Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Зорин, О действии централизатора коизотропной подалгебры в неприводимом представлении простой алгебры Ли, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:28:56

О действии централизатора коизотропной подалгебры в неприводимом представлении простой алгебры Ли

А. А. Зорин

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_n$ – одна из классических простых комплексных алгебр Ли ранга n , т. е. $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ или $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$ (далее мы будем опускать $\mathbb{C}$ в обозначениях), и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – стабилизатор старшего вектора ее стандартного представления.

В [1] доказано, что централизатор $\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в универсальной оберывающей алгебре $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ коммутативен. Более того, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$ есть тензорное произведение $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ центров $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ алгебр $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ соответственно. В [1] доказано также, что действие $\mathfrak{h}$ на пуассоновом многообразии $\mathfrak{g}^*$ коизотропно. Подалгебры с таким свойством мы называем *коизотропными*. В [1] доказано, что указанными подалгебрами $\mathfrak{h}$ исчерпывается список коизотропных нередуктивных алгебраических подалгебр с полупростой подалгеброй Леви в простых алгебрах Ли.

Зафиксируем максимальный тор $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{g}$ и систему простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Имеет место разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}_-$, где $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ – унитарные подалгебры, отвечающие положительным и отрицательным корням соответственно. Положим $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{t}$ и $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{t}$. Через ω_1 будем обозначать старший вес стандартного представления алгебры $\mathfrak{g}$, через ω – минимальный ненулевой вес, пропорциональный весу ω_1 и лежащий в решетке корней, а именно, $\omega = n\omega_1$ для $\mathfrak{sl}_{n+1}$, $\omega = \omega_1$ для $\mathfrak{so}_{2n+1}$, $\omega = 2\omega_1$ для $\mathfrak{sp}_{2n}$ и $\mathfrak{so}_{2n}$. Обозначим через e_α корневой вектор, отвечающий корню α , а через $\mathfrak{s}$ максимальную редуктивную подалгебру, порожденную элементами e_{α_i} , $e_{-\alpha_i}$, где $2 \leq i \leq n$. Алгебра $\mathfrak{s}$ есть классическая простая алгебра Ли $\mathfrak{g}_{n-1}$. Положим $\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{h}$. Тогда $\bar{\mathfrak{t}}$ есть максимальный тор алгебры $\mathfrak{h}$, выделяемый в $\mathfrak{t}$ уравнением $\omega_1(t) = 0$. Имеем $\bar{\mathfrak{t}} \subset \mathfrak{s}$ и $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{h}$. Для всякого веса $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ будем обозначать через $\bar{\lambda}$ его ограничение на $\bar{\mathfrak{t}}$. Если W – некоторый $\mathfrak{t}$ -модуль, то через W_μ будем обозначать весовое подпространство веса $\mu \in \mathfrak{t}^*$.

Пусть $\rho_\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V(\lambda))$ – неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с младшим весом $-\lambda$. Его продолжение до представления алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ будем также обозначать через ρ_λ . Младший вектор представления ρ_λ обозначим через $v_{-\lambda}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем называть вектор $v \in V(\lambda)$ *полумладшим*, если он является младшим относительно $\mathfrak{s}$ и весовым относительно $\bar{\mathfrak{t}}$. Линейную оболочку полумладших векторов обозначим через $V(\lambda)^-$. Пусть $\bar{\nu} \in \bar{\mathfrak{t}}^*$. Множество весов λ таких, что $V(\lambda)^-_{-\bar{\lambda}+\bar{\nu}} \neq 0$, обозначим через $\mathcal{L}(\bar{\nu})$. Для $\lambda \in \mathcal{L}(\bar{\nu})$ обозначим через $\nu(\lambda) \in \mathfrak{t}^*$ минимальный вес такой, что $V(\lambda)^-_{-\bar{\lambda}+\nu(\lambda)} \neq 0$ и $\overline{\nu(\lambda)} = \bar{\nu}$. Веса вида $\nu(\lambda)$ будем называть *минимальными*. Так же будем называть соответствующие полумладшие векторы.

Нас будет интересовать, как действует алгебра $\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$ в пространстве $V(\lambda)$. Поскольку элементы алгебры $\mathfrak{z}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(\mathfrak{h})$ перестановочны с элементами алгебры $\mathfrak{s}$, то достаточно описать ее действие в пространстве $V(\lambda)^-$ (ясно, что она сохраняет это подпространство). Так как алгебра $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ действует на пространстве $V(\lambda)$ скалярно, то достаточно рассматривать только действие алгебры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$. Обозначим через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_+$ идеал в $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$, состоящий из элементов с нулевым свободным членом. Основной гипотезой о действии $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ в пространстве $V(\lambda)$ является следующая

ГИПОТЕЗА. Пусть $\mathfrak{g}$ – классическая простая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – стабилизатор старшего вектора тавтологического представления алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\rho_\lambda: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ – неприводимое представление с младшим весом $-\lambda$. Тогда спектр $\mathfrak{s}$ -модуля $W(\lambda) = V(\lambda)/\rho_\lambda(\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_+)V(\lambda)$ прост.

Утверждение гипотезы означает следующее: существует не более одного минимального полумладшего вектора с заданной проекцией на $\mathfrak{t}^*$, и если $v_{-\lambda+\nu}$ – минимальный полумладший вектор, то выполняется равенство $V(\lambda)^-_{-\bar{\lambda}+\bar{\nu}} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})v_{-\lambda+\nu}$.

Строение алгебры $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Алгебра $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$ есть алгебра многочленов $\mathbb{C}[F_1, \dots, F_d]$. При этом $d=1$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, $d=n$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$, $d=n-1$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$. Более того,

- 1) в случаях $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{so}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n}$ можно выбрать порождающие $F_1, \dots, F_d$ так, что они имеют вес ω относительно максимального тора $\mathfrak{t}$;
- 2) в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ можно выбрать порождающие $F_1, \dots, F_n$ так, что многочлен F_1 имеет вес ω , а многочлены $F_2, \dots, F_n$ – вес 2ω относительно $\mathfrak{t}$.

Обозначим через $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$ линейную оболочку элементов из $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$, имеющих вес $p\omega$ относительно $\mathfrak{t}$. Подпространства $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$, $p = 0, 1, 2, \dots$, задают $\mathbb{Z}$ -градуировку на $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})$. Положим $\langle \lambda, \alpha_i \rangle = 2(\lambda, \alpha_i) / (\alpha_i, \alpha_i)$. В данной работе мы докажем следующий асимптотический вариант сформулированной выше гипотезы.

ТЕОРЕМА 2. Для любого минимального полумладшего веса ν и фиксированного целого p существуют такие числа $K_1(\nu), \dots, K_n(\nu)$, что для всех λ таких, что $\langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq K_i(\nu)$, выполняются следующие два условия:

- 1) $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \nu - \lambda + \nu = V(\lambda)_{-\lambda + \nu + p\omega}^-$;
- 2) $\dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \nu - \lambda + \nu = \dim V(\lambda)_{-\lambda + \nu + p\omega}^- = \dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$.

Нам потребуются две леммы, которые мы приведем без доказательства.

Обозначим через $J(\lambda) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ стабилизатор вектора $\nu - \lambda$ в $V(\lambda)$. Известно, что $J(\lambda) = I(\lambda) \oplus N(\lambda)$, где $I(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_- + \sum_{h \in \mathfrak{t}} \mathfrak{U}(\mathfrak{b}_+)(h + \lambda(h)) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ и $N(\lambda) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+) -$ левый идеал, порожденный элементами $e_{\alpha_i}^{a_i+1}$, где $a_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$ (см. [2]).

ЛЕММА 1. 1) Для любого веса λ и любого p верно равенство $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \cap I(\lambda) = 0$.

2) Для любого фиксированного веса $\mu \in \mathfrak{t}^*$ существуют такие числа $K_1(\mu), \dots, K_n(\mu)$, что для всех λ таких, что $\langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq K_i(\mu)$, и всех η таких, что вес $\mu - \eta$ является суммой простых корней с целыми коэффициентами, выполняется равенство $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+)_{\mu} \cap J(\lambda) = 0$.

ЛЕММА 2. 1) для любого веса $\lambda \in \mathcal{L}(\bar{\nu})$, $\bar{\nu} \in \bar{\mathfrak{t}}^*$, имеет место неравенство $\dim V(\lambda)_{-\lambda + \nu(\lambda) + p\omega}^- \leq \dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$; 2) вес $\nu(\lambda)$ не зависит от $\lambda \in \mathcal{L}(\bar{\nu})$, $\bar{\nu} \in \bar{\mathfrak{t}}^*$.

Из работ [3]–[5] можно явным образом получить число полумладших векторов фиксированного веса и убедиться, что оно удовлетворяет условию 1) леммы 2. Также из результатов [3]–[5] следует, что минимальный вес не зависит от λ .

КРАТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем минимальный полумладший вес ν и вес $p\omega$, обозначим $\mu = \nu + p\omega$. Положим $K_i(\nu) = K_i(\mu)$, где $K_i(\mu)$ – числа из леммы 1 для веса μ . Пусть $V(\lambda)$ – неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль и $\langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq K_i(\nu)$. Тогда $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+)_{p\omega} \cap N(\lambda) = 0$ и, следовательно, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \cap J(\lambda) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \cap I(\lambda) = 0$ (лемма 1).

Пусть $c \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$, $c \neq 0$ и $\nu - \lambda + \nu = u_\nu \nu - \lambda$ – минимальный полумладший вектор, $u_\nu \in \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+)_{\nu}$. Имеем $c u_\nu \nu - \lambda = u_\nu c \nu - \lambda$, и выполнено $c \nu - \lambda = u_0 \nu - \lambda \neq 0$ для некоторого $u_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+)_{p\omega}$. Так как $u_\nu u_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+)_{\mu}$, то $u_\nu u_0 \nu - \lambda \neq 0$ (лемма 1) и, следовательно, $c \nu - \lambda + \nu \neq 0$. Таким образом, $\dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \nu - \lambda + \nu = \dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$. Из леммы 2 следует, что $V(\lambda)_{-\lambda + \nu + p\omega}^- \leq \dim \mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega}$. Поскольку $\mathfrak{Z}(\mathfrak{h})_{p\omega} \nu - \lambda + \nu \subset V(\lambda)_{-\lambda + \nu + p\omega}^-$ и размерность левой части не меньше размерности правой, то включение превращается в равенство.

Список литературы

- [1] А. А. Зорин, “О коммутативности централизатора подалгебры в универсальной обертывающей алгебре”, *Функц. анализ и его прил.* (в печати). [2] Ж. Диксмье, *Универсальные обертывающие алгебры*, Мир, М., 1978. [3] В. В. Штепин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57:6** (1993), 176–198. [4] В. В. Штепин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62:3** (1998), 201–223. [5] В. В. Штепин, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68:2** (2004), 159–190.

А. А. Зорин (А. А. Zorin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: aa-zorin@yandex.ru

Представлено Э. Б. Винбергом

Принято редколлегией

04.10.2008