Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Звягин, А. В. Кузнецов, О плотности множества правых частей начально-краевой задачи модели Джеффриса с объективной производной Яуманна, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 04:15:55

О плотности множества правых частей начально-краевой задачи модели Джеффриса с объективной производной Яуманна

В. Г. Звягин, А. В. Кузнецов

Рассматривается следующая начально-краевая задача, описывающая движение вязкоупругих сред типа жидких растворов полимеров, битумов, бетона, земной коры (модель Джеффриса с объективной производной Яуманна):

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu_1 \Delta v + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \tau = f, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial \tau}{\partial x_j} + \tau W(v) - W(v) \tau + \frac{1}{\mu_2} \tau = 2\mu_3 \mathcal{E}(v), \quad (2)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \quad v|_{[0, T] \times \partial \Omega} = 0, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = v_0, \quad \tau|_{t=0} = \tau_0, \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ , $n = 2, 3$, $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$, $v(t, x) = (v^1(t, x), \dots, v^n(t, x))$ – поле скоростей, $p(t, x)$ – давление среды, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$ – тензор скоростей деформации, $W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$ – тензор завихренности, $\tau = (\tau_{ij})_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n} = \sigma - 2\mu_1 \mathcal{E}(v)$ – упругая компонента тензора напряжений σ , $\operatorname{Div} \tau$ – вектор с координатами $(\operatorname{Div} \tau)_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}$, μ_1, μ_2, μ_3 –

некоторые положительные константы, имеющие физический смысл, f – плотность внешних сил, действующих на среду. Плотность среды считается равной единице.

Опишем используемые функциональные пространства и операторы. Пусть H – замыкание пространства $\mathcal{V} = \{u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} u = 0\}$ в пространстве $L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ и $P: L_2(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow H$ – проектор Лере. Известно (см., например, [1]), что оператор $-P\Delta: H^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow H$, где Δ – оператор Лапласа, продолжается до замкнутого самосопряженного положительно определенного оператора в H , который будем обозначать через A и собственные функции $\{e_j(x)\}_{j=1}^\infty$ которого образуют ортонормированный базис в H . Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ – собственные значения оператора A , т.е. $Ae_j = \lambda_j e_j$, $j \in \mathbb{N}$. Обозначим $E_\infty = \left\{v : v = \sum_{j=1}^m v_j e_j, v_j \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}\right\}$.

Определим норму $\|\cdot\|_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, равенством $\|v\|_\alpha = \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^\alpha |v_j|^2\right)^{1/2}$. Следуя [1],

обозначим символом V^α , $\alpha \in \mathbb{R}$, пространство, являющееся пополнением E_∞ по норме $\|\cdot\|_\alpha$. Отметим, что $V^0 = H$. Пусть $M_s(n)$ – пространство симметричных матриц порядка n и $\mathcal{H}^\alpha = H^\alpha(\Omega, M_s(n))$ – соболевское пространство функций со значениями в $M_s(n)$. Положим $X = \{u \in L_2(0, T; V^3) : u' \in L_2(0, T; V^{-3})\}$ и обозначим через F множество правых частей $f \in L_2(0, T; H)$ задачи (1)–(4), для которых существует решение $(v, \tau) \in X \times C([0, T]; \mathcal{H}^2)$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ. Пусть $v_0 \in V^3$, $\tau_0 \in \mathcal{H}^2$. Тогда $F \subset L_2(0, T; H)$ всюду плотно относительно топологии пространства $L_p(0, T; V^{-l})$, где l и p удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $l \geq 6$, $p = \infty$;
- 2) $6 > l \geq 3$, $p = 2$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. В лемме 2.3 работы [2] показано, что для любого $v \in L_1(0, T; V^3)$ существует и единственно решение $\tau = M(v) \in C([0, T]; \mathcal{H}^2)$ задачи (2) с начальным условием $\tau|_{t=0} = \tau_0$. Нам необходимо представление τ через v . Для его получения перепишем (2) в эквивалентной интегральной форме:

$$\tau(t, x) = e^{-t/\mu_2} \tau_0(z(0, t; x)) + \int_0^t e^{(s-t)/\mu_2} (2\mu_3 \mathcal{E}(v) - \tau W(v) + W(v)\tau)(s, z(s, t; x)) ds, \quad (5)$$

где $z(s, t; x) = x + \int_t^s v(\xi, z(\xi, t; x)) d\xi$. Далее, положим $C_D^1(\bar{\Omega}) = \left\{ z: \bar{\Omega} \leftrightarrow \bar{\Omega} : z|_{\partial\Omega} = I, z \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n), \forall (x \in \Omega) \det \left| \frac{\partial z}{\partial x}(x) \right| = 1 \right\}$. Обозначим $CG^1 = C([0, T] \times [0, T]; C_D^1(\bar{\Omega}))$ с естественной топологией. Тогда определен оператор $Z: X \rightarrow CG^1$, $Z(v)(s, t; x) = z(s, t; x)$, являющийся вполне непрерывным. Обозначим через $Q: X \times CG^1 \rightarrow L_2(0, T; \mathcal{H}^1)$ оператор, определяемый соответствием $(v, z) \mapsto \theta$, где θ – решение уравнения (5). Отметим, что оператор M допускает диагональное представление $M(v) = Q(v, Z(v))$.

Рассмотрим следующее δ -возмущение (с помощью оператора δA^3), $\delta > 0$, операторного уравнения, соответствующего задаче (1)–(4):

$$L_\delta v + K(v) + G(v) - (f, v_0) = 0, \quad (6)$$

где операторы $L_\delta, K, G: X \rightarrow L_2(0, T; V^{-3}) \times V^0$ определяются равенствами: $L_\delta v = (v' + \mu_1 A v + \delta A^3 v, v|_{t=0})$, $K(v) = \left(P \sum_{j=1}^n v^j \frac{\partial v}{\partial x_j}, 0 \right)$, $G(v) = (-P \operatorname{Div} Q(v, Z(v)), 0)$.

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для всех решений $v \in X$ уравнения (6) при $\delta \geq 0$ имеет место априорная оценка:

$$\|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 + \mu_1 \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 + 2\delta \|v\|_{L_2(0, T; V^3)}^2 \leq \frac{2}{\mu_1} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + 2\|v_0\|_0^2. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 2. Уравнение (6) имеет решение в X при любых $\delta > 0$.

Из теоремы 2, оценки (7) и того, что $\|\delta A^3 v\|_{L_\infty(0, T; V^{-6})} \leq \delta \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\|\delta A^3 v\|_{L_2(0, T; V^{-3})} = \sqrt{\delta} \|\sqrt{\delta} v\|_{L_2(0, T; V^3)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, следует основной результат работы.

Соответствующий результат для системы Навье–Стокса см. в [1].

Список литературы

- [1] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределительными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999; англ. пер.: A. V. Fursikov, *Optimal control of distributed systems. Theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **187**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000. [2] C. Guillopé, J.-C. Saut, *Nonlinear Anal.*, **15**:9 (1990), 849–869.

В. Г. Звягин (V. G. Zvyagin)
Воронежский государственный университет
E-mail: zvg@main.vsu.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
05.10.2008

А. В. Кузнецов (A. V. Kuznetsov)
Воронежский государственный университет
E-mail: kuznetsov@math.vsu.ru