Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Белоцерковский, И. С. Ломов, Е. И. Моисеев, Ю. С. Осипов, В. А. Садовничий, И. А. Шишмарев, Владимир Александрович Ильин (к восьмидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 173–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 13:48:06

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Владимир Александрович Ильин

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

2 мая 2008 года исполнилось 80 лет действительному члену Российской академии наук Владимиру Александровичу Ильину.

В. А. Ильину принадлежат выдающиеся научные достижения по теории краевых и смешанных задач для уравнений математической физики, рассматриваемых в областях “с плохими” (негладкими) границами и имеющих разрывные коэффициенты, по проблемам связи между классическими и обобщенными решениями задач математической физики, по математическому моделированию задач о дифракции электромагнитных волн на негладких поверхностях, по спектральной теории самосопряженных эллиптических операторов, по теории кратных рядов и интегралов Фурье, по спектральной теории несамопряженных дифференциальных операторов, по спектральной теории оператора Шрёдингера с сильно сингулярным потенциалом и по теории оптимизации граничных управлений колебательными процессами.

Владимир Александрович родился 2 мая 1928 г. в древнем русском городе Козельске, где он жил у своего деда в доме с огромным садом на окраинной улице, носившей название Малое Заречье. Один его дед (в доме которого он жил) был иконописцем, другой дед и бабушка происходили из весьма преуспевавших купеческих семей. В 1931 г. семья – отец, Александр Сергеевич, преподаватель математики, мать, Елизавета Ивановна, студентка педагогического института (в то время называвшегося “вторым МГУ”), и трехлетний сын – переезжает в Москву. С этого времени с мальчиком постоянно была его любимая бабушка Анна Константиновна, которая, несомненно, внесла очень большой вклад в формирование его личности. Бабушка научила четырехлетнего Володю читать и писать, любить и пробовать самому сочинять стихи. В пять лет он знал таблицу умножения, квадраты всех натуральных чисел до двадцати. В это же время он очень увлекался географией, знал все крупные города мира, аккуратно и точно рисовал карты стран и континентов. Был равнодушен к музыкальной классике, которую легко запоминал, слушая ее по появившейся в то время в Москве радиотрансляции.

В те годы обучение в школе начиналось с 8 лет, но через две недели обучения в первом классе родителям предложили перевести Володю во второй класс. В школе во всех классах он был отличником, прилагая при этом почти незаметные для окружающих усилия и опираясь на быстрое схватывание и великолепную память.

Как и для всех людей этого поколения, для Володи-подростка переломным событием была война. Первым потрясением для него стало объявление Парижа открытым городом. Потом был 41-й год, уход на фронт отца, эвакуация со школой, где работала учителем физики мама, сначала в Рязанскую область, а потом дальше – в Пермскую, в то время Молотовскую, область. Всем жилось трудно, но к эвакуированным относились доброжелательно, и преподавание в сельских школах велось на хорошем уровне.

После возвращения из эвакуации в старших классах Володя Ильин был активным участником математического кружка при механико-математическом факультете МГУ, руководимого молодыми А. С. Кронродом и С. Б. Стечкиным. Был победителем математических олимпиад (сохранилась выданная ученику 10 класса В. А. Ильину грамота, подписанная председателем Оргкомитета Олимпиады И. М. Гельфандом, президентом Московского математического общества П. С. Александровым и деканом механико-математического факультета МГУ В. В. Голубевым).

В 1945 г. В. А. Ильин закончил с золотой медалью среднюю школу № 273 и, по совету своего отца, знавшего работавшего на физическом факультете МГУ выдающегося математика А. Н. Тихонова, поступил в МГУ на этот факультет, где и стал после распределения по кафедрам учеником А. Н. Тихонова.

В 1950 г. Владимир Александрович закончил физический факультет МГУ с отличием (при этом он не получил за все время обучения ни одной оценки ниже “отлично”) и был рекомендован А. Н. Тихоновым в аспирантуру по специальности “математическая физика”. В 1953 г., защитив кандидатскую диссертацию на тему “Дифракция электромагнитных волн на некоторых неоднородностях”, В. А. Ильин стал работать ассистентом возглавляемой А. Н. Тихоновым кафедры математики физического факультета МГУ. В феврале 1958 г. Владимир Александрович защитил на механико-математическом факультете МГУ докторскую диссертацию на тему “О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа” и через год был избран на должность профессора Московского университета.

В 1970 г., по предложению А. Н. Тихонова, Владимир Александрович перешел на только что образованный в МГУ факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМиК). С июля 1974 г. В. А. Ильин бессменно возглавляет созданную им на факультете ВМиК кафедру общей математики. Таким образом, 55-летняя научно-педагогическая деятельность В. А. Ильина неразрывно связана с МГУ имени М. В. Ломоносова.

Наряду с этим, с 1973 г. и по настоящее время В. А. Ильин плодотворно ведет научно-исследовательскую работу в Математическом институте имени В. А. Стеклова, являясь сначала старшим научным сотрудником отдела уравнений в частных производных, а в настоящее время – главным научным сотрудником отдела теории функций. За 35 лет работы в МИАН результаты В. А. Ильина восемь раз признавались лучшими в масштабах Отделения математических наук и дважды признавались лучшими в масштабах всей Академии наук.

В 1987 году Владимир Александрович был избран членом-корреспондентом, а в 1990 году – действительным членом АН СССР.

Первые научные результаты В. А. Ильина, полученные им еще в студенческие годы по тематике, предложенной ему А. Н. Тихоновым, были посвящены проблеме сходимости в цилиндрической области G билинейных рядов с членами, в числителе которых стоит произведение собственных функций оператора Лапласа в области G ,

взятых в двух, вообще говоря, различных ее точках P и Q , а в знаменателе – отвечающее им собственное значение, возведенное в произвольную положительную степень. В. А. Ильиным был получен по этой тематике ряд исчерпывающих исследование результатов, опубликованных в виде двух статей в “Докладах Академии наук” и доложенных на заседании Московского математического общества. В частности, им была установлена ошибочность содержащегося в известной книге Р. Куранта и Д. Гильберта “Методы математической физики” утверждения¹ об абсолютной всюду при $P \neq Q$ сходимости билинейного ряда, представляющего функцию Грина для оператора Лапласа в прямоугольной области G . В. А. Ильин доказал, что указанный билинейный ряд не сходится абсолютно ни для одной пары внутренних точек P и Q прямоугольной области G .

Научные исследования, выполненные В. А. Ильиным в аспирантские годы, посвящены изучению математических моделей для решения задачи о дифракции электромагнитных волн на хорошо проводящих цилиндрических поверхностях, имеющих угловые линии, задачи о береговой рефракции радиоволн и задачи о возбуждении неидельных радиоволноводов, имеющих угловые линии. Этим вопросам посвящена его кандидатская диссертация.

Через три с половиной года после защиты кандидатской диссертации Владимир Александрович представил в Совет механико-математического факультета МГУ свою докторскую диссертацию по чисто математической теме. Он включил в нее только что полученные им результаты о точных условиях абсолютной и равномерной сходимости разложений по собственным функциям первых трех краевых задач (существенно уточнившие условия, полученные четырьмя годами ранее О. А. Ладыженской), результаты об обобщении понятия истокообразно представимой функции и теоремы Гильберта–Шмидта, о дробных степенях интегрального оператора, ядром которого является функция Грина рассматриваемой краевой задачи, и исчерпывающие результаты об окончательных в классах Соболева W_p^l целого порядка l условиях равномерной сходимости разложений по собственным функциям первых трех краевых задач при суммировании в порядке возрастания собственных значений.

Наиболее важные из этих результатов В. А. Ильин опубликовал в насчитывающей почти 100 страниц статье в “Успехах математических наук” и в статье “Ядра дробного порядка”. Эти результаты, помимо всего прочего, явились, по словам М. А. Красносельского, прекрасным аппаратом для получения многих теорем вложения.

Начиная обзор последующих научных достижений В. А. Ильина, приведем оценку его научного творчества, данную его учителем А. Н. Тихоновым: “Характерной чертой всего научного творчества В. А. Ильина является глубина и четкость постановок задач и исчерпывающий характер полученных результатов”.

Кроме того, перечисленные выше темы научных исследований Владимира Александровича показывают необыкновенную широту и разнообразие его научных интересов. Так, несколько лет назад его внимание привлекли совершенно новые для него задачи. С большим энтузиазмом он приступил к их исследованию и достиг весьма значительных и ярких результатов. Опишем подробнее эту тему, а потом более кратко рассмотрим весь спектр научных интересов В. А. Ильина.

В 1999 г. Владимир Александрович приступил к изучению задач граничного управления процессами, описываемыми гиперболическими уравнениями и, в первую очередь, волновым уравнением

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0,$$

рассматриваемым на отрезке $0 \leq x \leq l$ за промежутки времени $0 \leq t \leq T$.

¹См. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, Гостехиздат, М.–Л., 1951, т. 1, гл. 5, п. 6, с. 326; т. 2, с. 315.

В первых же работах В. А. Ильин ввел в прямоугольнике $Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ сыгравший в дальнейшем основополагающую роль класс функций $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, определяемый как множество функций двух переменных $u(x, t)$, непрерывных в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T$ и имеющих в нем обе обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, принадлежащие не только классу $L_2(Q_T)$, но и классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при всех $t \in [0, T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при всех $x \in [0, l]$.

Рассмотрение всех задач граничного управления проводится в терминах обобщенного из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решения смешанной задачи для волнового уравнения с заданными начальными условиями

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

и с такими граничными условиями на концах $x = 0$ и $x = l$, которые обеспечивают выполнение в финальный момент времени $t = T$ заданных финальных условий

$$u(x, T) = \widehat{\phi}(x), \quad u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x).$$

Принадлежность решения $u(x, t)$ к классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ позволяет точно указать требования гладкости, которым должны удовлетворять функции начальных, финальных и граничных условий.

Сначала для промежутка времени T , удовлетворяющего условию $T \leq l$, В. А. Ильиным были найдены необходимые и достаточные условия на начальные функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ и финальные функции $\widehat{\phi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$, обеспечивающие существование граничных управлений смещениями на двух концах $u(0, t) = \mu(t)$, $u(l, t) = \nu(t)$, переводящих процесс колебаний из заданного начального состояния $\{u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)\}$ в заданное финальное состояние $\{u(x, T) = \widehat{\phi}(x), u_t(x, T) = \widehat{\psi}(x)\}$, и при выполнении найденных условий искомые граничные управления были предъявлены в явном аналитическом виде. Аналогичный результат был получен В. А. Ильиным для граничного управления смещением на одном конце при закрепленном втором конце для промежутка T , удовлетворяющего условию $T \leq 2l$.

При $T > l$ в случае управления на двух концах и при $T > 2l$ в случае управления на одном конце задачи граничного управления имеют бесконечно много решений (нетривиальная характеристика множества этих решений содержится в работах В. А. Ильина 2000 г.).

Полученные В. А. Ильиным результаты вошли в число важнейших достижений Российской академии наук за 2001 г.

В 2003 г. В. А. Ильин нашел в явном аналитическом виде граничные управления сферически симметрическими колебаниями трехмерного шара, производимые за промежутки времени, равный двум радиусам этого шара.

В 2002 г. к исследованиям В. А. Ильина по отысканию явного вида граничных управлений присоединился Е. И. Моисеев, и в опубликованных в 2002 и в 2004 г. их совместных работах были предъявлены в явном аналитическом виде граничные управления процессом, описываемым телеграфным уравнением за промежуток времени $T = 2l$ при управлении на одном конце и за промежуток времени $T = l$ при управлении на двух концах (эти задачи моделируют управление давлением нефти или газа в трубопроводе).

Начиная с конца 2004 г. усилия В. А. Ильина и Е. И. Моисеева были направлены на отыскание для различных видов граничных управлений и для произвольных достаточно больших промежутков времени T явного аналитического вида оптимальных граничных управлений, доставляющих минимум соответствующему интегралу граничной энергии при наличии условий связи, вытекающих из выполнения заданных

начальных условий, заданных финальных условий и условия согласования начальных и финальных смещений. Оптимизация проводилась для шести задач граничного управления:

- граничного управления смещением или упругой силой на одном конце при закрепленном или свободном втором конце,
- граничного управления смещениями на двух концах и
- граничного управления упругими силами на двух концах.

Сначала в работах В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, опубликованных с конца 2004 г. по конец 2005 г., был предъявлен явный аналитический вид оптимальных граничных управлений для каждой из шести указанных задач в предположении, что промежуток времени T кратен $2l$ при граничных условиях на двух концах одного рода и кратен $4l$ при граничных условиях на двух концах разных родов.

Фундаментальные, законченные результаты были опубликованы в период с ноября 2006 г. по январь 2008 г.: В. А. Ильину и Е. И. Моисееву удалось для каждой из шести указанных задач предъявить в явном аналитическом виде оптимальные граничные управления для произвольных достаточно больших промежутков времени T . Эти результаты включены в число важнейших достижений РАН за 2007 г.

Подчеркнем, что хотя до работ В. А. Ильина и Е. И. Моисеева задачам граничного управления и их оптимизации были посвящены работы ряда известных авторов (Ж.-Л. Лионса, Ф. П. Васильева, А. Г. Бутковского, А. И. Егорова, Л. Д. Акуленко и других), ни в одной из этих работ не был найден явный аналитический вид оптимальных граничных управлений.

В самое последнее время В. А. Ильиным была доказана теорема о независимости оптимальных граничных управлений от выбора точки, в которой производится согласование начального и финального смещений.

Опишем теперь некоторые результаты большого цикла работ В. А. Ильина, посвященных проблемам математической физики и теории функций и функционального анализа.

В течение двух лет после защиты докторской диссертации Владимир Александрович получил фундаментальные результаты по проблеме разрешимости в классическом смысле смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка. Он установил разрешимость указанной смешанной задачи в произвольном нормальном цилиндре, т. е. в цилиндре, сечение которого представляет собой область, для которой при любой непрерывной граничной функции разрешима задача Дирихле для оператора Лапласа. До работ В. А. Ильина в работах О. А. Ладыженской и Х. Л. Смолицкого разрешимость указанной смешанной задачи была установлена лишь для цилиндрической области, граница которой удовлетворяет высоким требованиям гладкости, неограниченно растущим с ростом числа измерений.

Эти результаты В. А. Ильина в соединении с более ранними результатами для параболических и эллиптических уравнений, полученными А. Н. Тихоновым, О. А. Олейник и Г. Таутцем, показали, что в смысле требований на границу вопрос о разрешимости краевых и смешанных задач для уравнений всех трех типов сводится к вопросу о разрешимости простейшей задачи математической физики – задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

В эти же годы с учетом потребности математического моделирования законов движения в неоднородных средах и полях В. А. Ильин опубликовал большой цикл работ по проблемам разрешимости и устойчивости решений краевых и смешанных задач и задач на собственные значения для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Точность установленных им условий разрешимости указанных

задач характеризуется тем, что при отсутствии разрывов у коэффициентов эти условия переходят в точные условия разрешимости соответствующих задач с гладкими коэффициентами (например, для эллиптических уравнений второго порядка установленные В. А. Ильиным условия переходят в условия Жиро).

К этому же времени относятся результаты Владимира Александровича, устанавливающие, что классическое решение задачи Дирихле для произвольного эллиптического оператора второго порядка с однородным краевым условием в совершенно произвольной ограниченной области всякий раз, когда оно существует, является обобщенным из класса W_2^1 решением этой задачи. Совпадение классического и обобщенного решения было установлено и для смешанной задачи для гиперболического уравнения, что позволило В. А. Ильину разработать новый эффективный метод доказательства единственности решения указанной смешанной задачи в произвольной цилиндрической области, использующий только факт полноты системы собственных и присоединенных функций для соответствующего эллиптического оператора в сечении этой области.

Фундаментальным вкладом Владимира Александровича в спектральную теорию самосопряженных эллиптических операторов является разработанный им в конце 1960-х годов универсальный метод, позволивший ему для произвольного самосопряженного расширения эллиптического оператора второго порядка в произвольной (не обязательно ограниченной) N -мерной области и с произвольным спектром установить окончательные в каждом из классов функций Никольского H_p^α , Соболева–Лиувилля W_p^α , Бесова $B_{p,\Theta}^\alpha$ и Зигмунда–Гельдера C^α условия равномерной на любом компакте сходимости как самих спектральных разложений, так и их средних Рисса.

Так, для функции, обладающей в произвольной N -мерной области компактным носителем, окончательные в каждом из классов H_p^α , W_p^α и $B_{p,\Theta}^\alpha$ условия равномерной сходимости ее спектральных разложений заключаются в требовании, чтобы (не обязательно целый) порядок дифференцируемости α и степень суммируемости p удовлетворяли трем неравенствам Ильина

$$\alpha \geq \frac{N-1}{2}, \quad p \cdot \alpha > N, \quad p \geq 1.$$

Замечательным оказался тот факт, что найденные В. А. Ильиным условия равномерной сходимости спектральных разложений явились окончательными и для каждого индивидуального спектрального разложения и, в частности, явились новыми и окончательными для разложения в N -мерный интеграл Фурье и в N -кратный тригонометрический ряд Фурье (со сферическими частичными суммами). По указанным результатам В. А. Ильиным был сделан доклад по приглашению на Международном конгрессе математиков в Ницце в 1970 г.

В эти же годы В. А. Ильин исчерпывающим образом решил вопрос о справедливости для спектральных разложений принципа локализации как в классическом смысле (т. е. в смысле равномерной сходимости в окрестности данной точки), так и в обобщенном смысле (т. е. в смысле сходимости почти всюду в окрестности данной точки). Идея Владимира Александровича о принципе локализации в обобщенной форме получила развитие в докторской диссертации его ученика И. Л. Блошанского.

В 1971 году В. А. Ильин опубликовал отрицательное решение поставленной И. М. Гельфандом проблемы о справедливости теоремы о равностоймости спектрального разложения с разложением в интеграл Фурье в ситуации, когда отсутствует равномерная сходимость самого спектрального разложения. Аналогичный результат был получен В. А. Ильиным и по проблеме риссовской равностоймости. Эти результаты показали, что ранее установленные В. А. Ильиным тонкие теоремы об условиях, не обеспечивающих равномерной сходимости спектральных разложений или их

средних Рисса, нельзя получить с помощью теорем о равносходимости или равносуммируемости.

В 1972 г. Владимир Александрович опубликовал отрицательное решение поставленной С. Л. Соболевым задачи о сходимости при $p \neq 2$ в метрике W_p^l спектрального разложения финитной функции из класса W_p^l .

Выдающимся достижением В. А. Ильина является разработанный им новый метод оценки остаточного члена спектральной функции эллиптического оператора как в метрике L_∞ , так и в метрике L_2 .

До работ В. А. Ильина многие известные математики (Т. Карлеман, В. Г. Авакумович, Б. М. Левитан, Л. Гординг, Л. Хёрмандер и другие) занимались оценкой остаточного члена спектральной функции в метрике L_∞ , применяя при этом различные модификации первоначального метода Карлемана, основанные на изучении ядра некоторой функции от оператора и последующего применения тех или иных тауберовых теорем. Метод В. А. Ильина не имеет ничего общего с методами, применявшимися всеми его предшественниками, и основан на тонком анализе образа Фурье главного члена спектральной функции.

В. А. Ильину принадлежит и еще один оригинальный метод оценки остаточного члена спектральной функции эллиптического оператора, идея которого заключается в том, что если обозначить через ρ геодезическое расстояние, порождаемое римановой метрикой, определяемой старшими коэффициентами эллиптического оператора, а через $\Theta_0(\rho, \tau, \lambda)$ – спектральную функцию того сингулярного обыкновенного дифференциального оператора, который получается из эллиптического оператора при рассмотрении функции, зависящей только от ρ , то главный член спектральной функции эллиптического оператора может быть взят в виде $\Theta_0(|x - y|, 0, \lambda)$.

Основные результаты, полученные В. А. Ильиным по спектральной теории самосопряженных эллиптических операторов, изложены в его монографии, вышедшей в свет в 1991 г. и переведенной на английский язык издательством Plenum в 1995 г.

К этому же циклу можно отнести работы В. А. Ильина по спектральной теории оператора Шрёдингера. В 1995 г. для самосопряженного расширения на всей бесконечной прямой $\mathbb{R}$ оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом, удовлетворяющим только так называемому условию Като, В. А. Ильин доказал теорему о равномерной на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимости спектрального разложения произвольной функции $f(x)$ из класса $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leq p \leq 2$ с разложением той же функции в интеграл Фурье.

Важное для физических приложений значение имеют выполненные в 1996–1998 г. работы В. А. Ильина и Е. И. Моисеева, в которых для самосопряженного расширения в $\mathbb{R}^N$ оператора Шрёдингера, сингулярный потенциал которого удовлетворяет только условию Като, установлены точные по порядку оценки взятой на диагонали спектральной функции и ее приращения.

Фундаментальным вкладом в науку являются работы В. А. Ильина по спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов. Этим работам предшествовали известные работы М. В. Келдыша, в которых для широких классов краевых задач был установлен факт полноты специально выбранной системы собственных и присоединенных функций (такую систему Келдыш назвал канонической). Однако теория Келдыша не давала ответа на актуальный для приложений вопрос о том, образует ли построенная система базис, по которому можно разложить произвольную функцию из некоторого класса.

С целью получить ответ на этот вопрос В. А. Ильин в 1980 г. предложил для произвольного заданного на интервале (a, b) обыкновенного дифференциального оператора L любого порядка n рассматривать замкнутую и минимальную в метрике $L_p(a, b)$ при фиксированном $p \geq 1$ систему функций $\{u_k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, каждый элемент

$u_k(x)$ которой для некоторого комплексного числа λ_k является на (a, b) регулярным (или обобщенным) решением уравнения

$$Lu_k + \lambda_k u_k = \Theta_k u_{k-1},$$

в котором число Θ_k равно либо нулю, либо единице (при этом $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), причем $\Theta_1 = 0$.

Такую систему $\{u_k(x)\}$ образуют собственные и присоединенные функции всех несамосопряженных краевых задач для оператора L , обладающие свойством замкнутости и минимальности в некотором L_p , что обеспечивает существование биортogonalно сопряженной системы $\{v_k(x)\}$.

При определенных требованиях на множество комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ (весьма близких к необходимым) В. А. Ильин доказал, что существование для любого компакта K_0 из интервала (a, b) постоянной $C(K_0)$, обеспечивающей для всех номеров k справедливость неравенства

$$\|u_k\|_{L_p(K_0)} \|v_k\|_{L_{p/(p-1)}(a,b)} \leq C(K_0), \quad (*)$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы при $p > 1$ система $\{u_k(x)\}$ обладала свойством базисности в L_p , а при $p \geq 1$ разложение в биортogonalный ряд по системе $\{u_k(x)\}$ любой функции $f(x)$ из класса $L_p(a, b)$ равномерно на любом компакте интервала (a, b) равносходилось с разложением той же функции $f(x)$ в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Самой трудной и, конечно, самой интересной является теорема о необходимом и достаточном условии равносходимости при $p = 1$, т. е. в L_1 . Начиная со знаменитой работы Стеклова, многие известные математики (сам В. А. Стеклов, Я. Д. Тамаркин, Э. Ч. Титчмарш, А. Хаар, Б. М. Левитан, Я. Л. Геронимус и другие) занимались установлением различных теорем равносходимости, и лишь теорема В. А. Ильина позволяет не только получить многие из этих теорем с усилением, но и впервые установить точную границу, за пределами которой равносходимости уже нет.

Взятая при $p = 1$, теорема В. А. Ильина, в частности, позволяет утверждать, что при выполнении условия $(*)$ спектральное разложение функции из класса L_1 , построенной в знаменитом примере А. Н. Колмогорова², расходится почти всюду на рассматриваемом интервале.

Подчеркнем, что найденные Владимиром Александровичем условия базисности и равносходимости имеют конструктивный характер, ибо для конкретных краевых задач выполнение или невыполнение условия $(*)$ и условий, накладываемых на множество чисел $\{\lambda_k\}$, устанавливается при помощи первых членов асимптотических разложений собственных и присоединенных функций и собственных значений по степеням $1/\lambda_k^{1/n}$.

Частным случаем рассматриваемой В. А. Ильиным системы $\{u_k(x)\}$ является система экспонент, и хотя разложением по системе экспонент занималось огромное число математиков, теорема В. А. Ильина позволила получить новые условия равносходимости разложений по системе экспонент и по тригонометрической системе.

В 1980–1992 гг. В. А. Ильиным для несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора любого порядка и для несамосопряженного эллиптического оператора второго порядка были установлены точные по порядку оценки L_2 -нормы собственной (или соответственно присоединенной) функции по компакту K основной области через L_2 -норму по компакту $K' \subset K$ присоединенной функции на единицу более высокого порядка. Эти оценки В. А. Ильин назвал “оценками антиаприорного

²А. Kolmogoroff, “Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout”, *Fund. Math.*, 4 (1923), 324–328.

типа” (ибо в них функция, стоящая в правой части дифференциального уравнения, оценивается через его решение). Он показал, что эти оценки играют принципиальную роль в теории несамосопряженных операторов.

Теория оценок антиаприорного типа и их приложений получила развитие в работах и в диссертациях ряда учеников Владимира Александровича (В. Д. Будаева, Н. Б. Керимова, И. С. Ломова, А. С. Макина и других).

Еще одним важным достижением Владимира Александровича является установление им в 1983 г. для дифференциального оператора второго порядка при минимальных требованиях на его коэффициенты необходимых и достаточных условий базисности Рисса системы его собственных и присоединенных функций. В 1986 г. В. А. Ильин перенес этот результат на случай, когда оператор является разрывным, что особенно актуально для рассмотрения задач с нелокальными краевыми условиями, для которых сопряженный оператор является разрывным.

Безусловно очень интересными являются работы, выполненные В. А. Ильиным в соавторстве с Е. И. Моисеевым и К. В. Мальковым в 1989 г., в которых доказано, что ранее установленные В. А. Ильиным необходимые и достаточные условия базисности систем собственных и присоединенных функций несамосопряженного оператора L являются одновременно необходимыми и достаточными условиями существования полной системы интегралов движения у нелинейной эволюционной системы, порождаемой $(L - A)$ -представлением П. Лакса.

В 1991 г. Владимир Александрович рассмотрел одномерный оператор Шрёдингера с матричным потенциалом, представляющим собой неэрмитову матрицу, все комплекснозначные элементы которой только суммируемы на основном интервале, и установил конструктивные необходимые и достаточные условия покомпонентной равносходимости спектрального разложения разлагаемой вектор-функции с ее покомпонентным разложением в тригонометрический ряд Фурье. В этих работах впервые установлена справедливость покомпонентного принципа локализации.

В 1994 г. в совместной работе В. А. Ильина и Е. И. Моисеева было установлено отсутствие свойства базисности в L_p при любом $p > 1$ у системы корневых функций поставленной еще А. Пуанкаре краевой задачи для оператора Лапласа с наклонной производной.

Владимир Александрович Ильин является автором свыше 370 публикаций и главой одной из ведущих научных школ: он подготовил 28 докторов и свыше 100 кандидатов физико-математических наук, в число которых входят академик РАН Е. И. Моисеев, академик НАН Узбекистана Ш. А. Алимов и член-корреспондент РАН И. А. Шишмарёв. Полный список публикаций В. А. Ильина приведен в журнале “Дифференциальные уравнения” (34:5 (1998), 586–594; 39:5 (2003), 581–583; 44:5 (2008), 587–590), а также на с. 662–692 тома 2 “Избранных трудов” В. А. Ильина (Макс-Пресс, М., 2008).

Свидетельством неослабевающей интенсивности научной деятельности В. А. Ильина является опубликование им только за последние полтора года семи статей в журнале “Доклады Академии наук”, восьми статей в журнале “Дифференциальные уравнения” и двух статей в журнале “Автоматика и телемеханика”.

В Московском университете В. А. Ильин известен как блестящий лектор, внесший огромный вклад в университетское образование: он является автором восьми хорошо известных учебников, вошедших в созданную в связи с 250-летием МГУ серию “Классический университетский учебник”.

Заслуги Владимира Александровича высоко оценены. Он награжден четырьмя орденами, удостоен званий лауреата Государственной премии СССР (1980), лауреата Ломоносовской премии за научную работу (1980), лауреата премии Министерства

высшего и среднего специального образования СССР за лучшую научную работу (1988), лауреата Ломоносовской премии “за создание уникальных учебников для университетов и лекторское мастерство” (1992), заслуженного профессора МГУ (1993), Почетного гражданина города Козельска (1998), лучшего лектора МГУ (2000), лауреата премии Президента Российской Федерации в области образования (2005).

Владимир Александрович обладает большим личным обаянием, он чуток и благожелателен к талантливой молодежи, добр, широк и отзывчив. Он удивляет всех его окружающих разносторонностью интересов и знаний, своей необыкновенной памятью.

С неослабевающей энергией В. А. Ильин занимается научной работой, щедро дарит научные идеи своим ученикам, реализует все новые творческие замыслы.

Пожелаем же Владимиру Александровичу хорошего здоровья и новых творческих достижений!

*О. М. Белоцерковский, И. С. Ломов, Е. И. Мусеев,
Ю. С. Осипов, В. А. Садовничий, И. А. Шилимарёв*