Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Неустраняемая особенность квазиконформного погружения, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:02:03

Неустраняемая особенность квазиконформного погружения

В. А. Зорич

Мы показываем, что в размерностях $n > 2$ изолированная особенность квазиконформного погружения риманова многообразия в другое риманово многообразие той же размерности n неустраняема, только если последнее имеет топологический тип $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ (хопфов тор) или $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где $\mathbb{T}^k$ – стандартный k -мерный тор. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть M^n и N^n – римановы многообразия размерности n , o – точка на M^n и $\dot{M}^n := M^n \setminus \{o\}$. Пусть $f: \dot{M}^n \rightarrow N^n$ – квазиконформное погружение. Если $n \geq 3$, то либо особенность o устранима (непосредственно или после пополнения N^n одной точкой), либо пространство N^n (при условии его связности) гомеоморфно одному из многообразий $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$, где $0 < k \leq n$, или (с добавлением случая $k = 0$) их фактору по свободному действию конечной группы.¹

Отметим сразу, что при любом $n \geq 2$ есть даже конформные накрытия указанных многообразий посредством $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{S}^n$ соответственно, имеющие неустраняемую изолированную особую точку. При $n = 2$ неустраняемость может появиться и при конформном погружении в $\mathbb{R}^2$ (см. например, $z \mapsto \exp(1/z)$). Если же $n \geq 3$, то, как показано в [1], [2], изолированная особенность квазиконформного погружения в односвязное многообразие всегда устранима. Это специфика многомерного случая. Теорема верна и при $n = 2$, если добавить в список $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{R}^2$. В двумерном случае все можно получить, пользуясь классической теоремой униформизации (см. [3]). Для доказательства сформулированной выше теоремы воспользуемся следующими утверждениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для квазиконформного погружения с изолированной особенностью одного риманова многообразия в другое риманово многообразие той же размерности $n \geq 3$ имеет место следующая альтернатива: либо отображение имеет предел (конечный или бесконечный) в изолированной особой точке, либо образ любой проколотой окрестности особой точки покрывает все многообразие образа.

Бесконечность предела здесь означает, что по мере приближения точки $x \in \dot{M}^n$ к особой точке $o \in M^n$ ее образ $f(x)$ окончательно покидает любую компактную часть многообразия N^n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если изолированная особая точка не является устранимой особенностью квазиконформного погружения, то при $n \geq 3$ отображение не имеет конечных асимптотических значений в этой особой точке.

Доказательства утверждений 1, 2 даны в работе [1] (там это теорема 2 и предложение 3 соответственно).

Итак, если мы имеем дело с неустраняемой особенностью, то (оставляя пока в стороне случай бесконечного предела) при $n \geq 3$ можно считать, что для любой проколотой окрестности $\dot{U} = U \setminus \{o\}$ точки $o \in M^n$ справедливо равенство $f(\dot{U}) = N^n$ и что любой росток локально обратного к f отображения продолжается вдоль любого пути на N^n , накрытие которого не выходит на границу ∂U окрестности U .

Окрестность $U \subset M^n$ выберем гомеоморфной стандартному n -мерному замкнутому диску (шару), так что ∂U – топологическая $(n - 1)$ -мерная сфера, которую мы будем также обозначать через $\mathbb{S}^{n-1}$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 08-01-00743а и НШ-3877.2008.1.

¹Теорему можно было бы сформулировать и более конкретно при наличии полных (для всех $n \geq 3$) сведений о топологической структуре указанных в ней факторов.

Возьмем точку $s \in (\mathbb{S}^{n-1} = \partial U)$ и сходящуюся к o последовательность точек s_m , $m = 1, 2, \dots$, таких, что $f(s_m) = f(s)$. В каждой точке s_m , следуя параметризации $f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$, построим свой экземпляр $\mathbb{S}_m^{n-1}$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ над $f(\mathbb{S}^{n-1})$.

Возможны два случая: 1) сферы $\mathbb{S}_m^{n-1}$ расположены “концентрично”, охватывая точку o ; 2) ни одна из сфер $\mathbb{S}_m^{n-1}$ не охватывает o .

Рассмотрим случай 1). Через точки s_m , $m = 1, 2, \dots$, трансверсально сферам $\mathbb{S}_m^{n-1}$ в точку o идет периодический путь, накрывающий один и тот же нестягиваемый одномерный цикл на N^n . Отображение f оказывается периодическим относительно действия этого элемента фундаментальной группы $\pi_1(N^n)$ на накрывающем пространстве. Значит, $N^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$ с точностью до формально еще возможного свободного действия конечной группы на $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$ или, конкретнее, на $(n-1)$ -мерной сфере.

Перейдем к случаю 2). Поскольку сферы $\mathbb{S}_m^{n-1}$, $m = 1, 2, \dots$, не охватывают точку o , они стягиваемы в пределах $\dot{U}$. Любая такая сфера ограничивает стандартный топологический n -мерный диск в $\dot{U}$. С учетом ориентации это показывает, что в рассматриваемом случае к $\dot{U}$ вдоль $\mathbb{S}^{n-1} = \partial U$ можно подклеить n -мерный диск и продолжить f до квазиконформной иммерсии $F: \dot{\mathbb{S}}^n \rightarrow N^n$ проколотой в точке o сферы $\mathbb{S}^n$.

Тогда риманово многообразие N^n оказывается квазиконформно накрытым посредством $\mathbb{S}^n \sim \mathbb{R}^n$. Универсальной накрывающей $\tilde{N}^n$ многообразия N^n оказалось стандартное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, на котором фундаментальная группа $\pi_1(N^n)$ действует как свободная равномерно дискретная группа квазиконформных преобразований. В масштабах порядка 1 преобразования такой группы равномерно липшицевы. Значит, группа $\pi_1(N^n)$ растет не быстрее, чем объем соответствующего шара в $\mathbb{R}^n$, т. е. полиномиально.

Но тогда группа $\pi_1(N^n)$ виртуально абелева (см. [4]) и, точнее, содержит абелеву подгруппу $\mathbb{Z}^k$, $0 < k \leq n$, конечного индекса.

Таким образом, в случае 2) либо $N^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$, где $0 < k \leq n$, либо $N^n = (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k)/G$, где $0 \leq k \leq n$, а G – конечная, свободно действующая группа квазиконформных преобразований.

Вернемся теперь к началу доказательства и рассмотрим оставленный там случай, когда исходное отображение f имеет бесконечный предел в особой точке $o \in M^n$. Ясно, что в этом случае f не отвечает за глобальную структуру многообразия N^n , так как образ окрестности особой точки оказывается сосредоточенным около одного из концов (граничных элементов) многообразия N^n . Присоединяя к N^n этот граничный элемент, т. е. пополюя N^n одной точкой, мы продолжим отображение $f: \dot{M}^n \rightarrow N^n$ до отображения $\bar{f}: \dot{M}^n \rightarrow \bar{N}^n$. Оно будет иметь тот же коэффициент квазиконформности, что и исходное отображение f , и в этом смысле f продолжено в особую точку $o \in M^n$. Если $\bar{N}^n$, как и N^n , многообразие, то продолженное отображение $\bar{f}$, как и исходное отображение f , будет локально гомеоморфным (т. е. погружением, иммерсией). Если же $\bar{N}^n$, в отличие от N^n , не многообразие, то отображение $\bar{f}$ не будет локально гомеоморфно в точке $o \in M^n$. Описанная ситуация реализуется, если при $n > 2$ в качестве f взять естественную проекцию пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \{o\}$ на его фактор по группе, порожденной инволюцией $x \mapsto -x$.

Список литературы

- [1] В. А. Зорич, *Функц. анализ и его прил.*, **34:3** (2000), 37–48. [2] В. А. Зорич, *УМН*, **56:4** (2001), 147–148. [3] H. L. Royden, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **90:4** (1984), 571–574. [4] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progr. Math., **152**, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.

В. А. Зорич (V. A. Zorich)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vzor@mccme.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
10.10.2008