Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Теорема об антиподах и точки совпадения, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:02:14

ТЕОРЕМА ОБ АНТИПОДАХ И ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ

Б. Д. ГЕЛЬМАН

Широко известна роль топологических методов в вопросах разрешимости нелинейных задач. К этому направлению принадлежит и данная работа. Ее особенностью является то, что для доказательства новых теорем существования в ней используются некоторые факты топологической теории многозначных отображений, развитой в последние десятилетия.

Пусть E^n – конечномерное линейное пространство. Если $a, b \in E^n$, то $[a, b]$ – замкнутый отрезок, соединяющий точки a и b .

Пусть B^n – замкнутый шар в E^n , $S = \partial B^n$ – граница шара. Пусть на шаре B^n задана непрерывная инволюция τ без неподвижных точек на S , т.е. $\tau: B^n \rightarrow B^n$, $\tau^2(x) = x$ для любого $x \in B^n$, $\tau(x) \neq x$ для любого $x \in S$.

Пусть $f, g: B^n \rightarrow E^n$ – непрерывные отображения.

ТЕОРЕМА 1. *Отображения f и g удовлетворяют, по крайней мере, одному из двух условий:*

- (а) *отображения f и g имеют точку совпадения $x_0 \in \text{Int } B^n$;*
- (б) *существует точка $x_* \in S$ такая, что пересечение*

$$[f(x_*); g(\tau(x_*))] \cap [f(\tau(x_*)); g(x_*)] \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если отображения f и g удовлетворяют условию (б), то все доказано. Предположим, что условие (б) не выполняется. Рассмотрим тогда два экземпляра B_1^n, B_2^n шара B^n и склеим их по границе с помощью тождественного отображения. Полученное множество обозначим $\hat{B}^n$. Очевидно, что множество $\hat{B}^n$ гомеоморфно сфере S^n . На множестве $\hat{B}^n$ естественно определяется действие непрерывной инволюции $\hat{\tau}$ без неподвижных точек следующим образом: на точку x из одного экземпляра шара B^n действует инволюция τ , а образ $\tau(x)$ переносится на второй экземпляр шара B^n .

Рассмотрим многозначное отображение $F: \hat{B}^n \rightarrow E^n$, определенное условием

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in \text{Int } B_1^n; \\ g(\tau(x)), & \text{если } x \in \text{Int } B_2^n; \\ [f(x); g(\tau(x))], & \text{если } x \in S. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что F – полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными образами. Для таких отображений справедлива теорема об антиподах (см., например, [2]), т.е. существует такая точка $z_* \in \hat{B}^n$, что $F(z_*) \cap F(\hat{\tau}(z_*)) \neq \emptyset$. Для точек $z \in S$ пересечение $F(z) \cap F(\hat{\tau}(z)) = \emptyset$ (в силу условия (б)). Если $z_* \in \text{Int } B_1^n$, то $F(z_*) = f(z_*)$, $F(\hat{\tau}(z_*)) = g(\hat{\tau}(z_*)) = g(z_*)$. Следовательно, точка z_* является точкой совпадения отображений f и g .

СЛЕДСТВИЕ. *Если для любой точки $x \in S$ пересечение $[f(x); g(\tau(x))] \cap [f(\tau(x)); g(x)] = \emptyset$, то отображения f и g имеют точку совпадения в $\text{Int } B^n$.*

Полученные утверждения являются новыми даже в случае, когда f является единичным отображением, т.е. когда точка совпадения будет неподвижной точкой g .

Пусть B^n – замкнутый шар в E^n с центром в нуле, а инволюция $\tau: B^n \rightarrow B^n$ определяется условием $\tau(x) = -x$.

ТЕОРЕМА 2. *Если для любой точки $x \in S$ пересечение $[f(x); g(-x)] \cap [f(-x); g(x)] = \emptyset$, то $\deg(f - g, 0) \equiv 1 \pmod{2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многозначное отображение $F: S \rightarrow E^n \setminus 0$, определенное условием

$$F(x) = \{a - b \mid a \in [f(x); g(-x)], b \in [f(-x); g(x)]\}.$$

Очевидно, что отображение F непрерывно по Хаусдорфу и имеет выпуклые компактные образы. Кроме того, F является нечетным, т.е. $F(-x) = -F(x)$ для любого $x \in S$. Тогда (см., например, [1], [2]) $\deg(F, 0) \equiv 1 \pmod{2}$. Так как отображение $f - g$ является сечением F , то, в силу свойств степени многозначных отображений, справедливо равенство

$$\deg(f - g, 0) = \deg(F, 0) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Рассмотрим обобщение доказанных теорем на случай бесконечномерных пространств.

Пусть E и V – бесконечномерные банаховы пространства, B – шар в E с центром в нуле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Флагом подпространств* $\{E_n\}$ *в пространстве* E называется последовательность конечномерных подпространств E_n , удовлетворяющих следующим условиям: $\dim E_n = n$, $E_n \subset E_{n+1}$.

Пусть $f: B \rightarrow V$ — непрерывное отображение, $\{E_n\}$ и $\{V_n\}$ — флаги подпространств в пространствах E и V соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение f называется *допустимым* относительно этих флагов, если существует номер n_0 такой, что множество $f(B \cap E_n) \subset V_n$ для любого $n \geq n_0$.

Например, единичное отображение является допустимым для флагов $\{E_n\} = \{V_n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение f называется *слабо допустимым* относительно флагов $\{E_n\}$ и $\{V_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимое отображение $f_\varepsilon: B \rightarrow V$, удовлетворяющее условию

$$\inf_{x \in B} \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon.$$

Заметим, что если f является допустимым относительно флагов $\{E_n\}$ и $\{V_n\}$, а компактное отображение $k: B \rightarrow V$ таково, что $k(B) \subset \bigcup_n V_n$, то $f + k$ является слабо допустимым относительно тех же флагов.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: B \rightarrow V$ — собственное непрерывное отображение, слабо допустимое относительно флагов $\{E_n\}$ и $\{V_n\}$, $g: B \rightarrow V$ — компактное непрерывное отображение. Если 1) $g(B) \subset \bigcup_n V_n$, 2) существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любых $x \in \partial B$, $u \in [f(x); g(-x)]$, $v \in [f(-x); g(x)]$ выполнено неравенство $\|u - v\| \geq \varepsilon_0$, то f и g имеют точку совпадения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/5$, $f_\varepsilon: B \rightarrow V$ — отображение, существующее в силу определения 3. Рассмотрим проектор Шаудера $p: \overline{g(B)} \rightarrow V_{n_1} \cap \overline{g(B)}$, $\|x - p(x)\| < \varepsilon$ для любого $x \in \overline{g(B)}$.

Без ограничения общности можно сказать, что отображения f_ε и $g_\varepsilon = p \circ g$ отображают множество $B_{n_0} = B \cap E_{n_0}$ в некоторое пространство V_{n_0} из флага. Нетрудно доказать, что пересечение $[f_\varepsilon(x); g_\varepsilon(-x)] \cap [f_\varepsilon(-x); g_\varepsilon(x)] = \emptyset$ для любого $x \in \partial B$. Отображения $f_\varepsilon, g_\varepsilon: B_{n_0} \rightarrow V_{n_0}$, в силу следствия из теоремы 1, имеют точку совпадения x_* . Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $0 < \varepsilon_n < \varepsilon_0/5$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда отображения $f_n = f_{\varepsilon_n}$ и $g_n = g_{\varepsilon_n}$ имеют точку совпадения x_n . Так как последовательность $y_n = g(x_n)$ принадлежит компакту $\overline{g(B)}$, то можно считать, что $\{y_n\} \rightarrow y_* \in \overline{g(B)}$. Тогда $\{f(x_n)\} \rightarrow y_*$. Пусть $z_n = f(x_n)$. Множество $A = y_* \cup (\bigcup_n z_n)$ является компактом и $x_n \in f^{-1}(A)$. В силу собственности отображения f , из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$, $\{x_{n_i}\} \rightarrow x_*$. В силу непрерывности отображений f и g , заключаем, что точка x_* является точкой совпадения этих отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126. [2] Górniewicz L. Homological methods in fixed-point theory of multi-valued maps // Rozpr. Mat. 1976. № 129. P. 1–66.

Принято редколлегией
05.07.1995