Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Мещеряков, Универсальные операторы Данкла,
УМН, 2009, том 64, выпуск 1, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:29:18

Универсальные операторы Данкла

В. В. Мещеряков

1. Введение. Классические операторы Данкла рационального типа, ассоциированные с системой корней R , определяются следующей формулой [1]: $T_\xi = \partial_\xi - \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha | \xi) \frac{s_\alpha}{(x | \alpha)}$, где ξ – вектор пространства V , которое порождается системой корней R ; ∂_ξ – дифференцирование в направлении ξ ; R_+ – подсистема положительных корней; k_α – целые числа, зависящие от длины вектора α ; $(\cdot | \cdot)$ – скалярное произведение в V ; s_α – отражение в V относительно гиперплоскости, ортогональной к α . На функциях f отражение s_α действует по формуле $(s_\alpha f)(x) = f(s_\alpha x)$.

В работе [2] приводятся обобщения операторов Данкла. Там же установлены свойства, которые являются полными аналогами классических на так называемых многообразиях Бете и Данкла (подробнее см. п. 2).

Целью статьи является описание многообразий Бете и Данкла.

2. Многообразие Бете и Данкла. Для каждой приведенной неприводимой системы корней существует единственная инвариантная невырожденная симметрическая билинейная форма $F_R(x, y)$ на V [3], удовлетворяющая условию $F_R(x, y) = \sum_{\alpha \in R_+} F_R(x, \alpha) F_R(\alpha, y)$.

Рассмотрим комплексное пространство $\mathbb{C}^N$, $N = \#R_+$. В $\mathbb{C}^N$ можно ввести координаты $u = \{u_{s_\alpha}, \alpha \in R_+\}$.

Действие группы Кокстера $W(R)$ на пространстве комплекснозначных функций на $\mathbb{C}^N$ определим формулой $wf(u_{s_\alpha}) = f(\varepsilon_w(\alpha)u_{ws_\alpha w^{-1}})$, где $\varepsilon_w(\alpha) = 1$, если $w\alpha \in R_+$, и $\varepsilon_w(\alpha) = -1$ в противном случае.

Рассмотрим оператор $D_\gamma = \sum_{\alpha \in R_+} F_R(\gamma, \alpha) \frac{\partial}{\partial u_{s_\alpha}}$ и для всех $\gamma \in R_+$ определим “универсальные” операторы Данкла $\nabla_\gamma = -D_\gamma + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{F_R(\gamma, \alpha) k_\alpha}{u_{s_\alpha}} s_\alpha$ и “универсальный”

гамильтониан типа Калоджеро $H_C = -\hat{\Delta} + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{F_R(\alpha, \alpha)(k_\alpha^2 - k_\alpha s_\alpha)}{u_{s_\alpha}^2}$, $\hat{\Delta} = \sum_{\gamma \in R_+} D_\gamma^2$.

Подмножество в $\mathbb{C}^N$, на котором операторы ∇_γ коммутируют, называется многообразием Данкла. В [2] показано, что многообразие Данкла определяется системой

$$\sum_{\alpha, \beta \in R_+ : s_\alpha s_\beta = w \neq 1} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\gamma, \alpha) F_R(\delta, \beta) - F_R(\gamma, \beta) F_R(\delta, \alpha)}{u_{s_\alpha} u_{s_\beta}} = 0, \quad w \in W(R).$$

Подмножество в $\mathbb{C}^N$, где сумма квадратов операторов ∇_γ совпадает с H_C , называется многообразием Бете. Оно определяется системой

$$\sum_{\alpha, \beta \in R_+ : s_\alpha s_\beta = w \neq 1} k_\alpha k_\beta \frac{F_R(\alpha, \beta)}{u_{s_\alpha} u_{s_\beta}} = 0, \quad w \in W(R).$$

3. Основные результаты. Далее будут использоваться обозначения работы [4].

ТЕОРЕМА 1. *Многообразия Бете и Данкла совпадают.*

Поэтому многообразия Бете и Данкла назовем многообразием Бете–Данкла.

Из результатов в [4] и теоремы 1 вытекают следующие утверждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00085).

ТЕОРЕМА 2. Многообразие Бете–Данкла, ассоциированное с системой корней типа A_{n-1} , есть плоскость $u_{1j} - u_{1k} + u_{jk} = 0$, $1 < j < k \leq n$, размерности $n-1$ в пространстве $\mathbb{C}^{n(n-1)/2}$ с исключенными координатными гиперплоскостями $u_{ij} = 0$, где $1 \leq i < j \leq n$.

ТЕОРЕМА 3. Многообразие Бете–Данкла, ассоциированное с системой корней типа D_n , есть n -мерная плоскость, определяемая системой уравнений

$$\begin{cases} u_{ij} - v_{i,j+1} + v_{j,j+1} = 0, & 1 \leq i < j < n, \\ u_{in} - v_{i,n-1} + v_{n-1,n} = 0, & 1 \leq i < n-1, \\ u_{n-1,n} - v_{n-2,n-1} + v_{n-2,n} = 0, \\ v_{i,i+1} - v_{i,i+2} - v_{i+1,i+3} + v_{i+2,i+3} = 0, & 1 \leq i < n-2, \\ v_{ij} - v_{i,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i+1,j+1} = 0, & 1 \leq i < j-1, \quad j < n, \end{cases} \quad (1)$$

на множестве $\tilde{X}_D = \mathbb{C}^{n(n-1)} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} = 0, v_{ij} = 0\}$.

ТЕОРЕМА 4. Многообразие Бете–Данкла, ассоциированное с системой корней типа B_n , является поверхностью размерности $n+1$ во множестве $\tilde{X}_{B_n} = \mathbb{C}^{n^2} \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{u_{ij} = 0, v_{ij} = 0, w_i = 0\}$ и определяется системой, являющейся объединением системы (1) и уравнений $u_{ij}(w_i + w_j) = v_{ij}(w_i - w_j)$, $1 \leq i < j \leq n$.

При $n = 2$ система состоит из одного уравнения $u_{12}(w_1 + w_2) = v_{12}(w_1 - w_2)$, которое задает многообразие Серге [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Многообразие Бете–Данкла, ассоциированное с системой корней типа B_2 , является многообразием Серге.

4. Примеры “универсальных” операторов Данкла.

СЛУЧАЙ А. На многообразии Бете–Данкла, ассоциированном с системой корней типа A_{n-1} , положим $u_{ij} = x_i - x_j$, $1 \leq i \leq j \leq n$. В новых координатах операторы ∇_γ будут иметь вид $\nabla_\gamma = -\partial_\gamma + \sum_{i < j} \frac{k_{\alpha_{ij}}}{n} (\gamma | \alpha_{ij}) \frac{s_{\alpha_{ij}}}{x_i - x_j}$.

СЛУЧАЙ Д. Для системы корней типа D_n на многообразии Бете–Данкла можно ввести координаты $u_{ij} = x_i - x_j$, $v_{ij} = x_i + x_j$, $1 \leq i < j \leq n$, в которых

$$\nabla_\gamma = -\partial_\gamma + \sum_{i < j} \frac{k_{\alpha_{ij}}}{2(n-1)} (\gamma | \alpha_{ij}) \frac{s_{\alpha_{ij}}}{x_i - x_j} + \sum_{i < j} \frac{k_{\beta_{ij}}}{2(n-1)} (\gamma | \beta_{ij}) \frac{s_{\beta_{ij}}}{x_i + x_j}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Ограничения “универсальных” операторов Данкла, ассоциированных с системой корней типа A_{n-1} или D_n , на многообразие Бете–Данкла совпадают с рациональными операторами Данкла.

СЛУЧАЙ В. Для системы корней типа B_n классические операторы получаются при ограничении на некоторое линейное подмножество.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Ограничения операторов Данкла ∇_γ , ассоциированных с системой корней типа B_n на плоскость $u_{ij} = w_i - w_j$, $v_{ij} = w_i + w_j$, $1 \leq i \leq n$, совпадают с рациональными операторами Данкла.

Список литературы

- [1] C. F. Dunkl, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311**:1 (1989), 167–183. [2] V. Golubeva, V. Leksin, *J. Math. Sci. (New York)*, **98**:3 (2000), 291–318. [3] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Элементы математики*, Мир, М., 1972. [4] В. В. Мещеряков, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 709–717. [5] Дж. Харрис, *Алгебраическая геометрия*, МЦНМО, М., 2006.

В. В. Мещеряков (V. V. Meshcheryakov)
Коломенский государственный педагогический институт
E-mail: meshcheryakov@mail.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
15.10.2008