Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Леонтьев, Нижние оценки алгебраических алгоритмов для нильпотентных ассоциативных алгебр, *УМН*, 2008, том 63, выпуск 6, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:29:51

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Нижние оценки алгебраических алгоритмов
для нильпотентных ассоциативных алгебр

А. В. Леонтьев

В работе рассматриваются точные алгебраические алгоритмы, вычисляющие произведение двух элементов в нильпотентных ассоциативных алгебрах над полями нулевой характеристики (частный случай одновременного вычисления нескольких полиномов; см., например, [1]). Мультипликативная сложность данных алгоритмов определяется как число не скалярных умножений, которые они содержат.

Получены нижние оценки тензорного ранга для класса ассоциативных алгебр в терминах размерностей некоторых факторалгебр, которые, в свою очередь, дают нижние оценки сложности алгебраических алгоритмов для этого класса алгебр (ранг не превосходит сложности алгоритма). Автором построены примеры достижимости полученных оценок для алгебр различных размерностей. Доказательство данных оценок очень близко к доказательству, проведенному автором для нильпотентных алгебр Ли, с той лишь разницей, что для ассоциативных алгебр следует учитывать некоммутативность умножения.

Следует отметить, что в [2] рассматривались ассоциативные алгебры с ненулевым радикалом R (нильпотентной частью), однако они содержали единицу (т.е. не являлись нильпотентными алгебрами); кроме того, там не рассматривалась сложность перемножения радикальных элементов между собой — фактически рассматривалась только сложность умножения коэффициента (числа) при единице алгебры на элемент (вектор) из R .

Введем следующие определения и обозначения: тензорным рангом $\mathbf{rk}_{\otimes}(K)$ алгебры K называется наименьшее число r , для которого выполняется равенство $ab = \sum_{i=1}^r u_i(a, b)v_i(a, b)w_i$, где a, b, w_i — элементы K , а $u_i(a, b), v_i(a, b)$ — линейные функции на $K \times K$. Через $\text{AN}_L(K)$ и $\text{AN}_R(K)$ обозначим соответственно левый и правый аннулятор алгебры K , через I_L и I_R — прообразы в алгебре K левого $\text{AN}_L(K/K^3)$ и правого $\text{AN}_R(K/K^3)$ аннуляторов алгебры K/K^3 . Далее, $J_L^i = \{x \in K^i \mid xK \subseteq K^{2i}\}$, $J_R^i = \{x \in K^i \mid Kx \subseteq K^{2i}\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K — ассоциативная нильпотентная ($K^n = 0$, $K^{n-1} \neq 0$) алгебра над полем характеристики нуль. Тогда:

$$\mathbf{rk}_{\otimes}(K) \geq \dim(K^2/(K^2 \cap \text{AN}_L(K))) + \dim(K^2/(K^2 \cap \text{AN}_R(K))) + \max(\dim(K/I_L), \dim(K/I_R)), \quad (1)$$

$$\mathbf{rk}_{\otimes}(K) \geq \sum_{i=n-1}^2 (\dim(L^i/J_L^i) + \dim(L^i/J_R^i)) + \max(\dim(L/I_L), \dim(L/I_R)).$$

Для любого натурального n существует алгебра, сложность которой равна n и для которой оценка (1) точна.

Также справедливы следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Константы (равные единице) при любом слагаемом в оценке (1) теоремы 1 не могут быть заменены на большие.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для ассоциативной верхнетреугольной алгебры нильпотентных матриц M порядка $n \times n$ выполнена следующая оценка: $\mathbf{rk}_{\infty}(M) \geq (n - 2)^2$.

Автор благодарит В. Н. Латышева за полезные обсуждения и внимание к работе.

Список литературы

- [1] В. Н. Латышев, *Комбинаторная теория колец. Сложность алгебраических алгоритмов*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1987. [2] A. Alder, V. Strassen, “On the algorithmic complexity of the associative algebras”, *Theor. Comp. Sci.*, **15**:2 (1981), 201–211.

А. В. Леонтьев (A. V. Leont'ev)
Институт программных систем РАН,
Переславль-Залесский, Россия
E-mail: alex@leont.botik.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
03.10.2008