Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Б. Воробец, Плоские структуры и бильярды в рациональных многоугольниках, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 145–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm925>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 09:26:20

ПЛОСКИЕ СТРУКТУРЫ И БИЛЬЯРДЫ В РАЦИОНАЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

Я. Б. ВОРОВЕЦ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Плоская структура* на компактной и связной ориентируемой поверхности M – это атлас ω , состоящий из карт вида (U, f) , где U – область M , f – гомеоморфизм U на область в $\mathbb{R}^2$. При этом должны выполняться следующие условия: (i) области U покрывают всю поверхность M кроме конечного числа точек $x_1, \dots, x_k$, называемых особыми; (ii) все функции замены координат являются сдвигами в $\mathbb{R}^2$; (iii) атлас ω максимален по отношению к условиям (i), (ii); (iv) для каждой особой точки x_i существует проколота окрестность $\dot{U}_i$ и отображение f_i этой окрестности на проколотую окрестность $\dot{V}$ точки в $\mathbb{R}^2$, являющееся сдвигом в локальных координатах из атласа ω , и такое, что у каждой точки из $\dot{V}$ есть ровно m_i прообразов.

Эквивалентно, ω – это риманова метрика нулевой кривизны на $M \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, имеющая в точке x_i коническую особенность с углом $2\pi m_i$. Плоские структуры возникают, например, при рассмотрении бильярдов в рациональных многоугольниках. Именно, конструкция Землякова и Катка [1] сводит такой бильярд к геодезическому потоку на некоторой поверхности с плоской структурой.

В настоящей работе рассматриваются плоские структуры, геодезический поток для которых повторяет свойства геодезического потока на торе $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, где каждая траектория либо периодична, либо равномерно распределена. Важнейшим результатом здесь является приводимая ниже теорема 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Плоская структура ω_1 на поверхности M_1 называется *изоморфной* $\omega = \{(U, f)\}$, если $\omega_1 = \{(f_1^{-1}(U), f \circ f_1)\}$ для некоторого гомеоморфизма $f_1: M_1 \rightarrow M$. *Стабилизатором* $\Gamma(\omega)$ плоской структуры ω называется группа тех элементов $a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, для которых плоская структура $a\omega = \{(U, a \circ f)\}$ изоморфна ω .

Седлосвязка плоской структуры ω – это геодезический отрезок, соединяющий две особые точки и не содержащий особых точек внутри себя. Длину кратчайшей седлосвязки обозначим через $m(\omega)$.

ТЕОРЕМА 1 (альтернатива Вича). Пусть стабилизатор $\Gamma(\omega)$ – решетка в $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Тогда поток на поверхности в произвольном направлении $\vec{v}$ либо имеет только периодические компоненты, либо строго эргодичен. Первая возможность реализуется в том и лишь в том случае, когда $a\vec{v} = \vec{v}$ для некоторого $a \in \Gamma(\omega)$, $a \neq 1$, а также в том и лишь в том случае, когда найдется седлосвязка, параллельная $\vec{v}$.

А. М. Стёпин предложил автору найти доказательство теоремы 1, в отличие от первоначального (см. [2]) не использующее понятий теории Тейхмюллера. Для этого понадобилось дать новое доказательство следующего утверждения (его формулировка отлична от оригинальной, но эквивалентна ей).

ЛЕММА 1 (Мазур [3]). Пусть плоская структура ω такова, что $m(g^t\omega) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, где $g^t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$. Тогда поток в вертикальном направлении строго эргодичен.

Поток в вертикальном направлении можно представить в виде специального потока над перекладыванием T , где концы перекладываемых интервалов соответствуют особым траекториям. Поток и перекладывание одновременно строго эргодичны или нет. Обозначим через $\varepsilon_n(T)$ наименьшую из длин отрезков, перекладываемых перекладыванием T^n .

ТЕОРЕМА 2 (Вич [4]). Если $n\varepsilon_n(T) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и перекладывание T минимально, то оно строго эргодично.

Лемма 1 теперь вытекает из следующего утверждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № M1E000).

ЛЕММА 2. Если плоская структура ω удовлетворяет условиям леммы 1, то перекладывание T удовлетворяет условиям теоремы 2.

Следующие далее теоремы 3 и 4 обобщают и дополняют теорему 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть ω – плоская структура на поверхности M . ω -треугольником называется треугольник на M , у которого вершины – особые точки, стороны – седлосвязки, и внутри которого особых точек нет.

Плоская структура ω обладает свойством А, если площадь каждого ω -треугольника больше некоторой положительной постоянной. ω обладает свойством В, если, более того, эта площадь принимает конечное число значений.

ТЕОРЕМА 3. Плоская структура, обладающая свойством А, удовлетворяет альтернативе Вича.

ТЕОРЕМА 4. Плоская структура обладает свойством В в том и лишь в том случае, когда ее стабилизатор – решетка.

При доказательстве теоремы 4 используется следующий критерий.

ЛЕММА 3. Дискретная подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ является решеткой в том и лишь в том случае, когда можно выбрать конечное число ненулевых векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ таким образом, что множество $S = \Gamma \vec{v}_1 \cup \dots \cup \Gamma \vec{v}_k$ дискретно и для любого $a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ найдется вектор $\vec{v} \in S$ такой, что $|a\vec{v}| \leq C$, где C – не зависящая от a постоянная.

Примеры плоских структур, удовлетворяющих альтернативе Вича, возникают при рассмотрении бильярда в треугольниках с углами $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\pi}{m}$ и $\pi - \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{m}$, где n, m – целые. Соответствующую плоскую структуру обозначим через $\omega_{n,m}$.

ТЕОРЕМА 5. Плоские структуры $\omega_{2,n}$, $\omega_{n,n}$ ($n \geq 3$), $\omega_{n,2n}$ ($n \geq 2$), $\omega_{3,4}$, $\omega_{3,5}$ имеют стабилизатор-решетку.

Исходя из этих примеров (первые два из них приведены в [2]), можно строить более сложные, пользуясь конструкцией накрытия. Накрытием плоских структур ω_1 и ω_2 , заданных на поверхностях M_1 и M_2 , называется отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$, которое переводит особые точки в особые и является сдвигом в локальных координатах из ω_1 и ω_2 .

ТЕОРЕМА 6. Пусть плоская структура ω_1 покрывает плоскую структуру ω_2 . Тогда $\Gamma(\omega_1) \cap \Gamma(\omega_2)$ – подгруппа конечного индекса в каждой из групп $\Gamma(\omega_1)$ и $\Gamma(\omega_2)$. В частности, $\Gamma(\omega_1)$ и $\Gamma(\omega_2)$ одновременно являются или не являются решетками.

В качестве следствия отсюда получаем, что стабилизатор-решетку имеют плоские структуры, соответствующие правильным многоугольникам.

Плоские структуры со стабилизатором-решеткой допускают полное описание периодических траекторий. Это описание позволяет доказать, например, следующую теорему, обобщающую ряд результатов из [5]. Напомним, что периодическая бильярдная траектория в многоугольнике Q называется устойчивой, если многоугольник, полученный из Q малым шевелением сторон, содержит периодическую бильярдную траекторию, близкую к исходной.

ТЕОРЕМА 7. В прямоугольном треугольнике с острым углом $\pi/(2n)$ ($n \geq 2$) все периодические бильярдные траектории неустойчивы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Земляков А. Н., Каток А. Б. // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №2. С. 291–300.
 [2] Veech W. A. // Invent. Math. 1989. V. 97. №4. P. 553–583. [3] Masur H. // Duke Math. J. 1992. V. 66. №3. P. 387–442. [4] Veech W. A. // Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1987. V. 7. №1. P. 149–153. [5] Воробец Я. Б., Гальперин Г. А., Стёпин А. М. // УМН. 1992. Т. 48. №3. С. 9–74.

Принято редколлегией
01.11.1995