Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Э. Добринская, Конфигурационные пространства с метками и пространства петель на K -произведениях, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:06:05

Конфигурационные пространства с метками и пространства петель на K -произведениях

Н. Э. Добринская

Пусть $K = \{\sigma \subset [m]\}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, а $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ – последовательность пространств с отмеченной точкой. Полиэдральным произведением $\mathbf{X}^K$, или K -произведением, называется подпространство прямого произведения

$$\mathbf{X}^K = \bigcup_{\sigma \in K} \mathbf{X}^\sigma \subset \prod_{i \in [m]} X_i,$$

где $\mathbf{X}^\sigma \subset \prod X_i$ и вложение $\mathbf{X}^\sigma \subset \prod X_i$ задается при помощи отмеченных точек.

Конструкция пространства $\mathbf{X}^K$ впервые появилась еще в работе [1] как обобщение обычных букетов (K – несвязное объединение вершин), декартовых произведений (K – симплекс), жирного букета (K – граница симплекса), но особый интерес к ней возник благодаря торической топологии, где она играет важную роль. Так, например, задача о гомотопическом типе торических многообразий привела к изучению пространства петель на K -произведениях [2].

Данная работа посвящена вычислению алгебры гомологий пространства петель на K -произведении при наличии достаточной информации о пространствах X_i . Полученные результаты открыли удивительные связи этого вопроса с другими задачами о наборах подпространств в евклидовых пространствах, конфигурационных пространствах частиц с метками, а также с вопросами коммутативной алгебры.

Для произвольного $k \in \mathbb{N}_0$ из множества неотрицательных целых чисел обозначим через $B(k)$ конфигурационное пространство неупорядоченных наборов k точек на вещественной прямой:

$$B(k) = \{\mathbf{t} = \{t(1), \dots, t(k)\} \subset \mathbb{R} \mid t(i) \neq t(j), i \neq j\}.$$

Построим пространство $C_K = \bigsqcup_{I \in \mathbb{N}_0^m} C_K(I)$, где для каждого $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ компонента $C_K(I) \subset B(i_1) \times \dots \times B(i_m)$ определяется следующим условием:

$$(\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_m) \in C_K(I) \iff \bigcap_{j \in \tau} \mathbf{t}_j = \emptyset \quad \text{для любого } \tau \notin K.$$

Отметим, что все $C_K(I)$ гомеоморфны либо дополнениям к конфигурациям диагональных подпространств, ассоциированных с K , либо некоторым их компонентам.

Назовем индекс из $[m]$ цветом частицы. Частицы каждого цвета естественным образом упорядочены на прямой. Таким образом, все частицы индексируются парами (j, k) , где $j \in [m]$ и $k \in [i_j]$.

Рассмотрим операцию удвоения частицы в C_K – для некоторого малого ε мы заменяем ее на две частицы того же цвета на расстоянии ε и с центром тяжести в координате удаленной частицы. Эта процедура индуцирует операции в гомологиях: $\mu_{j,k}: H_*(C_K(I)) \rightarrow H_*(C_K(I + e_j))$, где $j \in [m]$, $k \in [i_j]$, а e_j обозначает последовательность $\{0\}^{j-1} \times \{1\} \times \{0\}^{m-j}$.

Существует гомотопическая деформация пространства C_K , на которой можно ввести структуру моноида. Следовательно, $H_*(C_K)$ является алгеброй.

Гомологии всех пространств будем рассматривать над фиксированным полем R .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X_1, \dots, X_m$ – односвязные пространства с отмеченной точкой. Тогда имеет место изоморфизм градуированных алгебр

$$H_*(\Omega(\mathbf{X}^K)) \cong \bigoplus_{I \in \mathbb{N}_0^m} H_*(C_K(I)) \otimes \tilde{H}_*(\Omega \mathbf{X})^{\otimes I} / \sim.$$

Отношение эквивалентности задается следующими условиями:

$$(\mu_{j,ky})(\cdots \otimes x_j^k \otimes x_j^{k+1} \otimes \cdots) \sim y(\cdots \otimes x_j^k \cdot x_j^{k+1} \otimes \cdots).$$

Комплекс называется *флаговым*, если любой набор вершин $\tau \in [m]$, попарно соединенных ребрами (т. е. $\{i, j\} \in K$ для любых $i, j \in K$), содержится в K : $\tau \in K$. Из теоремы 1 мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого флагового симплициального комплекса K имеет место следующий изоморфизм алгебр:

$$H_*(\Omega \mathbf{X}^K) \cong \bigsqcup_{i=1}^m H_*(\Omega X_i) / \sim,$$

где $x \cdot y \sim (-1)^{\deg x \deg y} y \cdot x$ для всех $x \in H_*(\Omega X_i)$, $y \in H_*(\Omega X_j)$ и $\{i, j\} \in K$.

Это следствие было известно в частных случаях, когда $X_i \cong \mathbb{CP}^\infty$ для всех i (см. [3]) или $X_i \cong S^{2n+1}$ для всех i (см. [4]).

Введем мультиградуированную алгебру $\wedge(K) = \wedge[v_1, \dots, v_m] / I_{\text{SR}}$, где $\deg v_i = 1$, а I_{SR} – идеал Стенли–Райснера, порожденный мономами вида

$$v_I := v_{i_1} \cdots v_{i_s} = 0 \quad \text{для } I = \{i_1, \dots, i_s\} \notin K.$$

ТЕОРЕМА 3. Алгебра $H_*(C_K)$ изоморфна гомологиям модели Адамса–Хилтона, построенной по стандартному клеточному разбиению пространства $(S^1, \dots, S^1)^K$. Имеет место следующий мультиградуированный изоморфизм алгебр:

$$H_{*,*}(C_K) \cong \text{Ext}_{*,*}^{\wedge(K)}(R; R).$$

Дадим геометрическое объяснение полученных результатов. Существует геометрическая модель для пространства петель $\Omega(\mathbf{X}^K)$ в виде конфигурационного пространства C_K с метками в ΩX_i и возможными слияниями частиц (подробности этой теории см. в [5]). В частном случае, когда каждое из пространств в $\mathbf{X}$ является надстройкой: $X_i \simeq \Sigma Y_i$ для некоторого связного Y_i , модель упрощается:

$$\Omega(\Sigma \mathbf{Y})^K \simeq \bigsqcup C_K(I) \times \mathbf{Y}^I / \sim,$$

где отношение эквивалентности определяется условием, что если метка частицы – отмеченная точка из Y_i , то частица исчезает.

В этом случае $H_*(\Omega \Sigma Y_i)$ изоморфна свободной тензорной алгебре $T(\tilde{H}_*(Y))$, и изоморфизм теоремы 1 становится расщеплением:

$$H_*(\Omega(\Sigma \mathbf{Y})^K) \cong \bigoplus_{I \in \mathbb{N}_0^m} H_*(C_K(I)) \otimes \tilde{H}_*(\mathbf{Y})^{\otimes I}.$$

Возникает вопрос, является ли это расщепление геометрическим.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $X_i \simeq \Sigma Y_i$, $i \in [m]$, где Y_i – связные пространства. Тогда существует стабильная гомотопическая эквивалентность

$$\Omega(\Sigma \mathbf{Y})^K \simeq_s \bigvee_{I \in \mathbb{N}_0^m} C_K(I)_+ \wedge \mathbf{Y}^{\wedge I}.$$

Список литературы

- [1] D. Anick, *Lecture Notes in Math.*, **1051** (1984), 331–350. [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004. [3] T. E. Panov, R. Ray, *Contemp. Math.*, **460** (2008), 293–322. [4] S. Papadima, A. Suciu, *Math. Ann.*, **334**:3 (2006), 533–555. [5] Н. Э. Добринская, *Тр. МИАН*, **252** (2006), 37–54.

Н. Э. Добринская (N. È. Dobrinskaya)

Vrije Universiteit Amsterdam

E-mail: NE.Dobrinskaya@few.vu.nl

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией

10.11.2008