Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Г. Синай, Предельная теорема для тригонометрических сумм. Теория завитков, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 31–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:28:11

УДК 517.987.5

С. П. Новикову по случаю его 70-летия

Предельная теорема для тригонометрических сумм. Теория завитков

Я. Г. Синай

В настоящей статье мы обсуждаем поведение тригонометрических сумм $\sum \exp\{2\pi a n^2\}$ и их предельного распределения как функции от N . Анализ основан на применении метода ренормгруппы.

Библиография: 19 названий.

Текст этой заметки в значительной степени воспроизводит мой доклад на конференции, посвященной 70-летию С. П. Новикова. Я желаю Сергею Петровичу крепкого здоровья, энергии и новых замечательных результатов.

Новиков учился в группе, в которой лет 50 тому назад я преподавал теорию вероятностей. Тогда он был поглощен актуальными топологическими задачами и мы практически не встречались. Мне хотелось бы использовать возможность, предоставленную настоящей конференцией, и продемонстрировать Сергею Петровичу, что в теории вероятностей тоже есть красивые задачи и глубокие содержательные результаты.

Я признателен аспиранту Принстонского университета Ф. Челларози за многочисленные обсуждения и за помощь в подготовке текста к публикации.

Для фиксированных $a \in (-1, 1] \setminus \{0\}$ и $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим тригонометрическую сумму

$$\mathcal{S}_a(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{i\pi a n^2\}.$$

Тогда

$$\mathcal{S}_{-a}(N) = \overline{\mathcal{S}_a(N)} \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 |\mathcal{S}_a(N)|^2 da = N.$$

Мы изучим поведение $\mathcal{S}_a(N)$ как функции N для типичных значений a . Этот вопрос обсуждался во многих работах, в частности, Харди и Литтлвудом [1], Г. Вейлем [2], ван дер Корпутом [3], Морделлом [4], Уильтоном [5] и многими другими. Среди относительно недавних работ можно упомянуть Куциса и Казариноффа [6], [7], Берри и Гольдберга [8], Марклофа [9], [10], а также Федотова и Клоппа [11]. Работа [8] была, по-видимому, первой, в которой подробно исследовалась зависимость от N . Тот, кто знаком с теорией вероятностей, мог бы ожидать появления кривых, напоминающих двумерное броуновское

Рис. 1. Две кривые, порожденные тригонометрическими суммами

движение – самый устойчивый и широко распространенный тип предельных случайных кривых. Однако численный анализ показывает, что наблюдаемые кривые имеют очевидную масштабно-инвариантную структуру, мало похожую на броуновское движение. Рис. 1 дает представление о виде $\{\mathcal{S}_a(n)\}_{n=1}^N$ для $a = 0.0711451$ и $N = 10\,000$ (слева), а также для $a = 0.535908$ и $N = 5\,000$ (справа). Мы видим, что $\{\mathcal{S}_a(n)\}_{n=1}^N$ состоит из спиралевидных компонент разного масштаба, соединенных регулярными участками. Такие спирали называются *завитками*, и задача теории состоит в обсуждении их вида и свойств.

Возьмем точки $\mathcal{S}_a(n-1)$, $\mathcal{S}_a(n)$, $\mathcal{S}_a(n+1)$ и обозначим через $\rho_a(n)$ радиус окружности, проходящей через них. Назовем $\rho_a(n)$ *локальным дискретным радиусом кривизны*. Легко проверяется, что

$$\rho_a(n) = \frac{1}{2} \left| \operatorname{cosec} \frac{\pi a(2n-1)}{2} \right|.$$

Функция $f(t) = |\operatorname{cosec} t|$ периодическая с периодом π , следовательно,

$$\rho_a(\nu) = \frac{1}{2} \left| \operatorname{cosec} \frac{\pi a(2\nu-1)}{2} \right|$$

является $1/a$ -периодической функцией. Ее локальные экстремумы расположены в точках $(2k+1)/(2a) + 1/2$, и она имеет вертикальные асимптоты при $k/a + 1/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Локальный дискретный радиус кривизны получается как значения ρ_a в целых числах.

Для малых a на каждом периоде лежит порядка $1/|a|$ целых точек и структуру с завитками легко объяснить: тем n , для которых $\rho_a(n)$ велико, соответствуют почти прямые участки $\{\mathcal{S}_a(n)\}_{n=1}^N$, а точки, близкие к минимумам ρ_a , дают спиралевидные участки. При $a \sim 1$ завитки пропадают. Однако мы продемонстрируем, как такие завитки возникают в других масштабах.

Главный шаг всей теории основан на приближенном “ренормгрупповом” уравнении

$$\mathcal{S}_a(N) \sim \exp\left\{\frac{\pi}{4}i\right\} |a|^{-1/2} \mathcal{S}_{a_1}(N_1),$$

где $a_1 \equiv -1/a \pmod{2}$ и $N_1 = \lfloor |a|N \rfloor$. Точнее,

$$\left| \mathcal{S}_a(N) - \exp\left\{\frac{\pi}{4}i\right\} |a|^{-1/2} \mathcal{S}_{a_1}(N_1) \right| \leq C_1 |a|^{-1/2} + C_2 \quad (1)$$

с абсолютными константами C_1, C_2 , не зависящими от N . Вывод оценки (1) опирается на формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{-\infty < n < \infty} g(n) = \sum_{-\infty < m < \infty} \hat{g}(m),$$

где

$$\hat{g}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2\pi imx\} g(x) dx.$$

В нашем случае эта формула дает

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a(N) &= \sum_{n=0}^{N-1} \exp\{\pi i a n^2\} = \sum_{-\infty < n < \infty} \exp\{\pi i a n^2\} \chi_{[0, N-1]}(n) \\ &= \sum_{-\infty < m < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2\pi imx\} \exp\{\pi i a x^2\} \chi_{[0, N-1]}(x) dx \\ &= \sum_{-\infty < m < \infty} \int_0^{N-1} \exp\{\pi i [a x^2 - 2mx]\} dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Для оценки правой части (2) мы используем асимптотический метод Лапласа (метод стационарной фазы). Основной вклад в (2) вносят интегралы по малым окрестностям критических точек

$$\frac{d}{dx}(a x^2 - 2mx) = 0, \quad \text{т.е. } x_m = \frac{m}{a}.$$

Легко показать, что достаточно рассмотреть критические точки с $0 \leq m < \lfloor |a|N \rfloor$: вклад остальных точек равномерно ограничен. Мы оставляем подробности читателю.

Мы используем отображение

$$U: (-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow (-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \text{где } U(t) = -\frac{1}{t} \pmod{2}.$$

График U приведен на рис. 2; он состоит из счетного числа гладких компонент. Каждый открыто-замкнутый интервал $O_k = (1/(2k+1), 1/(2k-1)]$ взаимно однозначно отображается на $(-1, 1]$ по формуле $t \mapsto -1/t + 2k$. Пусть

$$B(k, -1) = \left(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right], \quad B(k, +1) = \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Рис. 2. График отображения U

Для $\alpha = \alpha_0$ из $B(k, \xi)$, $\alpha_j = T^j \alpha_0$, $\eta_{j+1} = \eta(\alpha_j)$ мы имеем $N_{j+1} = \lfloor \alpha_j N_j \rfloor$ и ренормгрупповую формулу

$$\mathcal{S}_\alpha^{(\eta)}(N) = \begin{cases} \mathcal{S}_\alpha(N) & \text{при } \eta = +1, \\ \overline{\mathcal{S}_\alpha(N)} & \text{при } \eta = -1. \end{cases}$$

Нам потребуется также отображение T , задаваемое формулой

$$T\alpha = \xi \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 2k \right) \quad \text{при } \alpha \in B(k, \xi), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \xi \in \{\pm 1\}.$$

Теперь мы можем записать ренормгрупповую формулу (1) следующим образом:

$$\mathcal{S}_{\alpha_0}(N) = \exp\left\{ \frac{\pi}{4} i \right\} \alpha_0^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha_1}^{(\eta_1)}(N_1) + \Lambda(\alpha_0, N),$$

где $\alpha_1 = T\alpha_0$, $\eta_1 = \eta(\alpha_0)$ и $|\Lambda(\alpha_0, N)| \leq C_1 \alpha_0^{-1/2} + C_2$. Полагая

$$\kappa(\alpha, s) = 1 + \eta_1 + \eta_1 \eta_2 + \cdots + \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_{s-1}$$

и

$$\tilde{\Lambda}(\alpha_j, N_j) = \exp\left\{ \kappa(\alpha, j) \frac{\pi}{4} i \right\} \cdot \Lambda^{(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_j)}(\alpha_j, N_j),$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\alpha_0}(N) &= \tilde{\Lambda}(\alpha_0, N) + \alpha_0^{-1/2} \tilde{\Lambda}(\alpha_1, N_1) + (\alpha_0 \alpha_1)^{-1/2} \tilde{\Lambda}(\alpha_2, N_2) + \dots \\ &\quad + (\alpha_0 \dots \alpha_{j-1})^{-1/2} \tilde{\Lambda}(\alpha_j, N_j) + \dots \\ &\quad + (\alpha_0 \dots \alpha_{r-2})^{-1/2} \tilde{\Lambda}(\alpha_{r-1}, N_{r-1}) \\ &\quad + \exp \left\{ \kappa(\alpha, r) \frac{\pi}{4} i \right\} (\alpha_0 \dots \alpha_{r-1})^{-1/2} \mathcal{S}_{\alpha_r}^{(\eta_1 \dots \eta_r)}(N_r). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь возникает важный вопрос о выборе r . Это имеет отношение к так называемым задачам *типа восстановления* в эргодической теории. В теории вероятностей задачи типа восстановления возникают следующим образом. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ – последовательность таких независимых одинаково распределенных случайных величин, что $\gamma_j \geq 0$, $E\gamma_j < \infty$. Выберем параметр R (который будет впоследствии стремиться к бесконечности) и рассмотрим случайную величину n , равную первому моменту, когда выполняется неравенство

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n > R.$$

Основной результат теории восстановления говорит, что разность

$$\gamma_1 + \dots + \gamma_n - R$$

имеет предельное распределение при $R \rightarrow \infty$. В некоторых случаях аналогичный результат выполняется, даже когда γ_j имеют симметричное распределение и $E|\gamma_j| = \infty$ (см. [12]). В совместной статье с К. Ульчирай (см. [13]) мы доказали существование предельного распределения при $R \rightarrow \infty$ для отношения $q_n(\alpha)/R$, где α имеет найденное Гауссом распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{(1+x) \log 2},$$

а $q_n(\alpha)$ – первый превосходящий R знаменатель подходящих дробей разложения α в непрерывную дробь. Этот результат также относится к теории восстановления.

Ф. Челларози [14] рассмотрел аналогичные вопросы для T . Ситуация здесь слегка отличается от обычных непрерывных дробей, потому что у T есть только σ -конечная эргодическая инвариантная мера μ из-за наличия нейтральной неподвижной точки $\alpha = 1$, и напоминает случай дробей Фарея и соответствующего отображения Фарея. (А именно, при $\alpha \in (1/(k+1), 1/k]$, $k > 1$, имеем $1/\alpha = k + \theta$, $0 \leq \theta < 1$, и полагаем $F(\alpha) = (1/\alpha - 1)^{-1}$. При $k = 1$ полагаем $F(\alpha) = 1/\alpha - 1$.) Отображение Фарея также обладает только σ -конечной инвариантной мерой, и логарифмы знаменателей соответствующих дробей растут как $n/\log n$. Вернемся к отображению T . Его орбиты связаны с так называемыми *четными непрерывными дробями* (Швайгер [15], [16], Крайкамп и Лопес [17])

$$\alpha = \frac{1}{2k_1 + \frac{\xi_1}{2k_2 + \frac{\xi_2}{2k_3 + \dots}}} = [(k_1, \xi_1), (k_2, \xi_2), \dots], \quad k_j \in \mathbb{N}, \quad \xi_j \in \{\pm 1\}.$$

Подходящие дроби для них имеют вид

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{2k_1 + \frac{\xi_1}{2k_2 + \frac{\xi_2}{2k_3 + \dots + \frac{\xi_{n-2}}{2k_{n-1} + \frac{\xi_{n-1}}{2k_n}}}}}$$

Они удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} p_n &= 2k_n p_{n-1} + \xi_{n-1} p_{n-2}, \\ q_n &= 2k_n q_{n-1} + \xi_{n-1} q_{n-2}, \end{aligned}$$

где $q_{-1} = p_0 = 0$, $p_{-1} = q_0 = \xi_0 = 1$. Среди свойств этих непрерывных дробей отметим одно:

$$(\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1})^{-1} = q_n \left(1 + \xi_n \alpha_n \frac{q_{n-1}}{q_n} \right).$$

Следующая теорема доказана Ф. Челларози.

ТЕОРЕМА. Пусть $n_R = n_R(\alpha) = \min\{n \in \mathbb{N} : q_n > R\}$. Тогда отношение q_{n_R}/R имеет предельное распределение при $R \rightarrow \infty$.

Вернемся к (3). Пусть r – момент, для которого впервые выполняется

$$(\alpha_0 \cdots \alpha_{r-1})^{-1/2} > \sqrt{N}.$$

Тогда величины N_r , $\mathcal{S}_{\alpha_r}^{(\eta_1 \cdots \eta_r)}(N_r)$ и $(\alpha_0 \cdots \alpha_{r-1})^{-1/2} N^{-1/2}$ являются $\mathcal{O}(1)$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{S}_{\alpha_0}(N)}{\sqrt{N}} &= \exp \left\{ \kappa(\alpha, r) \frac{\pi}{4} i \right\} \frac{(\alpha_0 \cdots \alpha_{r-1})^{-1/2}}{\sqrt{N}} \mathcal{S}_{\alpha_r}^{(\eta_1 \cdots \eta_r)}(N_r) \\ &\quad + \frac{(\alpha_0 \cdots \alpha_{r-2})^{-1/2}}{\sqrt{N}} \tilde{\Lambda}(\alpha_{r-1}, N_{r-1}) + \cdots \\ &\quad + \frac{(\alpha_0 \cdots \alpha_{r-j})^{-1/2}}{\sqrt{N}} \tilde{\Lambda}(\alpha_{r-j+1}, N_{r-j+1}) + \cdots \\ &\quad + \frac{\alpha_0^{-1/2}}{\sqrt{N}} \tilde{\Lambda}(\alpha_1, N_1) + \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\Lambda}(\alpha_0, N). \end{aligned} \quad (4)$$

Произведение $\alpha_{r-j+1} \tilde{\Lambda}(\alpha_{r-j+1}, N_{r-j+1})$ также есть $\mathcal{O}(1)$ в силу (1), а j -й член в (4) убывает как $\exp\{-(j/\log j)(1 + \mathcal{O}(1))\}$ с ростом j . Эта скорость убывания вытекает из следующего результата, также недавно доказанного Ф. Челларози (этот результат является следствием теории, изложенной Ааронсоном в его книге по эргодической теории преобразований с бесконечной инвариантной мерой [18]).

ТЕОРЕМА. Для всякой вероятностной меры P на $[0, 1]$, являющейся абсолютно непрерывной относительно μ , всякой $f \in L^1(\mu)$ и всякого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n(f)}{n/\log n} - \mu(f)\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $S_n(f)$ – эргодическая сумма $\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$.

Аналогичный результат доказан в статье Кампанино и Изоли [19] для некоторого класса перемежающихся отображений с двумя ветвями.

Взяв $f(\alpha) = -\log \alpha$, мы получаем сходимость по вероятности

$$-\frac{\log(\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1})}{n/\log n} \rightarrow \frac{\pi^2}{4} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Иными словами, в соответствующих эргодических теоремах имеет место сходимость по мере, а не с вероятностью 1, как в стандартном случае.

Формула (4) демонстрирует наличие завитков в различных масштабах и объясняет характер убывания этих масштабов.

Список литературы

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Some problems of diophantine approximation. II: The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ -functions”, *Acta Math.*, **37**:1 (1914), 193–239.
- [2] H. Weyl, “Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins”, *Math. Ann.*, **77**:3 (1916), 313–352; рус. пер.: “О равномерном распределении чисел по модулю один”, *Герман Вейль. Избр. труды. Матем. Теорет. физ.*, Классики науки, Наука, М., 1984, 58–93.
- [3] J. G. van der Corput, “Über Summen, die mit den elliptischen ϑ -Funktionen zusammenhängen”, *Math. Ann.*, **87**:1-2 (1922), 66–77.
- [4] L. J. Mordell, “The approximate functional formula for the theta function”, *J. London Math. Soc.*, **1** (1926), 68–72.
- [5] J. R. Wilton, “The approximate functional formula for the theta function”, *J. London Math. Soc.*, **2** (1927), 177–180.
- [6] E. A. Coutsias, N. D. Kazarinoff, “Disorder, renormalizability, theta functions and Cornu spirals”, *Phys. D*, **26**:1–3 (1987), 295–310.
- [7] E. A. Coutsias, N. D. Kazarinoff, “The approximate functional formula for the theta function and Diophantine Gauss sums”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:2 (1998), 615–641.
- [8] M. V. Berry, J. Goldberg, “Renormalisation of curlicues”, *Nonlinearity*, **1**:1 (1988), 1–26.
- [9] J. Marklof, “Limit theorems for theta sums”, *Duke Math. J.*, **97**:1 (1999), 127–153.
- [10] J. Marklof, “Theta sums, Eisenstein series, and the semiclassical dynamics of a precessing spin”, *Emerging applications of number theory* (Minneapolis, MN, 1996), IMA Vol. Math. Appl., **109**, Springer, New York, 1999, 405–450.
- [11] A. Fedotov, F. Klopp, “Renormalization of exponential sums and matrix cocycles”, *Séminaire: Équations aux Dérivées Partielles*. 2004–2005, Exp. XVI, École Polytech., Palaiseau, 2005, 12 pp.

- [12] Я. Г. Синай, “О распределении первой положительной суммы для последовательности независимых случайных величин”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **2**:1 (1957), 126–135; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “On the distribution of the first positive sum for a sequence of independent random variables”, *Theory Probab. Appl.*, **2**:1 (1957), 122–129.
- [13] Ya. G. Sinai, C. Ulcigrai, “Renewal-type limit theorem for the Gauss map and continued fractions”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **28**:2 (2008), 643–655.
- [14] F. Cellarosi, “Renewal-type limit theorem for continued fractions with even partial quotients”, *Ergodic Theory Dynam. Systems* (to appear); [arXiv: 0802.4459](https://arxiv.org/abs/0802.4459), 2008.
- [15] F. Schweiger, “Continued fractions with odd and even partial quotients”, *Arbeitsber. Math. Inst. Univ. Salzburg*, 1982, № 4, 59–70.
- [16] F. Schweiger, “On the approximation by continued fractions with odd and even partial quotients”, *Arbeitsber. Math. Inst. Univ. Salzburg*, 1984, № 1–2, 105–114.
- [17] C. Kraaikamp, A. Lopes, “The theta group and the continued fraction expansion with even partial quotients”, *Geom. Dedicata*, **59**:3 (1996), 293–333.
- [18] J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, Math. Surveys Monogr., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [19] M. Campanino, S. Isola, “Infinite invariant measures for non-uniformly expanding transformations of $[0, 1]$: weak law of large numbers with anomalous scaling”, *Forum Math.*, **8**:1 (1996), 71–92.

Я. Г. Синай (Ya. G. Sinai)

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН;

Принстонский университет, Принстон, США

E-mail: sinai@math.princeton.edu

Поступила в редакцию

15.08.2008