Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Житлухин, О совместном распределении $\sup(B_s - \mu s)$ и $\inf(B_s - \nu s)$ для броуновского движения B_s , УМН, 2008, том 63, выпуск 6, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 10:35:31

**О совместном распределении $\sup(B_s - \mu s)$ и $\inf(B_s - \nu s)$
для броуновского движения B_s**

М. В. Житлухин

1. Пусть $B = (B_s)_{s \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, μ и ν – произвольные действительные числа и $a > 0 > b$. Определим вероятности

$$F_t(a, b, y) = P\left\{\sup_{s \leq t}(B_s - \mu s) < a, \inf_{s \leq t}(B_s - \nu s) > b \mid B_t = y\right\}, \quad (1)$$

$$G_t(a, b) = P\left\{\sup_{s \leq t}(B_s - \mu s) < a, \inf_{s \leq t}(B_s - \nu s) > b\right\}.$$

Основной результат настоящей работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Для любого t в случае $\mu \geq \nu$ и $t < (a - b)/(\nu - \mu)$ в случае $\mu < \nu$ и любого $y \in [b + \nu t, a + \mu t]$ вероятность $F_t(a, b, y)$ определяется формулой

$$F_t(a, b, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2k^2(a-b)}{t}(a-b+(\mu-\nu)t) - 2k\left(a\nu - b\mu - \frac{(a-b)y}{t}\right)\right\} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{t}(k(a-b)+a)(k(a-b+(\mu-\nu)t)+a+\mu t-y)\right\}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого t в случае $\mu \geq \nu$ и $t < (a - b)/(\nu - \mu)$ в случае $\mu < \nu$ вероятность $G_t(a, b)$ определяется формулой

$$G_t(a, b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2k^2(a-b)(\mu-\nu)-2k(a\nu-b\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{b+\nu t}^{a+\mu t} e^{-(x-2k(a-b))^2/(2t)} dt - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2(k(a-b)+a)(k(\mu-\nu)+\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{b+\nu t}^{a+\mu t} e^{-(x-2(k+1)a+2kb)^2/(2t)} dt. \quad (3)$$

Отметим, что вопрос об отыскании интересующих нас вероятностей, а также преобразования Лапласа момента $\tau = \inf\{s \geq 0 : B_s = a + \mu s \text{ или } B_s = b + \nu s\}$, где $\inf \emptyset = \infty$, исследовался во многих работах и разными методами (распределение τ связано с $G_t(a, b)$ соотношением $G_t(a, b) = P\{\tau > t\}$).

Так, в [1] для отыскания вероятности $G_t(a, b)$ использовался метод дифференциальных уравнений, что приводит к достаточно громоздким вычислениям. В работе [2] в случае $\mu \geq \nu$ для отыскания преобразования Лапласа момента τ использовался “мартингалный” метод. Но, как отмечает автор этой работы, его метод не работает в случае $\mu < \nu$.

2. Доказательство формул (2) и (3) основывается на следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a > 0 > b$, $\mu > \nu$. Тогда

$$P\left\{\sup_{s \geq 0}(B_s - \mu s) < a, \inf_{s \geq 0}(B_s - \nu s) > b\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2k^2(a-b)(\mu-\nu)+2k(a\nu-b\mu)} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2(k(\mu-\nu)+\mu)(k(a-b)+a)}.$$

Идея доказательства теоремы 3 сходна с идеей [2] и основана на рассмотрении мартингала $M_t^\lambda = e^{\lambda B_t - t\lambda^2/2}$, $t \geq 0$. Используя теорему об остановке (см. [3; гл. II, § 3]), можно показать, что для $\lambda \notin (2\nu, 2\mu)$ выполнено равенство $\mathbf{E}M_\tau^\lambda I(\tau < \infty) = 1$, эквивалентное равенству

$$e^{\lambda a} \mathbf{E} e^{\tau(\lambda\mu - \lambda^2/2)} I(B_\tau = a + \mu\tau, \tau < \infty) + e^{\lambda b} \mathbf{E} e^{\tau(\lambda\nu - \lambda^2/2)} I(B_\tau = b + \nu\tau, \tau < \infty) = 1. \quad (4)$$

Выбирая специальным образом последовательность $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$, можно получить рекуррентные соотношения для $x_k = \mathbf{E} e^{\tau(\lambda_k\mu - \lambda_k^2/2)} I(B_\tau = a + \mu\tau, \tau < \infty)$.

А именно, положим $\lambda_{2k-1} = 2(k-1)(\mu - \nu) + 2\mu$, $\lambda_{2k} = 2\nu - \lambda_{2k-1} = -2k(\mu - \nu)$. Тогда, используя (4), получаем соотношение

$$x_{2k-1} = e^{-\lambda_{2k-1}a} - e^{b(\lambda_{2k-1} - \lambda_{2k}) - \lambda_{2k-1}a} + e^{(a-b)(\lambda_{2k} - \lambda_{2k-1})} x_{2k+1},$$

из которого находим формулу для $x_1 = \mathbf{E} I(B_\tau = a + \mu\tau, \tau < \infty)$:

$$x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(k(\mu-\nu)+\mu)(k(a-b)+a)} - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k^2(a-b)(\mu-\nu)+2k(a\nu-b\mu)}.$$

Аналогично находится формула для $\mathbf{E} I(B_\tau = b + \nu\tau, \tau < \infty)$. Отсюда легко получить утверждение теоремы, так как искомая вероятность равна $\mathbf{P}\{\tau = \infty\}$.

3. Для доказательства теоремы 1 воспользуемся тем, что $\text{Law}(B_s) = \text{Law}(sB_{1/s})$. Тогда (1) можно переписать так (для простоты ограничимся случаем $t = 1$):

$$F_1(a, b, y) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{s \leq 1} (sB_{1/s} - \mu s) \leq a, \inf_{s \leq 1} (sB_{1/s} - \nu s) \geq b \mid B_1 = y \right\}.$$

Сделав замену $u = 1/s$ и воспользовавшись марковским свойством броуновского движения, получаем, что

$$F_1(a, b, y) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{u \geq 0} (B_u - au) \leq a + \mu - y, \inf_{u \geq 0} (B_u - bu) \geq b + \nu - y \right\}.$$

Применяя теперь теорему 3, получаем формулу (2).

Теорема 2 доказывается интегрированием формулы (2).

Список литературы

- [1] M. Teunen, M. Goovaerts, *Scand. Actuar. J.*, **2** (1994), 139–150. [2] L. Barba Escriba, *Ann. Probab.*, **15:4** (1987), 1524–1526. [3] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd ed., Grundlehren Math. Wiss., **293**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

М. В. Житлухин (M. V. Zhitlukhin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zhitlukhin@gmail.com

Представлено Д. В. Трещёвым
Принято редколлегией
27.10.2008