Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Муравлёв, О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 12:23:59

О моментах остановки, связанных с падением и ростом броуновского движения со сносом

А. А. Муравлёв

1. Пусть $B^\mu = (B_t^\mu)_{t \geq 0}$ – броуновское движение с локальным сносом $\mu \in \mathbb{R}$, т. е. $B_t^\mu = B_t + \mu t$, где $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение. Для фиксированного $\mu \in \mathbb{R}$ и $a > 0$, $b > 0$ введем моменты:

$$\tau_a = \inf \left\{ t \geq 0 : \sup_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu = a \right\},$$

$$\sigma_b = \inf \left\{ t \geq 0 : B_t^\mu - \inf_{s \leq t} B_s^\mu = b \right\},$$

$$\gamma_{ab} = \tau_a \wedge \sigma_b.$$

В случае $\mu = 0$ будем обозначать эти моменты τ_a^0 , σ_b^0 и γ_{ab}^0 . Положим

$$\Delta = \sqrt{\mu^2 + 2\lambda}, \quad \nu = \mu + \beta, \quad m_a = \frac{e^{2\mu a} - 2\mu a - 1}{e^{2\mu a} + e^{-2\mu a} - 2}, \quad \lambda_a = \frac{e^{2\mu a} - 1}{2\mu}$$

и будем считать далее, что $\lambda \geq 0$. Вопрос о свойствах τ_a и σ_b рассматривался во многих работах. Так, в [1] показано, что для момента τ_a

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \tau_a} = \frac{e^{-\mu a}}{\operatorname{ch}(\Delta a) - (\mu/\Delta) \operatorname{sh}(\Delta a)}, \quad \mu \neq 0, \quad \mathbf{E} e^{-\lambda \tau_a^0} = \frac{1}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda})},$$

$$\mathbf{E} \tau_a = \frac{e^{2\mu a} - 2\mu a - 1}{2\mu^2}, \quad \mu \neq 0, \quad \mathbf{E} \tau_a^0 = a^2.$$

Будем рассматривать случай $b \geq a > 0$, так как при $a \geq b > 0$ во всех формулах следует просто сделать замену $a \leftrightarrow b$, $\mu \rightarrow -\mu$ и $\nu \rightarrow -\nu$.

Основные результаты настоящей статьи состоят в следующем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть B_t^μ – броуновское движение со сносом μ , моменты τ_a , σ_b и γ_{ab} соответствуют B_t^μ . Тогда:

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{ab} + \beta B_{\gamma_{ab}}^\mu} &= \frac{e^{-\nu a} (1 - e^{\nu(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)})}{\operatorname{ch}(\Delta a) - (\nu/\Delta) \operatorname{sh}(\Delta a)} \\ &+ 2 \frac{\operatorname{ch}(\Delta a) \operatorname{ch}(\nu a) - (\nu/\Delta) \operatorname{sh}(\Delta a) \operatorname{sh}(\nu a) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a) (1 - (\nu/\Delta)^2)} e^{\nu(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)}, \end{aligned} \quad (1)$$

если $|\nu| < \Delta \operatorname{cth}(\Delta a)$;

$$\begin{aligned} 2. \quad \mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{ab}} &= \frac{e^{-\mu a} (1 - e^{\mu(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)})}{\operatorname{ch}(\Delta a) - (\mu/\Delta) \operatorname{sh}(\Delta a)} \\ &+ 2 \frac{\operatorname{ch}(\Delta a) \operatorname{ch}(\mu a) - (\mu/\Delta) \operatorname{sh}(\Delta a) \operatorname{sh}(\mu a) - 1}{\operatorname{sh}^2(\Delta a) (1 - (\mu/\Delta)^2)} e^{\mu(b-a)} e^{-\Delta(b-a) \operatorname{cth}(\Delta a)}, \quad \mu \neq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \gamma_{ab}^0} = \frac{1 - e^{-(b-a)\sqrt{2\lambda}} \operatorname{cth}(a\sqrt{2\lambda})}}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda})} + \frac{2e^{-(b-a)\sqrt{2\lambda}} \operatorname{cth}(a\sqrt{2\lambda})}}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda}) + 1};$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \mathbf{P}(\gamma_{ab} = \tau_a) &= 1 - m_a e^{-\frac{b-a}{\lambda_a}}, \quad \mathbf{P}(\gamma_{ab} = \sigma_b) = m_a e^{-\frac{b-a}{\lambda_a}}, \quad \mu \neq 0, \\ \mathbf{P}(\gamma_{ab}^0 = \tau_a^0) &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{b-a}{\lambda_a}}, \quad \mathbf{P}(\gamma_{ab}^0 = \sigma_b^0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{b-a}{\lambda_a}}; \end{aligned} \quad (3)$$

4.

$$\mathbf{E} \gamma_{ab} = \frac{e^{2\mu a} - 2\mu a - 1}{2\mu^2} (1 - m_a e^{-\frac{b-a}{\lambda_a}}), \quad \mu \neq 0, \quad \mathbf{E} \gamma_{ab}^0 = a^2 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{b-a}{\lambda_a}} \right). \quad (4)$$

Используя (2) и формулы обращения из [2; приложение 2], несложно найти плотность распределения момента γ_{ab} . Соответствующую формулу мы здесь не приводим ввиду ее громоздкости. Отметим также, что (3) уже было найдено ранее в [3] из других соображений.

2. Для $\mu \in \mathbb{R}$ и $a > 0$, $c > 0$ введем следующие моменты:

$$\delta_c = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu = c\}, \quad \zeta_{ac} = \tau_a \wedge \delta_c, \quad \rho_{ac} = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a \text{ или } L_t = c\},$$

где L_t – локальное время броуновского движения в нуле. Доказательство теоремы 1 основывается на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Пусть B_t^μ – броуновское движение со сносом μ , моменты τ_a , σ_a , γ_{ab} и γ_{aa} соответствуют B_t^μ . Тогда

$$\gamma_{ab} = \gamma_{aa} + \hat{\zeta}_{a,b-a} I_{\{\gamma_{aa} = \sigma_a\}}, \quad \tau_a = \gamma_{aa} + \hat{\tau}_a I_{\{\gamma_{aa} = \sigma_a\}}, \quad (5)$$

где моменты $\hat{\zeta}_{a,b-a}$ и $\hat{\tau}_a$ соответствуют независимой копии $\hat{B}_t^\mu$ процесса B_t^μ .

ЛЕММА 2. Преобразование Лапласа тройки $(\rho_{ac}, L_{\rho_{ac}}, |B_{\rho_{ac}}|)$ имеет вид

$$\mathbf{E} e^{-\lambda \rho_{ac} + \beta L_{\rho_{ac}} + \gamma |B_{\rho_{ac}}|} = \frac{e^{\gamma a} (1 - e^{\beta c} e^{-c\sqrt{2\lambda}} \operatorname{cth}(a\sqrt{2\lambda}))}{\operatorname{ch}(a\sqrt{2\lambda}) - (\beta/\sqrt{2\lambda}) \operatorname{sh}(a\sqrt{2\lambda})} + e^{\beta c} e^{-c\sqrt{2\lambda}} \operatorname{cth}(a\sqrt{2\lambda}) \quad (6)$$

для $\beta < \sqrt{2\lambda} \operatorname{cth}(a\sqrt{2\lambda})$.

3. Скажем коротко об основных идеях доказательства теоремы 1. Формула (2) является очевидным следствием (1). Представления (5) позволяют свести изучение γ_{ab} к исследованию $\zeta_{a,b-a}$. Поэтому для доказательства (1), (3) и (4) достаточно найти $\mathbf{E} \exp\{-\lambda \zeta_{a,b-a} + \beta B_{\zeta_{a,b-a}}^\mu\}$, $\mathbf{P}(\zeta_{a,b-a} = \tau_a)$ и $\mathbf{E} \zeta_{a,b-a}$. Из теоремы Леви о совместном распределении $\sup_{s \leq t} B_s$ и B_t и теоремы Гирсанова следует, что

$$\mathbf{E} \exp\{-\lambda \zeta_{a,b-a} + \beta B_{\zeta_{a,b-a}}^\mu\} = \mathbf{E} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2} \rho_{a,b-a} + \nu L_{\rho_{a,b-a}} - \nu |B_{\rho_{a,b-a}}|\right\}.$$

Остается только подставить (6). Заметим, что

$$\mathbf{P}(\zeta_{a,b-a} = \tau_a) = \mathbf{P}\left(\sup_{s \leq \tau_a} B_s^\mu \leq b - a\right),$$

а $\sup_{s \leq \tau_a} B_s^\mu$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $1/\lambda_a$ (см., например, [1]). Пользуясь строго марковским свойством броуновского движения, несложно получить

$$\mathbf{E} \zeta_{a,b-a} = \mathbf{E} \tau_a \cdot \mathbf{P}(\zeta_{a,b-a} = \tau_a).$$

Список литературы

- [1] А. Н. Ширяев, *О мартингалных методах в задачах о пересечении границ броуновским движением*, МИАН, М., 2007. [2] А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению*, Лань, СПб., 2000; пер. с англ.: A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian motion – facts and formulae*, Probab. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel, 1996. [3] O. Hadjiladis, J. Vecer, *Quant. Finance*, **6**:5 (2006), 403–409.

А. А. Муравлёв (А. А. Muravlev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: almurav@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
13.10.2008