rho \in (0, d)$ и $x_0 \in \partial D$ справедливо неравенство $\omega_{\rho^{x_0}}(x) \leq \Re(|x - x_0|/\rho)^{\alpha} \forall x \in D \cap B_{\rho^{x_0}}$, в котором постоянная $\Re$ не зависит от ρ , x_0 и x .

Геометрические условия на область, обеспечивающие данное свойство, содержатся в [7]. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы задача (1) была однозначно разрешима в пространстве $\dot{W}_p^{1,0}(Q_T)$ при всех значениях $p \in (1, \infty)$ и имела место оценка (2), необходимо и достаточно, чтобы область D удовлетворяла R -условию.

Задача (1) исследуется и в пространстве $\dot{V}_p^{1,0}(Q_T)$ – пополнении гладких функций, равных нулю в окрестности боковой поверхности S_T и нижнего основания цилиндра Q_T , по норме

$$\|u\|_{\dot{V}_p^{1,0}(Q_T)}^p = \max_{t \in [0, T]} \int_D |u(x, t)|^p dx + \|u\|_{W_p^{1,0}(Q_T)}^p.$$

Решение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{Q_\tau} \left(u \varphi_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} \right) dx dt - \int_D u(x, \tau) \varphi(\tau, x) dx = \int_{Q_\tau} \left(f_0 \varphi - \sum_{i=1}^n f_i \varphi_{x_i} \right) dx dt,$$

выполненного для всех значений $\tau \in (0, T)$ на гладких в замыкании $Q_\tau = D \times (0, \tau)$ пробных функциях φ , равных нулю в окрестности боковой поверхности цилиндра Q_τ .

Показано, что R -условие необходимо и достаточно для того, чтобы задача (1) была однозначно разрешима в пространстве $\dot{V}_p^{1,0}(Q_T)$ при всех $p \geq 2$ и имела место оценка

$$\|u\|_{\dot{V}_p^{1,0}(Q_T)} \leq C \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L_p(Q_T)}, \text{ где постоянная } C \text{ не зависит от } u \text{ и } f_i, i = 1, \dots, n.$$

Если $1 < p < 2$, то задача (1) может оказаться неразрешимой в пространстве $\dot{V}_p^{1,0}(Q_T)$ даже в том случае, когда область D является шаром. Соответствующий пример приведен в работе [9].

Список литературы

- [1] В. А. Кондратьев, *Тр. ММО*, **16** (1967), 209–292. [2] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monogr. Stud. Math., **24**, Pitman, Boston, MA, 1985. [3] В. А. Кондратьев, *Дифференц. уравнения*, **6** (1970), 1831–1843. [4] Г. М. Вержбинский, В. Г. Мазья, *Изв. вузов. Матем.*, **145:6** (1974), 8–19. [5] В. Г. Мазья, В. А. Пламеневский, *Тр. ММО*, **37** (1978), 49–93. [6] Ю. А. Алхутов, В. А. Кондратьев, *Дифференц. уравнения*, **28:5** (1992), 806–818. [7] Ю. А. Алхутов, *Матем. сб.*, **189:1** (1998), 3–20. [8] V. A. Solonnikov, *Rend. Mat. Appl.* (7), **21:1–4** (2001), 1–15. [9] Ю. А. Алхутов, А. Н. Гордеев, *Тр. СПбМО*, **13** (2007), 1–25. [10] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, **32**, 1988, 99–215.

Ю. А. Алхутов (Yu. A. Alkhutov)

Владимирский государственный
гуманитарный университет
E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Представлено А. А. Давыдовым

Принято редколлегией
04.10.2008

А. Н. Гордеев (A. N. Gordeev)

Владимирский государственный
гуманитарный университет
E-mail: gangordeev@mail.ru