Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Вечтомов, М. А. Лукин, Полукольца, являющиеся объединением кольца и полутела, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:28:28

Полукольца, являющиеся объединением кольца и полутела

Е. М. Вечтомов, М. А. Лукин

1. Общие вопросы. Рассматриваются полукольца S с единицей [1]. Если из делимого полукольца с квазиитождеством $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$ выбросить 0, то получим алгебраическую структуру, называемую *полутелом*.

Обозначим через $r(S)$ множество всех элементов полукольца S , обладающих противоположным элементом, а через $U(S)$ – множество всех обратимых элементов из S . Очевидно, что $r(S)$ является кольцом относительно операций в S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полукольцо S назовем *полукольцевым дизъюнктивным объединением* кольца R и полутела U и обозначим $R \dot{\cup} U$, если оно является объединением своих непересекающихся подмножеств $r(S)$ и $U(S)$, причем $r(S)$ есть кольцо R , $U(S)$ – полутело U .

При изучении указанных в заглавии полуколец можно ограничиться полукольцевыми дизъюнктивными объединениями кольца и полутела, их изучение начато в [2].

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо R входит в полукольцевое дизъюнктивное объединение с некоторым полутелом тогда и только тогда, когда R – радикальное по Джекобсону кольцо, аддитивная группа которого является делимой абелевой группой без кручения.*

Полутело U называется *зероидным*, если существуют $a, b \in U$ такие, что $a + b = a$. Легко видеть, что незероидность полутела равносильна существованию на нем неединичной конгруэнции, фактор по которой есть сократимое полутело.

ТЕОРЕМА 2. *Полутело U входит в полукольцевое дизъюнктивное объединение с некоторым ненулевым кольцом тогда и только тогда, когда U не является зероидным.*

ТЕОРЕМА 3. *Существуют неизоморфные полукольцевые дизъюнктивные объединения кольца $R = \mu(0)$ и полутела $U = {}^*(\mathbb{R}^+) \times {}^*(\mathbb{Q}^+)$, где $\mu(0)$ – монада нуля нестандартного расширения поля действительных чисел ${}^*\mathbb{R}$.*

Можно привести пример кольца и полутела, допускающих бесконечно много попарно неизоморфных полукольцевых дизъюнктивных объединений.

Полутела, входящие в полукольцевое дизъюнктивное объединение с данным кольцом, описаны в [2].

2. Строение колец, входящих в полукольцевое дизъюнктивное объединение с данным полутелом. Фиксируем незероидное полутело U . Пусть для ненулевого кольца R существует полукольцо $S = R \dot{\cup} U$. Рассмотрим условие (*): $1 + r \neq 1$ для любого ненулевого r из R ; оно равносильно импликации $1 + r_1 = 1 + r_2 \Rightarrow r_1 = r_2$ ($\forall r_1, r_2 \in R$).

Каждая конгруэнция ρ на полутеле U определяется любым своим классом, класс единицы конгруэнции ρ называется *ядром* в U .

Ядро K полутела U назовем *кольцевым*, если: 1) $\forall u \in U \forall k \in K \exists t \in K \quad ku + 1 = u + t$; 2) $\forall u \in U \forall k_1, k_2 \in K \quad (k_1 + u = k_2 + u \Rightarrow k_1 = k_2)$.

Пусть $T(U)$ – кольцо разностей полутела U и $h: U \rightarrow T(U)$ – естественный гомоморфизм, переводящий элемент $u \in U$ в класс $(u + 1, 1)$.

Имеют место следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если K – кольцевое ядро полутела U , то гомоморфизм h инъективен на K и $h(K) = 1 + I$ для некоторого идеала I кольца $T(U)$ такого, что существует $I \dot{\cup} U$ с условием (*).*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Кольцо R входит в полукольцевое дизъюнктивное объединение с условием $(*)$ с данным полутелом U тогда и только тогда, когда R изоморфно идеалу $1 - h(K)$ кольца разностей $T(U)$ для некоторого кольцевого ядра K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S = R \dot{\cup} U$ и в полукольце S выполняется условие $(*)$. Нетрудно видеть, что множество $1 + R$ является классом единицы конгруэнции σ на полутеле U : $u_1 \sigma u_2 \Leftrightarrow \exists r \in R \ u_1 + r = u_2$. Докажем, что ядро $1 + R$ – кольцевое. Возьмем $r, r_1, r_2 \in R$ и $u, w \in U$. Поскольку $(1 + r)u + 1 = u + (1 + ru)$, то выполнено условие 1) кольцевого ядра. Проверим 2). Пусть $(1 + r_1)u + w = (1 + r_2)u + w$, тогда $u + w + r_1u = u + w + r_2u$, или $1 + r_1u(u + w)^{-1} = 1 + r_2u(u + w)^{-1}$, откуда в силу $(*)$ $r_1u(u + w)^{-1} = r_2u(u + w)^{-1}$, и $r_1 = r_2$. Следовательно, $K = 1 + R$ – кольцевое ядро и $R \cong 1 - h(K)$. Обратное утверждение следует из утверждения 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для полукольцевого дизъюнктивного объединения $S = R \dot{\cup} U$ множество $J(S) = \{r \in R : \exists u \in U \ u + r = u\}$ является идеалом кольца R , выдерживает умножение на элементы полутела U и его аддитивная группа делима.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $S = R \dot{\cup} U$ для ненулевого кольца R и полутела U . Тогда существует $(R/J(S)) \dot{\cup} U$ с условием $(*)$ и существует такое полукольцо $S_1 = R \dot{\cup} U$, что $J(S_1) = \{r \in R : \forall u \in U \ u + r = u\}$ и факторкольца $R/J(S_1)$ и $R/J(S)$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $S = R \dot{\cup} U$. В силу утверждения 3 $J(S)$ – идеал кольца R и его аддитивная группа делима, поэтому она выделяется прямым слагаемым в группе $\langle R, + \rangle$: $J(S) \oplus P = R$. Очевидно, что P выдерживает умножение на элементы полутела U . Аддитивная группа факторкольца $R/J(S)$ изоморфна $\langle P, + \rangle$, каждый элемент $R/J(S)$ имеет вид $[p]$ для единственного элемента $p \in P$. Положив $u \oplus [p] = [p] \oplus u = u + p$, $u \otimes [p] = [u \cdot p]$, $[p] \otimes u = [p \cdot u]$ для элементов $u \in U$, $p \in P$, получим $(R/J) \dot{\cup} U$. Поскольку $J(S) \cap P = \{0\}$, то это полукольцевое объединение удовлетворяет условию $(*)$.

Образуем новое полукольцевое дизъюнктивное объединение $R \dot{\cup}_1 U$: $(p + j) \oplus u = u \oplus (p + j) = p + u$, $(p + j) \otimes u = pu + ju$, $u \otimes (p + j) = up + uj$ при $p \in P$, $u \in U$, $j \in J(S)$. Операции заданы корректно, поскольку множества P и $J(S)$ выдерживают умножение на элементы полутела U . В этом полукольцевом дизъюнктивном объединении для каждого элемента $j \in J(S_1)$ и для каждого $u \in U$ выполняется равенство $j + u = u$. Теорема доказана.

3. Построение искоемых колец R . В силу утверждений 1 и 2 строим все полукольца $S = T \dot{\cup} U$ с условием $(*)$. Далее, опираясь на теорему 4, берем всевозможные кольца R , для которых существует такой эпиморфизм $f: R \rightarrow T$ для одного из найденных колец T , что R – унитарный полумодуль над U , $\text{Ker } f \subseteq \text{Ann } R$ и $f(ur) = uf(r)$, $f(ru) = f(r)u$ для любых $u \in U$ и $r \in R$.

Если R – кольцо с нулевым аннулятором и для данного полутела U существует $S = R \dot{\cup} U$, то S удовлетворяет условию $(*)$. В силу утверждения 2 такие кольца R имеют вид $1 - K \subset T(U)$ по всем кольцевым ядрам K в U .

Список литературы

- [1] J.S. Golan, *Semirings and their applications*, Kluwer, Dordrecht, 1999. [2] М. А. Лукин, *Чебышёвский сб.*, 6:4(16) (2005), 138–148.

Е. М. Вечтомов (Е. М. Vechtomov)
Вятский государственный гуманитарный университет
E-mail: vecht@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
14.10.2008

М. А. Лукин (М. А. Lukin)
Вятский государственный гуманитарный университет
E-mail: mathematic@vshu.kirov.ru