Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Интегральные модели представлений групп токов простых групп Ли, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 2, 5–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9260>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 04:47:59

УДК 517.5

Интегральные модели представлений групп токов простых групп Ли

А. М. Вершик, М. И. Граев

Для класса локально компактных групп, представимых в виде полу-прямого произведения локально компактной группы и однопараметрической группы ее автоморфизмов $\mathbb{R}_+^*$, строится новая модель представлений их групп токов. Конструкция применяется к максимальным параболическим подгруппам всех простых групп ранга 1. Для случая групп $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$ построено продолжение представлений групп токов их максимальных параболических подгрупп до представлений групп токов самих групп. Главную роль в конструкции играет σ -конечная мера (бесконечномерная мера Лебега в пространстве распределений).

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: группа токов, интегральная модель, фоковское представление, каноническое представление, особое представление, бесконечномерная лебегова мера.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	6
2. Мера $\mathcal{L}$ в пространстве распределений.....	11
3. Канонические представления группы P_0 и ассоциированные с ними представления группы токов P_0^X	15
4. Представления группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ и ее группы токов P^X , ассоциированные с каноническими представлениями подгруппы P_0	19
5. Интегральная модель представления группы токов $O(n, 1)^X$, $n > 2$	31
6. Интегральные модели представлений группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$	38
7. Интегральные модели представлений группы токов $U(n, 1)^X$	51
8. Интегральные модели представлений группы P^X , где P – максимальная параболическая подгруппа группы $Sp(n, 1)$	66
Список литературы.....	70

Первый автор поддержан РФФИ (грант № 08-01-00379) и программой “Ведущие научные школы” (грант НШ 2460.2008.1112); второй автор поддержан РФФИ (грант № 07-01-00101а).

1. Введение

1.1. Построение инвариантного мультипликативного интеграла представлений, т. е. неприводимого представления группы токов $L^\infty(X; G) \equiv G^X$ – ограниченных измеримых функций на пространстве с мерой (X, m) – со значениями в полупростой группе Ли G было предпринято в начале 1970-х годов в работах [1], [2]. Позднее выяснилось, что это построение вкладывается в общую схему, описанную несколькими годами ранее Х. Араки в терминах пространства Фока (см. [3]). Однако, как отмечает сам автор [3], схема была применена только к разрешимым и нильпотентным группам Ли, а полупростые группы не рассматривались. Формально речь идет о некоммутативном аналоге безгранично делимых мер, т. е. о полугруппах состояний на группах, и об аналоге формул Леви–Хинчина, но весьма специального вида. Ключевой момент состоит в нахождении нетривиальных когомологий группы со значениями в подходящем неприводимом унитарном представлении. Построение интеграла представлений для группы $SL(2, \mathbb{R})$, данное в работе [1], неявно содержало необходимый коцикл. Явное описание когомологий для $SL(2, \mathbb{R})$ и других простых групп Ли приведено в книге [4].

Наличие неприводимого унитарного представления π группы G , для которого $H^1(G; \pi) \neq 0$, есть достаточное, а в схеме Араки (т. е. для фоковской факторизации) и необходимое условие существования мультипликативного интеграла представлений. В свою очередь, это условие означает, что группа G не должна обладать свойством (Т) Каждана [5] (см. книгу [6] и библиографию в ней), т. е. тривиальное представление не должно быть изолированным в пространстве неприводимых унитарных представлений в топологии Фелла. Действительно, как доказано в [7], представление π с ненулевой группой $H^1(G; \pi)$ должно быть “приклеено” к тривиальному (по терминологии [7] – быть бесконечно малым). Среди классических простых групп Ли G лишь у групп $SO(n, 1)$, $n > 1$, и $SU(n, 1)$, $n \geq 1$, есть такие унитарные представления, и только они допускают инвариантный мультипликативный интеграл представлений в фоковской модели.

Анализ первоначальных работ [1], [2], [8]–[10] показал, что имеется альтернативный подход к описанию фоковских представлений. Сначала он появился всего лишь как результат диагонализации обсуждаемых в [1] представлений для группы $SL(2, \mathbb{R})$ относительно унипотентной подгруппы [11], [12]. В качестве необходимого следствия этой диагонализации возникло определение замечательной сигма-конечной меры в пространстве дискретных мер на X . Однако истинная суть и глубина альтернативного описания мультипликативного интеграла представлений выявилась лишь после того, как был разобран общий случай групп $SO(n, 1)$, $n > 1$, и $SU(n, 1)$, $n \geq 1$. Этому посвящены работы [13]–[16] и об этом пойдет речь в настоящей статье. В ней мы подводим итог этому циклу работ и рассматриваем ее как подготовительную к монографии на тему о представлениях групп токов. В отличие от фоковской модели, альтернативная модель, которая названа по некоторым причинам *интегральной*, существенно использует специфические свойства простых групп ранга 1, точнее их максимальных параболических подгрупп, и инвариантность некоторой сигма-конечной меры относительно континуальной картановской группы.

Поэтому она не обладает общностью фоковской модели, а ее изоморфизм с фоковской моделью очень сложен. Но, во-первых, она позволяет дать значительно более простое доказательство неприводимости и других свойств представления, а во-вторых, она приводит к новой наглядной трактовке понятия непрерывного тензорного произведения, что несомненно будет полезно в дальнейшем.

1.2. Краткое введение в фоковскую и интегральную модели.

1.2.1. Опишем сначала исходную – фоковскую – модель во всей общности. Она основана на конструкции экспоненты, являющейся формализацией, с одной стороны, фоковского пространства, а с другой – пространства L^2 по гауссовой мере (пространства Винера–Ито).

Экспонента гильбертова пространства H определяется с помощью разложения:

$$\mathcal{H} \equiv \text{EXP } H = \mathbb{C} \oplus H \oplus \frac{1}{\sqrt{2}!} S^2 H \oplus \frac{1}{\sqrt{3}!} S^3 H \oplus \dots,$$

где $S^n H$ – n -я симметрическая тензорная степень пространства H , и вводится отображение $\exp: H \rightarrow \text{EXP } H$:

$$\exp h = 1 \oplus h \oplus \frac{1}{\sqrt{2}!} h \otimes h \oplus \frac{1}{\sqrt{3}!} h \otimes h \otimes h \oplus \dots \in \mathcal{H} \quad \text{при } h \in H.$$

При этом имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \text{EXP}(H_1 \oplus H_2) &= \text{EXP } H_1 \otimes \text{EXP } H_2, \\ \langle \exp h_1, \exp h_2 \rangle &= e^{(h_1, h_2)}, \quad \exp(h_1 + h_2) = \exp h_1 \otimes \exp h_2. \end{aligned}$$

Экспоненты $\exp h$ образуют тотальное множество в $\mathcal{H}$, т. е. их линейная оболочка всюду плотна в $\mathcal{H}$. С помощью экспонент задается вся структура фоковского пространства: разложение на многочастичные подпространства, операторы рождения и уничтожения и т. п. Унитарные операторы, действующие в этом пространстве и сохраняющие его структуру, называются факторизованными. Они параметризуются тройками (A, b, c) , где A – унитарный оператор в H , $b \in H$, $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, и образуют группу: $\mathcal{A} = \{(A, b, c) : A \in \text{Unit}(H), b \in H, c \in \mathbb{C}, |c| = 1\}$ с законом умножения

$$(A_1, b_1, c_1)(A_2, b_2, c_2) = (A_1 A_2, b_1 + A_1 b_2, c_1 c_2 \exp(i \text{Im} \langle b_1, A_1 b_2 \rangle)).$$

Действие ее на экспонентах задается следующим образом:

$$(A, b, c)(\exp h) = c \exp(i \text{Im} \langle b, h \rangle) \cdot \exp(Ah + b).$$

Таким образом, группа $\mathcal{A}$, иногда называемая группой Боголюбова, есть центральное расширение группы изометричных движений пространства $\mathcal{H}$ (т. е. полупрямого произведения группы $\text{Unit}(H)$ и группы трансляций P).

Нетрудно видеть, что представление группы токов $G^X = L^\infty(X, G)$ задает факторизацию в пространстве представления. Если предположить, что эта факторизация фоковская, то представление пропускается через группу факторизованных операторов – группу Боголюбова. В предположении инвариантности представления относительно группы всех преобразований пространства X ,

сохраняющих меру, мы немедленно получаем, что это представление параметризуется унитарным представлением π самой группы G в пространстве H и 1-коциклом $\beta: G \rightarrow H$ группы G со значениями в H . Для неприводимости представления группы токов G^X достаточно, чтобы представление π было неприводимым, а коцикл β был некогомологичным нулю (см. [2], [12], [17], [18]). Эта общая схема никак не использует специфику групп. Задача сводится к поискам пар π, β для данной группы или к доказательству, что таких пар нет. Это и приводит к упомянутому ответу для простых групп Ли, поскольку среди простых групп Ли особые представления с нетривиальной группой $H^1(G; \pi)$ существуют только у групп $SO(n, 1)$, $n > 1$, и $SU(n, 1)$, $n \geq 1$.

Для удобства во всех построениях группы $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$ заменяются их расширениями $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$.

Отметим, что особые представления как самих групп $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$, так и их расширений $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ тривиальны на их центре, а потому сводятся к представлениям проективизаций этих групп. Соответственно фоковские представления их групп токов G^X сводятся к представлениям проективизаций G^X .

1.2.2. Изучаемая далее для групп $G = O(n, 1)$, $n > 1$, и $G = U(n, 1)$, $n \geq 1$, интегральная модель представлений их групп токов существенно опирается на структуру самих групп G . При этом, не используя само существование представлений группы токов и не рассматривая их группы когомологий, мы, наоборот, получаем попутно всю эту информацию. Для нас важны два фундаментальных факта, относящихся к группам $G = O(n, 1)$, $n > 1$, и $U(n, 1)$, $n \geq 1$.¹

- (А) Неприводимые особые унитарные представления этих групп остаются неприводимыми при ограничении на максимальную параболическую подгруппу.
- (В) Максимальная параболическая подгруппа этих групп P есть полупрямое произведение мультипликативной группы $\mathbb{R}_+$ и некоторой подгруппы P_0 , обладающей однопараметрическим семейством неприводимых унитарных представлений T_r , $r > 0$, на которых транзитивно действует группа автоморфизмов $\mathbb{R}_+$; семейство T_r , $r > 0$, есть деформация тривиального представления (при $r = 0$).

Первый факт сводит задачу построения представления группы токов G^X к построению представления группы токов P^X , где P – максимальная параболическая подгруппа группы G , последняя задача, в свою очередь, решается благодаря второму факту и, главное, существованию замечательной сигма-конечной меры в пространстве распределений, о которой мы в заключение этого введения коротко скажем несколько слов. Цель настоящей статьи состоит в подробном описании этого решения. Более развернутое изложение всего круга вопросов, относящихся к представлениям групп токов, авторы надеются дать в готовящейся книге.

¹Вся техника, используемая далее, применима к двум бесконечномерным группам – $O(\infty, 1)$, $U(\infty, 1)$, что позволяет построить желаемое представление соответствующих групп токов.

Мера, названная в [19]–[21] бесконечномерной мерой Лебега и обозначаемая далее через $\mathcal{L}$, появилась в работах [11], [12] как мера, преобразование Лапласа которой естественно возникало при диагонализации представления группы $SL(2, \mathbb{R})$ -токов. Позже выявились замечательные связи и свойства этой меры и однопараметрического семейства $\mathcal{L}_\theta$, $\theta > 0$, в которое она включена (при $\theta = 1$). Она связана с мерами Пуассона–Дирихле, гамма-процессом и процессами Леви, отвечающими устойчивым законам. Фундаментальное свойство этой меры – ее инвариантность относительно континуального аналога картановской группы и единственность при естественных предположениях, о чем более подробно написано в работе [21]; см. также [22], где подробно исследовано свойство квазиинвариантности меры Леви гамма-процесса и эквивалентность ее мере $\mathcal{L}_\theta$.

В заключение заметим, что до настоящего времени совершенно не исследованы, для целей построения мультипликативного интеграла представлений, возможности других факторизаций, т. е., во-первых, нефоковских факторизаций типа I, существование которых было доказано в работе [23], и, во-вторых, факторизаций типа II и III. Последние возникают в проективных представлениях групп токов на окружности, т. е. в модулях Каца–Мули. Эти представления сильно отличаются от описанных выше, для них существенна положительность энергии, одномерность базы X и проективность. Вполне возможно, что привлечение нефоковских факторизаций расширит класс групп, для которых существует мультипликативный интеграл, и класс самих представлений. Следует также иметь в виду, что могут существовать и неунитарные аналоги этой теории, которые также не изучались.

1.3. Изложим кратко содержание статьи. В разделе 2 дано описание бесконечномерной меры Лебега $\mathcal{L}$ – основы последующей конструкции интегральных моделей представлений групп G^X и приведено вычисление интегралов по этой мере.

Разделы 3 и 4 посвящены построению и изучению интегральных моделей групп токов P^X для класса локально компактных групп P , представимых в виде полупрямого произведения $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$. К классу таких групп принадлежат, в частности, максимальные параболические подгруппы простых групп Ли ранга 1, т. е. групп $SO(n, 1)$, $SU(n, 1)$ и $Sp(n, 1)$.

Элементы $r \in \mathbb{R}_+^*$ индуцируют автоморфизмы $g \mapsto g^r$ подгруппы P^0 и тем самым связывают с каждым ее представлением T однопараметрическое семейство представлений операторами $T_r(g) = T(g^r)$. Рассматриваются представления T группы P_0 , в пространстве H которых существует вектор h с нормой $\|h\| = 1$ такой, что имеет место оценка

$$\|T_r(g)h - h\| < c(g)r \quad \text{для любого } g \in P_0$$

при достаточно малом r . Из этого условия следует, что семейство представлений T_r является деформацией тривиального представления группы P_0 , т. е. сходится при $r \rightarrow 0$ к тривиальному в топологии Фелла. Мы называем это свойство каноничностью. Отметим, что оно является более сильным, чем свойство каноничности, введенное в других работах (см., например, [1], [12], [24]).

Прямой интеграл $\tilde{T}$ представлений T_r по мультипликативной мере $d^*r = r^{-1}dr$, т. е.

$$\int_0^\infty T_r d^*r,$$

естественно продолжается до представления $\tilde{T}$ всей группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$: $(\tilde{T}(r_0)f)(r) = f(r_0r)$ при $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Полученное так представление обладает нетривиальным 1-коциклом.

Конструкция интегральной модели представления группы P^X аналогична построению представления $\tilde{T}$ группы P по представлению T группы P_0 . В этой конструкции группа P_0 заменяется группой токов P_0^X , а представления T_r группы P_0 – представлениями $T_\xi(g(\cdot)) = \bigotimes_{k=1}^\infty T_{r_k}(x_k)$ группы P_0^X в счетных тензорных степенях пространства H . Здесь ξ пробегает точки конуса

$$l_+^1(X) = \left\{ \xi = \sum_{k=1}^\infty r_k \delta_{x_k} \mid r_k > 0, \sum_k r_k < \infty, x_k \in X \right\},$$

на котором сосредоточена бесконечномерная мера Лебега $\mathcal{L}$. Чтобы получить искомое представление группы токов P^X , мы рассматриваем прямой интеграл по мере $\mathcal{L}$ этих представлений группы P_0^X и, основываясь на свойствах меры $\mathcal{L}$, строим продолжение полученного так представления группы P_0^X до представления группы P^X . Полученное так представление группы P^X мы называем *интегральной моделью* и обозначаем через $\text{INT } T$.

Устанавливается свойство неприводимости получаемых так представлений и их связь с фоковскими представлениями.

Последующие разделы посвящены интегральным моделям представлений групп токов P^X , где P – максимальные параболические подгруппы групп Ли $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и $Sp(n, 1)$ (разделы 5, 7, 8 соответственно). Случай

$$P \subset \text{SL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{SU}(1, 1)$$

выделен в отдельный раздел (раздел 6). Эти группы P представимы в виде полупрямых произведений $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, и их подгруппы P_0 обладают каноническими представлениями. В каждом из этих случаев дается описание канонических представлений подгруппы P_0 , а тем самым, согласно общей конструкции, и описание отвечающих им интегральных моделей представлений групп токов P^X .

Главная задача здесь – получить представления групп токов $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$ как продолжения интегральных моделей $\text{INT } T$ представлений соответствующих групп токов P^X . С этой целью рассматриваются такие канонические представления T групп P_0 , что ассоциируемые с ними особые представления группы P продолжаемы до представления соответствующей простой группы Ли. Для них явно строится продолжение интегральной модели $\text{INT } T$ представления группы токов до представления группы токов соответствующей простой группы Ли. Полученные модели сравниваются с их фоковскими моделями, построенными в [12], [25]. Попутно в этой конструкции возникают и новые модели особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, представляющие самостоятельный интерес.

2. Мера $\mathcal{L}$ в пространстве распределений

2.1. Определение меры $\mathcal{L}$. Рассматривается произвольное многообразие X с фиксированной непрерывной неотрицательной конечной борелевской мерой m . Конструкция интегральных моделей представлений групп токов G^X основана на существовании в пространстве $D(X)$ распределений Шварца на X меры $\mathcal{L}$, являющейся бесконечномерным аналогом лебеговской меры. Эта мера возникла в [11], [12] и была исследована в цикле работ [19]–[21]. Здесь мы ограничимся лишь ее определением и перечислением основных свойств, используемых далее в статье.

Свяжем с каждым конечным разбиением X на измеримые подмножества,

$$\alpha: \quad X = \bigcup_{k=1}^n X_k, \quad m(X_k) = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

конус $\mathcal{F}_\alpha = \mathbb{R}_+^n$ кусочно постоянных положительных функций вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^m f_k \chi_k(x), \quad f_k > 0,$$

где χ_k – характеристическая функция подмножества X_k , и обозначим через $\Phi_\alpha = (\mathbb{R}_+^m)'$ двойственный ему конус в пространстве распределений.

Определим меру $\mathcal{L}_\alpha$ на Φ_α равенством

$$d\mathcal{L}_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \frac{x_k^{\lambda_k-1} dx_k}{\gamma(\lambda_k)}, \quad \text{где } \lambda_k = m(X_k). \quad (2.1)$$

Пусть $D_+(X) \subset D(X)$ – множество (конус) неотрицательных распределений Шварца на X и $l_+^1(X) \subset D_+(X)$ – подмножество (конус) дискретных конечных (неотрицательных) мер на X , т. е.

$$l_+^1(X) = \left\{ \xi = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \delta_{x_k} \mid r_k > 0, \sum_k r_k < \infty, x_k \in X \right\}.$$

Имеет место естественная проекция $D_+(X) \rightarrow \Phi_\alpha$.

ТЕОРЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Существует сигма-конечная (бесконечная) мера $\mathcal{L}$ на конусе $D_+(X)$, конечная на любом компакте, сосредоточенная на конусе $l_+^1(X)$, такая, что для каждого разбиения α пространства X ее проекция на подпространство Φ_α имеет вид (2.1).*

Эта мера однозначно определяется своим преобразованием Лапласа

$$F(f) \equiv \int_{l_+^1(X)} \exp\left(-\sum_k r_k f(x_k)\right) d\mathcal{L}(\xi) = \exp\left(-\int_X \log f(x) dm(x)\right), \quad (2.2)$$

где f – произвольная неотрицательная измеримая функция на (X, m) с конечным интегралом от логарифма.

Элементы из $l_+^1(X)$ будем кратко обозначать через $\xi = \{r_k, x_k\}_{k=1}^\infty$ или, еще короче, через $\xi = \{r_k, x_k\}$ (последовательности, различающиеся только порядком членов, считаются отождествленными).

ЗАМЕЧАНИЕ. Преобразование Лапласа корректно определено для широкого класса сигма-конечных мер $\mathcal{L}$, для которых есть достаточное число линейных функционалов, имеющих небесконечное распределение, и имеет место теорема единственности мер с заданным преобразованием Лапласа.

Подобно классическому преобразованию Лапласа, формула (2.2) для характеристического функционала меры $\mathcal{L}$ сохраняет смысл для любой комплекснозначной функции $f(x)$ с положительной вещественной частью и сходящимся интегралом $\int_X \log f(x) dm(x)$. Здесь и всюду в дальнейшем через $\log$ обозначается ветвь логарифма на комплексной плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси, удовлетворяющая условию $\log 1 = 0$.

Для нас будет важно следующее характеристическое определение меры $\mathcal{L}$. Обозначим через $A(X)$ группу (по умножению) всех неотрицательных измеримых функций $a(x)$ на X со сходящимся интегралом $\int_X \log a(x) dm(x) = c$ и через $A_0(X)$ подгруппу функций $a(x)$, для которых $c = 0$. Поставим в соответствие каждой функции $a \in A(x)$ оператор M_a умножения элементов $\xi = \sum_k r_k \delta_{x_k}$ конуса $l_+^1(X)$ на функцию $a(x)$:

$$M_a \sum_k r_k \delta_{x_k} = \sum_k a(x_k) r_k \delta_{x_k}.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Мера $\mathcal{L}$ на конусе $l_+^1(X)$ полностью характеризуется следующими двумя свойствами.*

1) *Проективная инвариантность относительно группы $\mathcal{M}$ мультипликаторов M_a : для любой функции $a \in A(X)$ оператор M_a умножает меру $\mathcal{L}$ на $\exp c$, т. е.*

$$d\mathcal{L}(a(\cdot)\xi) = \exp\left(\int_X \log a(x) dm(x)\right) d\mathcal{L}(\xi). \quad (2.3)$$

В частности, мера $\mathcal{L}$ инвариантна относительно подгруппы $\mathcal{M}_0$ мультипликаторов M_a , где $a \in A_0(X)$.

2) *Инвариантность и эргодичность относительно группы всех преобразований (X, t) , сохраняющих меру.²*

Выполнение этих свойств для меры $\mathcal{L}$ вытекает из формулы (2.2) для преобразования Лапласа этой меры. Достаточность см. в [20], [21].

Из теоремы 2.1 следует, что определенные так меры $\mathcal{L}$ зависят только от одного параметра $\theta = m(X)$ и что при свертке они образуют мультипликативную подгруппу относительно $\theta > 0$.

В конструкции интегральной модели достаточно ограничиться только одной из этих мер, а потому в дальнейшем будем предполагать, что $\theta = 1$, т. е. m – вероятностная мера. Меру $\mathcal{L}$ естественно назвать бесконечномерной лебеговой мерой, поскольку она обобщает свойства инвариантности конечномерной лебеговой меры на неотрицательном октанте. Новым в бесконечномерном случае является ее эргодичность относительно группы мультипликаторов, которую выделим особо.

²Как показано в [20], утверждение 2) является следствием из 1).

ТЕОРЕМА 2.2. *Группа мультипликаторов $\mathcal{M}$ действует эргодично на конусе $l_+^1(X)$ с мерой $\mathcal{L}$.³*

2.2. Вычисление некоторых интегралов по мере $\mathcal{L}$. Применим свойства меры $\mathcal{L}$ к вычислению следующего интеграла по мере $\mathcal{L}$:

$$I = \int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \varphi(r_k, x_k) \right) d\mathcal{L}(\xi), \quad (2.4)$$

где $\varphi(r, x)$ – функция на $\mathbb{R}_+^* \times X$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0, x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \int_X \int_0^{\infty} (\varphi(r, x) - e^{-r}) r^{-1} dr dm(x) < \infty. \quad (2.5)$$

ТЕОРЕМА 2.3. *Имеет место равенство:*

$$\int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \varphi(r_k, x_k) \right) d\mathcal{L}(\xi) = \exp \left(\int_X \int_0^{\infty} (\varphi(r, x) - e^{-r}) r^{-1} dr dm(x) \right). \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При проектировании $D_+(X) \rightarrow \Phi_\alpha$, где, напомним, Φ_α – конечномерное пространство, ассоциированное с разбиением $\alpha : X = \bigcup_{k=1}^n X_k$, левая часть равенства (2.4) принимает вид:

$$I_\alpha = \prod_{k=1}^m I_\alpha^k, \quad I_\alpha^k = \frac{1}{\Gamma(\lambda_k)} \int_0^{\infty} \varphi_{\alpha,k}(r_k) r_k^{\lambda_k-1} dr_k, \quad (2.7)$$

где $\lambda_k = m(X_k)$ и $\varphi_{\alpha,k}(r_k) = \lambda_k^{-1} \int_{X_k} \varphi(r_k, x) dm(x)$. Исходный интеграл I является индуктивным пределом интегралов I_α по множеству разбиений α .

Поскольку $\frac{1}{\Gamma(\lambda_k)} \int_0^{\infty} e^{-t} r_k^{\lambda_k-1} dr_k = 1$, интеграл I_α^k можно представить в виде

$$I_\alpha^k = 1 + \frac{1}{\Gamma(\lambda_k)} \int_0^{\infty} (\varphi_{\alpha,k}(r_k) - e^{-r_k}) r_k^{\lambda_k-1} dr_k.$$

Отсюда следует, что

$$I_\alpha^k = 1 + \lambda_k \int_0^{\infty} (\varphi_{\alpha,k}(r_k) - e^{-r_k}) r_k^{-1} dr_k + O(\lambda_k^2),$$

а потому

$$I_\alpha^k = \exp \left(\lambda_k \int_0^{\infty} (\varphi_{\alpha,k}(r_k) - e^{-r_k}) r_k^{-1} dr_k \right) + O(\lambda_k^2).$$

Таким образом, с точностью до членов порядка выше 1 относительно λ_k получаем:

$$I_\alpha \cong \exp \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \int_0^{\infty} (\varphi_{\alpha,k}(r) - e^{-r}) r^{-1} dr \right).$$

³В конечномерном случае эта группа есть $\text{S} \text{Diag}_+$ (положительная часть картановской группы), действующая транзитивно на каждой из гиперсфер $x_1 x_2 \cdots x_n = \text{const}$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, т. е. действие $\text{S} \text{Diag}_+$ на конусе $\mathbb{R}_+^n$ не эргодично.

Поскольку $\sum_{k=1}^m (\lambda_k(\varphi_{\alpha,k}(r) - e^{-r})) = \int_X (\varphi(r, x) - e^{-r}) dm(x)$, полученное выражение можно представить в виде

$$I_\alpha \cong \exp\left(\int_X \int_0^\infty (\varphi(r, x) - e^{-r}) r^{-1} dr dm(x)\right).$$

Отсюда, перейдя к индуктивному пределу по множеству разбиений α , получаем теорему⁴.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\varphi(r, x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(r, x)$, где $c_i > 0$, $\sum c_i = 1$ и функции $\varphi_i(r, x)$ удовлетворяют условию (2.5), то

$$\int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^\infty \varphi(r_k, x_k) \right) d\mathcal{L}(\xi) = \prod_{i=1}^n \exp\left(c_i \int_X \int_0^\infty (\varphi_i(r, x) - e^{-r}) r^{-1} dr dm(x)\right). \quad (2.8)$$

ПРИМЕР. Пусть $\varphi(r, x) = e^{-r^\sigma a(x)}$, где $\sigma \geq 1$ и $\operatorname{Re} a(x) > 0$. В этом случае получаем:

$$\int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^\infty e^{-r_k^\sigma a(x_k)} \right) d\mathcal{L}(\xi) = \exp\left(\int_X \int_0^\infty (e^{-r^\sigma a(x)} - e^{-r}) r^{-1} dr dm(x)\right).$$

Вычислим интеграл по r . Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (e^{-r^\sigma a(x)} - e^{-r}) r^{-1} dr &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\int_0^\infty (e^{-r^\sigma a(x)} - e^{-r}) r^{\lambda-1} dr \right) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(\sigma^{-1} \Gamma\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right) a^{-\lambda/\sigma}(x) - \Gamma(\lambda) \right). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $\Gamma(\lambda) \sim \lambda^{-1} + \gamma$ при $\lambda \rightarrow 0$, где γ – постоянная Эйлера, следует:

$$\int_0^\infty (\exp(-r^\sigma a(x)) - \exp(-r)) r^{-1} dr = -\sigma^{-1} \log a(x) + (\sigma^{-1} - 1)\gamma.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^\infty \exp(-r_k^\sigma a(x_k)) \right) d\mathcal{L}(\xi) \\ = \exp((\sigma^{-1} - 1)\gamma) \exp\left(-\sigma^{-1} \int_X \log a(x) dm(x)\right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

В частности, при $\sigma = 1$ получаем исходную формулу для преобразования Лапласа меры $\mathcal{L}$:

$$\int_{l_+^1(X)} \prod_{k=1}^\infty \exp\left(-\sum r_k a(x_k)\right) d\mathcal{L}(\xi) = \exp\left(-\int_X \log a(x) dm(x)\right).$$

⁴ Поскольку мера $\mathcal{L}$ абсолютно непрерывна по мере, порождаемой гамма-процессом Леви (см. [22]), то приведенный результат может быть получен с помощью аналогичных вычислений для процессов Леви.

3. Канонические представления группы P_0 и ассоциированные с ними представления группы токов P_0^X

3.1. Определение канонических представлений. Рассматриваются полупрямые произведения $P = A \ltimes P_0$ локально компактной группы P_0 и ее мультипликативной группы автоморфизмов $A \cong \mathbb{R}_+^*$. Будем обозначать через g^a образ элемента $g \in P_0$ под действием автоморфизма $a \in A$.

В дальнейшем термин “представление” подразумевает, если не оговорено противное, ортогональное или унитарное представление группы.

Группа автоморфизмов A естественно действует в множестве всех представлений группы P_0 , преобразуя каждое представление $T(g)$ в представление $T_a(g) = T(g^a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем представление T группы P_0 в гильбертовом пространстве H *каноническим*, если существуют циклический вектор $h \in H$ с нормой $\|h\| = 1$ и изоморфизм $\sigma: \mathbb{R}_+^* \rightarrow A$ такие, что

1) имеет место оценка

$$\|T_{\sigma(r)}(g)h - h\| < c(g)r \quad \text{для любого } g \in P_0 \quad (3.1)$$

при достаточно малом r ;

2) представления $T_a(g) = T(g^a)$ группы P_0 попарно не эквивалентны.

Назовем циклический вектор $h \in H$, удовлетворяющий условию (3.1), *почти инвариантным* относительно представления T , а представления $T_a(g) = T(g^a)$ группы P_0 – сопряженными с представлением T .

В дальнейшем будем отождествлять элементы $a \in A$ с их прообразами $r \in \mathbb{R}_+^*$ при изоморфизме σ и писать g^r и T_r вместо $g^{\sigma(r)}$ и $T_{\sigma(r)}$. Таким образом, условие (3.1) будет записываться в виде

$$\|T_r(g)h - h\| < c(g)r \quad \text{для любого } g \in P_0. \quad (3.2)$$

Из определения 1 следует, что представления T_r образуют деформацию единичного представления группы P_0 , т. е. в топологии Фелла на множестве представлений любая окрестность единичного представления содержит все представления T_r , начиная с достаточно малого r .

Из определения каноничности также вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если представление T группы P_0 в пространстве H канонично, то для любой суммируемой числовой последовательности $\{r_k\}$, $r_k > 0$ ($\sum r_k < \infty$), и любого $g \in P_0$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T_{r_k}(g)h - h\| < \infty, \quad (3.3)$$

где $h \in H$ – почти инвариантный относительно T вектор.

Заметим, что в пространстве H канонического представления T почти инвариантный вектор h может быть не единственным; пример (одномерное расширение группы Гейзенберга) будет рассмотрен позже.

Для дальнейшего полезно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Если в пространстве H представления T группы P_0 существует единственный, с точностью до множителя, единичный циклический вектор h , удовлетворяющий условию 1) определения 1, то представление T канонично, т. е. оно удовлетворяет также условию 2) этого определения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что условие 2) не выполнено, т. е. существуют два эквивалентных представления T_r , для определенности, представления $T = T_1$ и T_{r_0} , где $r_0 < 1$. Значит, существует унитарный оператор A такой, что $A^{-1}T(g)A = T_{r_0}(g)$ для любого $g \in P_0$. Тогда имеем:

$$A^{-n}T_r(g)A^n = T_{r_0^n r}(g) \quad \text{для любых } g \in P_0, \quad r > 0 \text{ и } n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, если $h \in H$ – циклический единичный вектор, удовлетворяющий условию 1), то из этого условия следует:

$$\|T_r(g)A^n h - A^n h\| < c(g)r_0^n r \quad \text{при любом } g \in P_0. \quad (3.4)$$

В силу этой оценки, все векторы $h_n = A^n h$ также удовлетворяют условию 1). При этом $Ah \neq ch$. В противном случае можно было бы предположить, что $Ah = h$, а тогда из полученной оценки следовало бы, что

$$\|T_r(g)h - h\| < c(g)r_0^n r \quad \text{при любом } g \in P_0 \text{ и } n = 1, 2, \dots,$$

т. е. h – инвариантный вектор, что противоречит предположению о его циклическости. Таким образом, вектор h , удовлетворяющий условию 1), не единствен, что противоречит условию предложения.

ПРИМЕЧАНИЕ. В ряде предшествующих статей (см., например, [1], [12], [24]) под термином “канонические представления” подразумевалось однопараметрическое семейство представлений T_r , $r > 0$, со сферическими функциями вида $\varphi_r(g) = e^{r\psi(g)}$.

Более слабым условием каноничности семейства представлений T_r является существование производной при $r \rightarrow 0$ у сферических функций этого семейства,

$$\psi(g) = \left. \frac{d\varphi_r(g)}{dr} \right|_{r=0},$$

являющейся условно положительно определенной функцией (генератор системы). Этому условию удовлетворяет, например, семейство представлений дополнительной серии групп $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$. Существование у них генератора следует из оценки $\|T_r(g)h - h\|^2 < c(g)r$, более слабой, чем условия (3.2) и (3.3). Различные подходы к понятию каноничности мы обсудим в другом месте⁵.

3.2. Представления группы $l^\infty(P_0)$ и группы токов P_0^X , ассоциированные с каноническими представлениями подгруппы P_0 . Обозначим через $l^\infty(P_0)$ группу всех бесконечных ограниченных последовательностей $g = \{g_1, g_2, \dots\}$ элементов из P_0 с покомпонентным умножением и поставим

⁵Канонические представления в близком смысле рассматривались также в других работах, см., например, [26].

в соответствие каждому каноническому представлению T группы P_0 семейство представлений группы $l^\infty(P_0)$.

Для этого воспользуемся следующим хорошо известным определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Счетной тензорной степенью гильбертова пространства H со стабилизирующим единичным вектором $h \in H$ называется пополнение индуктивного предела конечных тензорных степеней $\bigotimes_{i=1}^n H$ пространства H при их изометрическом вложении: $\bigotimes_{i=1}^n H \ni f \mapsto f \otimes h \in \bigotimes_{i=1}^{n+1} H$. Будем обозначать этот предел через $\tilde{H} = \bigotimes_{i=1}^\infty (H, h)$ или, коротко, через $\bigotimes_{i=1}^\infty H$.

Другими словами, $\tilde{H}$ есть гильбертово пространство, полученное пополнением по норме пространства $\lim \text{ind}_{n \rightarrow \infty} \bigotimes_{i=1}^n H$.

Элементы $\bigotimes_{k=1}^n f_k$ из подпространств $\bigotimes_{k=1}^n H \subset \tilde{H}$ естественно представлять в форме бесконечных произведений, стабилизирующихся на $(n+1)$ -м шаге:

$$y_n = f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n \otimes h \otimes h \otimes \cdots, \quad \text{где } f_k \in H; \quad (3.5)$$

они образуют тотальное подмножество в $\tilde{H}$.

ЛЕММА. Если $\sum_{n=1}^\infty \|f_n - h\| < \infty$, то последовательность $\{y_n\}$ вида (3.5) сходится по норме пространства $\tilde{H}$.

Пределы таких последовательностей $\{y_n\}$ будем записывать в форме бесконечных произведений $y = \bigotimes_{n=1}^\infty f_n$, где $\sum_{n=1}^\infty \|f_n - h\| < \infty$, и в дальнейшем при описании пространства $\tilde{H}$ будем ограничиваться только такими элементами из $\tilde{H}$ и их конечными линейными комбинациями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Свяжем с каждым каноническим представлением T группы P_0 в пространстве H с почти инвариантным вектором $h \in H$ и с каждой последовательностью $\{r_k\}$, $r_k > 0$, такой, что $\sum r_k < \infty$, следующее представление группы $l^\infty(P_0)$ в пространстве $\bigotimes_{k=1}^\infty (H, h)$:

$$\tilde{T}_{\{r_n\}}(g) \left(\bigotimes_{n=1}^\infty f_n \right) = \bigotimes_{n=1}^\infty (T_{r_n}(g_n) f_n) \quad \text{при } g = \{g_1, g_2, \dots\}.$$

Убедимся, что это определение корректно, т. е. из условия $\sum_{n=1}^\infty \|f_n - h\| < \infty$ следует, что $\sum_{n=1}^\infty \|T_{r_n}(g_n) f_n - h\| < \infty$ для любого $g = \{g_1, g_2, \dots\} \in l^\infty(P_0)$. В самом деле, имеем:

$$\|T_{r_n}(g_n) f_n - h\| \leq \|f_n - h\| + \|T_{r_n}(g_n) h - h\|.$$

Из каноничности представления T и ограниченности последовательности $\{g_n\}$ следует, что для любого $g \in l^\infty(P_0)$ верна оценка $\|T_{r_n}(g_n) h - h\| \leq c r_n$. Значит, из условия $\sum r_k < \infty$ следует, что $\sum_{n=1}^\infty \|T_{r_n}(g_n) h - h\| < \infty$. Отсюда следует утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если каноническое представление T группы P_0 неприводимо, то ассоциированные с T представления $T_{\{r_n\}}$ группы $l^\infty(P_0)$ неприводимы и попарно не эквивалентны.

В самом деле, неприводимость представлений $T_{\{r_n\}}$ группы $l^\infty(P_0)$ следует непосредственно из неприводимости представления T группы P_0 . Их попарная неэквивалентность следует из попарной неэквивалентности представлений T_r группы P_0 , сопряженных с представлением T .

Построим теперь, исходя из представлений $T_{\{r_n\}}$ группы $l^\infty(P_0)$, представления группы токов P_0^X . Для этого поставим в соответствие каждому элементу $\xi = \{r_k, x_k\} \in l^1(X)$ гомоморфизм $P_0^X \rightarrow l^\infty(P_0)$:

$$\sigma_\xi: g(\cdot) \mapsto (g(x_1), g(x_2), \dots).$$

Тем самым для каждого элемента $\xi = \{r_k, x_k\} \in l^1(X)$ определено представление T_ξ группы P_0^X , пропущенное через этот гомоморфизм. Пространство этого представления есть счетное тензорное произведение $H_\xi = \bigotimes_{k=1}^\infty H_{r_k}$, $H_{r_k} = H$. Операторы представления T_ξ , $\xi = \{r_k, x_k\}$, в пространстве H_ξ задаются формулой:

$$T_\xi(g(\cdot)) \left(\bigotimes_{k=1}^\infty f_k \right) = \bigotimes_{k=1}^\infty (T_{r_k}(g(x_k)) f_k).$$

Отметим, что представление T_ξ , $\xi = \{r_n, x_n\}$, группы P_0^X есть счетное тензорное произведение локальных представлений группы P_0^X :

$$T_\xi = \bigotimes_{n=1}^\infty T_{r_n, x_n}, \quad \text{где } T_{r_n, x_n}(g(\cdot)) = T_{r_n}(g(x_n)).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Если каноническое представление T группы P_0 неприводимо, то представления T_ξ группы P_0^X неприводимы и попарно не эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что представления $T_{r,x}$ и $T_{r',x'}$ группы P_0^X не эквивалентны при $(r, x) \neq (r', x')$. При $r \neq r'$ это следует из попарной неэквивалентности представлений T_r группы P_0 . При $r = r'$ это следует из разделяемости точек x и x' элементами из P_0^X , т. е. существования элемента $g \in P_0^X$ такого, что $g(x) \neq g(x')$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как уже отмечалось, почти инвариантный вектор $h \in H$, ассоциированный с каноническим представлением T группы P_0 , может быть неединственным, например, если P_0 – группа Гейзенберга (см. ниже). Тогда построенные представления T_ξ группы P_0^X зависят и от выбора почти инвариантного вектора $h \in H$. Нетрудно убедиться, что семейства этих представлений, связанные с почти инвариантными векторами h и h' , эквивалентны тогда и только тогда, когда $h' = ch$, где $|c| = 1$.

3.3. Пример: $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, где P_0 – группа Гейзенберга порядка $2n-1$. Реализуем P_0 как группу пар (t, z) , $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$, с законом умножения $(t_1, z_1)(t_2, z_2) = (t_1 + t_2 - \text{Im}(z_1 z_2^*), z_1 + z_2)$. Элементы $r \in \mathbb{R}_+^*$ и $(t, z) \in P_0$ связаны соотношением $r(t, z)r^{-1} = (r^2 t, rz)$.

С точностью до сопряженности, имеются два бесконечномерных унитарных неприводимых канонических представления группы P_0 (см. [27]), действующих

в гильбертовых пространствах $H^\pm$ соответственно целых аналитических и целых антианалитических функций $f(z) = f(z_1, \dots, z_{n-1})$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 \exp(-zz^*) d\mu(z), \quad (3.6)$$

где $zz^* = \sum z_i \bar{z}_i$ и $d\mu(z)$ – лебегова мера на $\mathbb{C}^{n-1}$, нормированная условием

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} \exp(-zz^*) d\mu(z) = 1.$$

Операторы представления T^+ в пространствах H^+ имеют вид:

$$(T^+(t_0, z_0)f)(z) = \exp(\zeta_0 - zz_0^*)f(z + z_0), \quad \text{где } \zeta_0 = it_0 - \frac{1}{2}z_0z_0^*. \quad (3.7)$$

Операторы T^- второго представления получаются из них комплексным сопряжением.

В этом примере операторы T_r^+ представлений, сопряженных с представлением T^+ , задаются формулой

$$(T_r^+(t_0, z_0)f)(z) = \exp(r^2\zeta_0 - rzz_0^*)f(z + rz_0).$$

Нетрудно убедиться, что представления T^r попарно не эквивалентны. Далее, из определения нормы в H^+ следует, что любой моном $f(z) = z_1^{k_1} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}}$, а значит, и любая конечная линейная комбинация таких мономов почти инвариантны относительно представления T^+ , т. е. имеет место оценка $\|T_r^+(g)f - f\| < c(g)r$. Следовательно, представление T^+ группы Гейзенберга канонично, и множество связанных с ним почти инвариантных векторов всюду плотно в пространстве представления. Аналогичное утверждение справедливо для второго представления T^- .

4. Представления группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ и ее группы токов P^X , ассоциированные с каноническими представлениями подгруппы P_0

4.1. Представления группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, ассоциированные с представлениями подгруппы P_0 . Свяжем с каждым ортогональным или унитарным представлением T подгруппы P_0 прямой интеграл по мультипликативной мере Хаара $d^*r = r^{-1}dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ ее представлений T_r в пространствах $H_r = H$. Определенное так представление $\tilde{T}$ группы P_0 действует в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r d^*r,$$

т. е. в пространстве сечений $f(r)$ расслоения над $\mathbb{R}_+^*$, где слоем над $r \in \mathbb{R}_+^*$ служит пространство H_r , таких, что $\int_X \|f(r)\|^2 d^*r < \infty$. Операторы $\tilde{T}(g_0)$, $g_0 \in P_0$, действуют на $\mathcal{H}$ послойно, т. е.

$$(\tilde{T}(g_0)f)(r) = T_r(g_0)f(r) \quad \text{при } g \in P_0. \quad (4.1)$$

Это представление подгруппы P_0 продолжаемо на всю группу P . Именно, операторы подгруппы $\mathbb{R}_+^*$ в пространстве $\mathcal{H}$ задаются равенством

$$(\tilde{T}(r_0)f)(r) = f(r_0r) \quad \text{при } r_0 \in \mathbb{R}_+^*. \quad (4.2)$$

(Другими словами, операторы $\tilde{T}(r_0)$ переставляют слои расслоения над $\mathbb{R}_+^*$.) Очевидно, что операторы $\tilde{T}(r_0)$ сохраняют скалярное произведение на $\mathcal{H}$, и легко убедиться, что вместе с операторами подгруппы P_0 они порождают представление всей группы P . Назовем это представление группы P *ассоциированным* с исходным представлением T подгруппы P_0 .

Элементы $g \in P$ будем дальше представлять в форме произведений $g = rg_0$, где $r \in \mathbb{R}_+^*$ и $g_0 \in P_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Если представление T подгруппы P_0 канонично и неприводимо, то ассоциированное с T представление $\tilde{T}$ группы P также неприводимо.*

Утверждение следует из неприводимости и попарной неэквивалентности представлений T_r .

ТЕОРЕМА 4.1. *Если представление T подгруппы P_0 в пространстве H канонично, то ассоциированное с T представление $\tilde{T}$ группы P в пространстве $\mathcal{H}$ обладает нетривиальным 1-коциклом $b: P \rightarrow \mathcal{H}$ вида⁶*

$$b(g, r) = (\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r), \quad \text{где } f_0(r) = e^{-r/2}h_r, \quad (4.3)$$

$h_r = h$ – почти инвариантный относительно T вектор в H .

В самом деле, из условия каноничности T следует, что $b(g) \in \mathcal{H}$ при любом $g \in P$. Очевидно, далее, что b есть 1-коцикл. Поскольку $f_0 \neq \mathcal{H}$, этот 1-коцикл нетривиален.

Свяжем с 1-коциклом $b(g)$ следующую функцию на P :

$$c(g) = \langle b(g), f_0 \rangle. \quad (4.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеют место соотношения:*

$$\|b(g)\|^2 = -\tau(g) - 2 \operatorname{Re} c(g) \quad \text{для любого } g \in P, \quad (4.5)$$

где

$$\tau(g) = \log r_0 \quad \text{при } g = r_0 g_0, \quad (4.6)$$

и

$$\langle \tilde{T}(g)b(g'), b(g) \rangle = -c(gg') + c(g) + c(g') \quad \text{для любых } g, g' \in P. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (4.3) следует, что

$$\|b(g)\|^2 = \int_0^\infty F(r) r^{-1} dr,$$

где

$$F(r) = \|(\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r)\|_{H_r}^2.$$

⁶О коциклах со значениями в унитарных представлениях см. [28], [4], [29], а также [7].

Выражение для $F(r)$ преобразуемо к следующему виду:

$$F(r) = -2 \operatorname{Re} \langle (\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r), f_0(r) \rangle_{H_r} + \|(\tilde{T}(g)f_0)(r)\|_{H_r}^2 - \|f_0(r)\|_{H_r}^2.$$

Следовательно, поскольку $\|f_0(r)\|_{H_r}^2 = e^{-r}$ и $\|(\tilde{T}(g)f_0)(r)\|_{H_r}^2 = e^{-r_0 r}$ при $g = r_0 g_0$, получаем:

$$\|b(g)\|^2 = -2 \operatorname{Re} \langle b(g), f_0 \rangle + \int_0^\infty (e^{-r_0 r} - e^{-r}) r^{-1} dr.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (e^{-r_0 r} - e^{-r}) r^{-1} dr &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^\infty (e^{-r_0 r} - e^{-r}) r^{\lambda-1} dr \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (r_0^{-\lambda} - 1) \Gamma(\lambda) = -\log r_0, \end{aligned}$$

отсюда следует (4.5).

2) Из равенств $b(g) = \tilde{T}(g)f_0 - f_0$ и $\tilde{T}(g)b(g') = b(gg') - b(g)$ следует:

$$\langle \tilde{T}(g)b(g'), b(g) \rangle = \langle \tilde{T}(g)b(g'), \tilde{T}(g)f_0 \rangle - c(gg') + c(g).$$

Для доказательства (4.7) остается убедиться, что

$$\langle \tilde{T}(g)b(g'), \tilde{T}(g)f_0 \rangle = \langle b(g'), f_0 \rangle = c(g').$$

Имеем при $g = r_0 g_0$, $g' = r'_0 g'_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(g)b(g')|_{H_r} &= \exp\left(-\frac{1}{2} r_0 r'_0 r\right) T_{r_0 r}(g_0) T_{r_0 r'_0 r}(g'_0) h_r - \exp\left(-\frac{1}{2} r_0 r\right) T_{r_0 r}(g_0) h_r, \\ \tilde{T}(g)f_0|_{H_r} &= \exp\left(-\frac{1}{2} r_0 r\right) T_{r_0 r}(g_0) h_r. \end{aligned}$$

В силу унитарности операторов $T(g)$ группы P_0 и мультипликативной инвариантности меры d^*r отсюда следует, что

$$\langle \tilde{T}(g)b(g'), \tilde{T}(g)f_0 \rangle = \int_0^\infty \langle e^{-r'_0 r/2} T(r'_0 r) h - e^{-r/2} h, e^{-r/2} h \rangle d^*r = \langle b(g'), f_0 \rangle.$$

4.2. Интегральная модель представления группы токов P^X . Перейдем к основной конструкции этого раздела. Свяжем с каждым каноническим представлением T подгруппы P_0 в гильбертовом пространстве H с почти инвариантным относительно T вектором $h \in H$ представление U группы P^X , которое назовем *интегральной моделью*, ассоциированной с представлением T подгруппы P_0 , и обозначим через $\operatorname{INT} T$.

Конструкция представления $\operatorname{INT} T$ группы P^X параллельна приведенной ранее конструкции представления $\tilde{T}$ группы P по представлению T подгруппы P_0 . Именно, мы заменяем в этой конструкции пространства H_r , $r \in \mathbb{R}_+^*$, с действующими на них представлениями T_r группы P_0 пространствами H_ξ , $\xi = \{r_k, x_k\} \in l_+^1(X)$, с действующими на них представлениями T_ξ группы P_0^X ,

а прямой интеграл по мере $r^{-1} dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ пространств H_r – прямым интегралом по мере $d\mathcal{L}(\xi)$ на конусе $l_+^1(X)$ пространств H_ξ . Таким образом, согласно этой конструкции, интегральная модель представления группы P^X , ассоциированная с каноническим представлением T группы P_0 , реализуется в прямом интеграле по мере $\mathcal{L}$ гильбертовых пространств H_ξ ,

$$\text{INT } H = \int_{l_+^1(X)} H_\xi d\mathcal{L}(\xi), \quad H_\xi = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_{r_k},$$

т. е. в пространстве сечений $F(\xi) = F(\{r_k, x_k\})$ расслоения над конусом $l_+^1(X)$, где слоем над каждой точкой $\xi = \{r_k, x_k\}$ является счетное тензорное произведение $H_\xi = \bigotimes_{k=1}^{\infty} H_{r_k}$, $H_{r_k} = H$. (От ξ этот слой как гильбертово пространство не зависит, но само представление зависит.) Действие группы P_0^X в каждом слое этого расслоения индуцирует представление этой группы на всем пространстве $\text{INT } H$:

$$U(g) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} f_k(r_k) \right) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} T(g(x_k)) f_k(r_k) \quad \text{при } g \in P_0^X. \quad (4.8)$$

Определим операторы $U(r_0(\cdot))$ представления группы $\mathbb{R}_+^X$ в пространстве $\text{INT } H$ следующей формулой:

$$(U(r_0(\cdot))F)(\{r_k, x_k\}) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x) \right) F(\{r_0(x_k) r_k, x_k\})$$

для любого $r(\cdot) \in \mathbb{R}_+^X$. Таким образом, эти операторы переставляют слои расслоения $\text{INT } H$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Операторы $U(r_0(\cdot))$, $r_0(\cdot) \in \mathbb{R}_+^X$, ортогональны (унитарны) и порождают вместе с операторами подгруппы P_0^X ортогональное (унитарное) представление группы токов P^X , инвариантное относительно преобразований X , сохраняющих меру t на X :*

$$U(g) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} f_k(r_k) \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x) \right) \bigotimes_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(g(x_k) f_k)(r_k) \quad (4.9)$$

для любого $g = r_0 g_0 \in P^X$ ($r_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^X$, $g_0 \in P_0^X$), где $\tilde{T}$ – представление группы P , ассоциированное с представлением T подгруппы P_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ортогональность (унитарность) операторов $U(r_0(\cdot))$ следует из проективной инвариантности меры $\mathcal{L}$, см. (2.3). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|U(r_0(\cdot))F\|^2 &= \exp \left(\int_X \log r_0(x) dm(x) \right) \int_{l_+^1} \|F(r_0(\cdot)\xi)\|^2 d\mathcal{L}(\xi) \\ &= \exp \left(\int_X \log r_0(x) dm(x) \right) \int_{l_+^1} \|F(\xi)\|^2 d\mathcal{L}(r_0^{-1}(\cdot)\xi) = \|F\|^2, \end{aligned}$$

поскольку $d\mathcal{L}(r_0^{-1}(\cdot)\xi) = \exp \left(- \int_X \log r_0(x) dm(x) \right) d\mathcal{L}(\xi)$.

Далее, из формул для операторов следует, что выполняется соотношение:

$$U^{-1}(r_0(\cdot)) U(g_0(\cdot)) U(r_0(\cdot)) = U(r_0^{-1}(\cdot) g_0(\cdot) r_0(\cdot))$$

для любых $g_0(\cdot) \in P_0^X$ и $r_0(\cdot) \in \mathbb{R}_+^X$. Значит, эти операторы порождают представление группы P^X .

Поскольку мера $\mathcal{L}$ на $l_+^1(X)$ сохраняется при любых преобразованиях X , сохраняющих меру m на X , то полученное представление группы P^X также инвариантно относительно этих преобразований. Предложение 4.3 доказано.

На основании (4.5) выражение (4.9) для $U(g)$, $g \in P^X$, может быть представлено в виде

$$U(g) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} f_k(r_k) \right) = \exp \left(- \int_X \lambda(g(x)) dm(x) \right) \bigotimes_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(g(x_k) f_k)(r_k), \quad (4.10)$$

где

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \operatorname{Re} c(g). \quad (4.11)$$

Мы называем построенное представление группы P^X интегральной моделью, ассоциированной с каноническим представлением T группы P_0 , и обозначаем его, по аналогии фоковскими представлениями, через $\operatorname{INT} T$, а через $\operatorname{INT} H$ обозначаем гильбертово пространство, в котором оно реализовано.

Из описания интегральной модели вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Если T_1 и T_2 – канонические представления группы P_0 в пространствах H_1 и H_2 , то*

$$\operatorname{INT}(H_1 \oplus H_2) = \operatorname{INT} H_1 \otimes \operatorname{INT} H_2,$$

и в этом пространстве действует интегральная модель $\operatorname{INT}(T_1 \oplus T_2)$ представления группы G^X , ассоциированная с представлением $T_1 \oplus T_2$ группы P_0 .

ТЕОРЕМА 4.3. *Если каноническое представление T группы P_0 неприводимо, то ассоциированное с T представление $U = \operatorname{INT} T$ группы токов P^X также неприводимо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала операторы $U(g(\cdot))$, $g(\cdot) \in P_0^X$. Они сохраняют слои H_ξ расслоения $\operatorname{INT} H$, и, в силу предложения 3.3, определенные ими на этих слоях представления группы P_0^X неприводимы и попарно не эквивалентны. Поэтому любой оператор A на $\operatorname{INT} H$, перестановочный с этими операторами, кратен единичному оператору на каждом слое расслоения $\operatorname{INT} H$, т.е. является оператором умножения на функцию $a(\xi) = a(\{r_k, x_k\})$. Если этот оператор A перестановочен также с операторами $U(r_0(\cdot))$, $r_0(\cdot) \in \mathbb{R}_+^X$, то функция $a(\{r_k, x_k\})$ постоянна на орбитах группы мультипликаторов $\mathcal{M}$, действующей в $l_+^1(X)$ умножением на положительные функции $r_0(\cdot): \{r_k, x_k\} \mapsto \{r_0(x_k) r_k, x_k\}$. Отсюда, в силу эргодичности меры $\mathcal{L}$, следует, что оператор A есть константа.

4.3. Тотальное подмножество $M \subset \text{INT } H$. Обозначим через Ω и назовем *вакуумным* вектор в пространстве $\text{INT } H$ представления группы P^X вида:

$$\Omega(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} f_0(r_k) \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}, \quad \text{где } f_0(r) = e^{-r/2} h_r. \quad (4.12)$$

Из формулы для характеристического функционала меры $\mathcal{L}$ следует, что $\|\Omega\| = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Поставим в соответствие каждому элементу $g \in P^X$ следующий вектор в пространстве $\text{INT } H$:

$$F_g(\xi) = \exp\left(\int_X \left(\frac{1}{2} \|b(g(x))\|^2 - i \text{Im } c(g(x))\right) dm(x)\right) U(g) \Omega(\xi), \quad (4.13)$$

где $c(g) = \langle b(g), f_0 \rangle$.

В силу цикличности Ω , множество M векторов F_g , $g \in P^X$, тотально в пространстве представления.

Поскольку

$$(U(g)\Omega)(\xi) = \exp\left(-\int_X \lambda(g(x)) dm(x)\right) \bigotimes_{k=1}^{\infty} (\tilde{T}(g(x_k))f_0)(r_k) \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}, \quad (4.14)$$

где $\lambda(g) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \text{Re } c(g)$, выражение для F_g можно представить в виде

$$F_g(\xi) = \exp\left(-\int_X c(g(x)) dm(x)\right) \bigotimes_{k=1}^{\infty} (\tilde{T}(g(x_k))f_0)(r_k) \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}. \quad (4.15)$$

Вектор $\Omega = F_e$ и порожденное им множество векторов F_g можно рассматривать как аналоги вакуумного вектора $\text{EXP } 0$ и порожденного им множества векторов $\text{EXP } b^X(g)$ в пространстве фоковского представления. Приведем основные свойства множества M .

Из определения векторов F_g вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Операторы представления действуют на векторы F_g по формуле*

$$U(g)F_{g_1} = \exp\left(-\int_X (c(g_1(x)) - c(gg_1(x)) + \lambda(g(x))) dm(x)\right) F_{gg_1}, \quad (4.16)$$

где $\lambda(g) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \text{Re } c(g)$.

В самом деле, имеем:

$$\begin{aligned} (U(g)F_{g_1})(\xi) &= \exp\left(-\int_X c(g_1(x)) dm(x)\right) U(g) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(g_1(x_k))f_0(r_k)\right) \\ &= \exp\left(-\int_X (c(g_1(x)) + \lambda(g(x))) dm(x)\right) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} \tilde{T}(gg_1(x_k))f_0(r_k)\right) \\ &= \exp\left(-\int_X (c(g_1(x)) + \lambda(g(x)) - c(gg_1(x))) dm(x)\right) F_{gg_1}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Скалярное произведение на множестве векторов F_g задается формулой

$$\langle F_{g_1}, F_{g_2} \rangle = \exp \left(\int_X \langle b(g_1(x)), b(g_2(x)) \rangle dm(x) \right) \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in P^X. \quad (4.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения векторов F_g следует:

$$\langle F_{g_1}, F_{g_2} \rangle = \exp \left(- \int_X (c(g_1(x)) + \overline{c(g_2(x))}) dm(x) \right) I, \quad (4.18)$$

где

$$I = \int_{l_+^1(X)} \prod_{k=1}^{\infty} \langle (\tilde{T}(g_1(x_k))f_0)(r_k), (\tilde{T}(g_2(x_k))f_0)(r_k) \rangle_H d\mathcal{L}(\xi). \quad (4.19)$$

Для вычисления I воспользуемся общей формулой (2.6). Обозначим

$$\varphi(r, x) = \langle (\tilde{T}(g_1(x))f_0)(r), (\tilde{T}(g_2(x))f_0)(r) \rangle_H.$$

Отсюда на основании (2.6) получаем:

$$I = \exp \left(\int_X \int_0^{\infty} (\varphi(r, x) - e^{-r}) d^*r dm(x) \right).$$

Преобразуем подынтегральное выражение. Поскольку $\tilde{T}(g_1(x))f_0 = b(g_1(x)) + f_0$ и $e^{-r} = \langle f_0(r), f_0(r) \rangle_H$, функцию $\varphi(r, x)$ можно представить в виде

$$\varphi(r, x) = \langle b(g_1(x), r), b(g_2(x), r) \rangle_H + \langle b(g_1(x), r), f_0(r) \rangle_H + \overline{\langle b(g_2(x), r), f_0(r) \rangle_H}.$$

Интегрируя это выражение по r , получаем:

$$I = \exp \left(\int_X (\langle b(g_1(x)), b(g_2(x)) \rangle + c(g_1(x)) + \overline{c(g_2(x))}) dm(x) \right).$$

Отсюда и из (4.18) получаем (4.17).

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через K подгруппу элементов $k \in P$ таких, что $b(k) = 0$. Очевидно, что два вектора F_{g_1} и F_{g_2} совпадают тогда и только тогда, когда $g_2 = g_1 k$, где $k \in K^X$. Поэтому множество попарно различных векторов F_g естественно отождествляется с факторпространством G^X/K^X .

4.4. Сферическая функция представления $U = \text{INT } T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Сферической функцией представления $U = \text{INT } T$ группы P^X назовем следующую функцию на P^X :

$$\Psi(g) = \langle U(g)\Omega, \Omega \rangle, \quad \text{где } \Omega(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} f_0(r_k) \text{ при } \xi = \{r_k, x_k\}. \quad (4.20)$$

Поскольку представление U неприводимо, эта функция определяет его однозначно, с точностью до эквивалентности.

ТЕОРЕМА 4.4. *Сферическая функция $\Psi(g)$ представима в виде:*

$$\Psi(g) = \exp\left(\int_X \left(i \operatorname{Im} c(g(x)) - \frac{1}{2} \|b(g(x))\|^2\right) dm(x)\right), \quad (4.21)$$

где $b(g)$ – 1-коцикл представления $\tilde{T}$ группы P , ассоциированного с представлением T подгруппы P_0 :

$$b(g) = (\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r), \quad f_0(r) = e^{-r/2} \quad (4.22)$$

и $c(g) = \langle b(g(x)), f_0 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.21) следует из формулы (4.17) для скалярного произведения векторов F_g и формулы (4.13), выражающей F_g через вектор $U(g)\Omega$. Для полноты приведем ее прямой вывод. Имеем на основании (4.14):

$$\Psi(g) = \exp\left(-\int_X \lambda(g(x)) dm(x)\right) \int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{T}(g(x_k)f_0)(r_k), f_0(r_k) \rangle\right) d\mathcal{L}(\xi), \quad (4.23)$$

где $\lambda(g) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \operatorname{Re} c(g)$. Для вычисления интеграла

$$I = \int_{l_+^1(X)} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \langle \tilde{T}(g(x_k)f_0)(r_k), f_0(r_k) \rangle\right) d\mathcal{L}(\xi)$$

перейдем к проекциям конуса $l_+^1(X)$ на конечномерные конусы Φ_α , ассоциированные с разбиениями $\alpha: X = \bigcup_{k=1}^m X_k$ пространства X . В проекции на Φ_α выражение для I принимает вид:

$$I_\alpha = \prod_{k=1}^m I_\alpha^k, \quad \text{где } I_\alpha^k = \int_0^\infty \langle (\tilde{T}(g_k)f_0)(r_k), f_0(r_k) \rangle_H \frac{r_k^{\lambda_k-1} dr_k}{\Gamma(\lambda_k)}.$$

Здесь обозначено: $g_k = g(x)|_{X_k}$. Подставим сюда выражение для $\tilde{T}(g_k)f_0$ через нетривиальный 1-коцикл $b(g, r)$:

$$(\tilde{T}(g_k)f_0)(r_k) = b(g_k, r_k) + f_0(r_k).$$

Учитывая, что $\int_0^\infty \|f_0(r)\|^2|_H \frac{r^{\lambda_k-1} dr_k}{\Gamma(\lambda_k)} = 1$, получаем

$$I_\alpha^k = 1 + \int_0^\infty \langle b(g_k, r), f_0(r) \rangle_H \frac{r^{\lambda_k-1} dr}{\Gamma(\lambda_k)}.$$

Отсюда следует, что

$$I_\alpha^k = 1 + \lambda_k \int_0^\infty \langle b(g_k, r), f_0(r) \rangle r^{-1} dr + O(\lambda_k^2) = 1 + \lambda_k c(g_k) + O(\lambda_k^2).$$

Следовательно, $I_\alpha = \prod_{k=1}^m (1 + c(g_k) + O(\lambda_k^2))$. Так как

$$\sum \lambda_k c(g_k) = \int_X c(g(x)) dm(x),$$

где $g(x)$ – кусочно постоянная функция со значениями g_k на элементах разбиения α , полученное выражение, с точностью до членов порядка выше 1 относительно λ_k , можно представить в виде: $I_\alpha \sim \exp\left(\int_X c(g(x)) dm(x)\right)$. Переходя здесь к индуктивному пределу по множеству конечных разбиений α , получаем выражение для I :

$$I = \exp\left(\int_X c(g(x)) dm(x)\right).$$

Отсюда и из (4.23) следует формула (4.21) для $\Psi(g)$.

4.5. Связь между интегральной и фоковской моделями представлений группы токов $P^X = (\mathbb{R}_+^* \ltimes P_0)^X$. Фоковская конструкция (см., например, [1], [3], [30], [28], [31]) относит каждой паре $(\tilde{T}, b)$, где $\tilde{T}$ – особое ортогональное или унитарное представление произвольной локально компактной группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а b – нетривиальный 1-коцикл $b: G \rightarrow \mathcal{H}$, унитарное представление группы токов G^X в комплексном гильбертовом пространстве $\text{EXP } \mathcal{H}^X$, где

$$\mathcal{H}^X = \int_X^\oplus \mathcal{H}_x dm(x), \quad \mathcal{H}_x = \mathcal{H}.$$

По определению,

$$\text{EXP } \mathcal{H}^X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k \mathcal{H}^X$$

(S^k – k -я симметризованная тензорная степень) в случае, когда $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство, а в случае вещественного пространства $\mathcal{H}$ пространство $\text{EXP } \mathcal{H}^X$ является окомплексиванием вещественного пространства $\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k \mathcal{H}^X$. В последнем случае оно изоморфно фоковскому пространству $\text{EXP}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})^X$, где $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ – окомплексивание вещественного пространства $\mathcal{H}$.

В пространстве $\text{EXP } \mathcal{H}^X$ вводится тотальное подмножество векторов $\text{EXP } v$, $v \in \mathcal{H}^X$, вида

$$\text{EXP } v = \mathbb{I} \oplus v \oplus \frac{1}{\sqrt{2!}} v \otimes v \oplus \frac{1}{\sqrt{3!}} v \otimes v \otimes v \oplus \dots$$

и операторы представления задаются на этом подмножестве векторов следующей формулой:

$$U(g) \text{EXP } v = \exp\left(-\frac{1}{2} \|b^X(g)\|^2 - \langle \tilde{T}^X(g)v, b^X(g) \rangle\right) \text{EXP}(\tilde{T}^X(g)v + b^X(g)).$$

Здесь через $\tilde{T}^X$ и b^X обозначены соответственно представление группы G^X в пространстве $\mathcal{H}^X$, порожденное представлением $\tilde{T}$ группы G в пространстве $\mathcal{H}$, и 1-коцикл $G^X \rightarrow \mathcal{H}^X$, порожденный 1-коциклом $b: G \rightarrow \mathcal{H}$.

Операторы $U(g)$ связаны соотношением

$$U(g_1 g_2) = \exp(i \text{Im} \langle T^X(g_1) b^X(g_2), b^X(g_1) \rangle) U(g_1) U(g_2) \quad \text{для любых } g_1, g_2 \in G^X. \quad (4.24)$$

Таким образом, фоковские представления группы G^X , связанные с унитарными представлениями группы G , проективны, если 2-коцикл

$$\exp(i \operatorname{Im} \langle T^X(g_1) b^X(g_2), b^X(g_1) \rangle)$$

не равен тождественно нулю, и эквивалентны настоящим тогда и только тогда, когда этот 2-коцикл тривиален.

ТЕОРЕМА 4.5. *Фоковская модель представления группы $P^X = (\mathbb{R}_+^* \ltimes P_0)^X$ в пространстве $\operatorname{EXP} \mathcal{H}^X$ проективно эквивалентна ее настоящему представлению V в том же пространстве $\operatorname{EXP} \mathcal{H}^X$, операторы которого связаны с операторами U фоковского представления соотношением*

$$V(g) = \exp\left(i \operatorname{Im} \int_X \langle b(g(x)), f_0 \rangle dm(x)\right) U(g). \quad (4.25)$$

В самом деле, из (4.7) следует, что 2-коцикл

$$\lambda(g_1, g_2) = \exp(i \operatorname{Im} \langle T^X(g_1) b^X(g_2), b^X(g_1) \rangle)$$

в соотношении (4.24) тривиален, а именно,

$$\lambda(g_1, g_2) = \frac{C(g_1)C(g_2)}{C(g_1g_2)}, \quad \text{где } C(g) = \exp\left(i \operatorname{Im} \int_X \langle b(g(x)), f_0 \rangle dm(x)\right).$$

Отсюда следует утверждение.

Определим сферическую функцию представления V группы P^X в пространстве $\operatorname{EXP} \mathcal{H}^X$ равенством

$$\Phi(g) = \langle V(g) \operatorname{EXP} 0, \operatorname{EXP} 0 \rangle.$$

Из определения фоковского представления U и проективно эквивалентного ему (настоящего) представления V группы P^X вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Сферическая функция $\Phi(g)$ представления V группы P^X имеет вид:*

$$\Phi(g) = \exp\left(\int_X \left(i \operatorname{Im} \langle b(g(x)), f_0 \rangle - \frac{1}{2} \|b(g(x))\|^2\right) dm(x)\right). \quad (4.26)$$

ТЕОРЕМА 4.6. *Пусть T – каноническое неприводимое представление группы P_0 в пространстве H , $\tilde{T}$ – ассоциированное с ним представление группы $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ в пространстве $\mathcal{H}$ и $b(g, r) = (\tilde{T}(g)f_0)(r) - f_0(r)$, где $f_0(r) = e^{-r/2}h$, – нетривиальный 1-коцикл $P \rightarrow \mathcal{H}$. Тогда интегральная модель $\operatorname{INT} T$ представления группы P^X в пространстве $\operatorname{INT} H$ проективно эквивалентна ее фоковскому представлению U в пространстве $\operatorname{EXP} \mathcal{H}^X$. Сплетающий оператор этих представлений порожден отображением циклических векторов $\Omega \rightarrow \operatorname{EXP} 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что формулы (4.21) и (4.26) для сферической функции представления $\operatorname{INT} T$ группы P^X и сферической функции ее представления V в фоковском пространстве совпадают. Следовательно, эти представления эквивалентны, и их сплетающий оператор порожден отображением циклических векторов $\Omega \rightarrow \operatorname{EXP} 0$. Отсюда и из теоремы 4.5 следует утверждение.

4.6. Продолжение интегральной модели представления группы P^X до представления группы G^X , где $P \subset G$. Рассмотрим произвольную локально компактную группу G , содержащую группу $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$ в качестве своей подгруппы. Пусть T – неприводимое каноническое представление подгруппы P_0 в пространстве H , $\tilde{T}$ – ассоциированное с T особое представление группы P в пространстве $\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r d^*r$, $H_r = H$ и $b(g): P \rightarrow \mathcal{H}$ – нетривиальный 1-коцикл представления $\tilde{T}$, заданный равенством:

$$b(g) = \tilde{T}(g)f_0 - f_0, \quad \text{где } f_0(r) = e^{-r/2}h_r. \quad (4.27)$$

ТЕОРЕМА 4.7. *Предположим, что существует продолжение представления $\tilde{T}$ группы P в пространстве $\mathcal{H}$ до представления группы G и определено продолжение 1-коцикла (4.27) группы P до 1-коцикла того же вида группы G . Тогда существует ассоциированное с этим продолжением продолжение интегральной модели INT T представления U группы токов P^X до представления группы токов G^X .*

Опишем явно это продолжение. Ранее в п. 4.3 в пространстве INT H представления группы P^X было введено тотальное множество векторов вида

$$F_g(\xi) = \exp\left(-\int_X c(g(x)) dm(x)\right) \bigotimes_{k=1}^\infty (\tilde{T}(g(x_k))f_0)(r_k) \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}, \quad (4.28)$$

где $f_0(r) = \exp(-r/2)h_r$, $c(g) = \langle b(g), f_0 \rangle$.

Было доказано, что

$$\langle F_{g_1}, F_{g_2} \rangle = \exp\left(\int_X c(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right), \quad (4.29)$$

где

$$c(g_1, g_2) = \langle b(g_1), b(g_2) \rangle, \quad (4.30)$$

а операторы представления группы P^X действуют на эти векторы по формуле

$$U(g)F_{g_1} = \exp\left(-\int_X (c(g_1(x)) - c(g_1(x)) + \lambda(g(x))) dm(x)\right) F_{gg_1}, \quad (4.31)$$

где $\lambda(g) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \operatorname{Re} c(g)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Расширим семейство функций F_g , $g \in P^X$, определив F_g при произвольном $g \in G^X$ той же формулой (4.28).

Дословно так же, как и в предложении 4.5, устанавливается: *скалярное произведение на множестве векторов F_g , $g \in G^X$, задается той же формулой (4.29)*. В частности, $\langle F_g, F_g \rangle = \exp\left(\int_X c(g(x), g(x)) dm(x)\right) < \infty$, а потому векторы F_g , $g \in G^X$, принадлежат пространству INT H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Зададим на множестве векторов F_g , $g \in G^X$, действие операторов $U(g)$ группы G^X следующей формулой:

$$U(g)F_{g_1} = \exp\left(-\int_X \lambda(g(x), g_1(x)) dm(x)\right) F_{gg_1}, \quad (4.32)$$

где

$$\lambda(g, g_1) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \langle \tilde{T}(g)b(g_1), b(g) \rangle - i \operatorname{Im} c(g). \quad (4.33)$$

ТЕОРЕМА 4.8. Операторы $U(g)$ группы G^X сохраняют скалярные произведения векторов F_g , т. е.

$$\langle U(g)F_{g_1}, U(g)F_{g_2} \rangle = \langle F_{g_1}, F_{g_2} \rangle \quad \text{для любых } g, g_1, g_2 \in G^X, \quad (4.34)$$

а потому продолжаются до ортогональных (унитарных) операторов на всем пространстве $\operatorname{INT} H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\langle U(g)F_{g_1}, U(g)F_{g_2} \rangle = \exp\left(-\int_X u(g(x), g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right),$$

где

$$u(g, g_1, g_2) = \lambda(g, g_1) + \overline{\lambda(g, g_2)} - \langle b(gg_1), b(gg_2) \rangle.$$

Так как $b(gg_1) = \tilde{T}(g)b(g_1) + b(g)$, то отсюда и из выражения (4.33) для $\lambda(g, g_i)$ следует, что $u(g, g_1, g_2) = \langle b(g_1), b(g_2) \rangle$. Отсюда следует (4.34).

ТЕОРЕМА 4.9. Операторы $U(g)$ задают, вообще говоря, проективное представление группы G^X в пространстве $\operatorname{INT} H$:

$$U(g_1g_2) = \exp\left(i \operatorname{Im} \int_X p(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right) U(g_1)U(g_2) \quad \text{для любых } g_1, g_2 \in G^X, \quad (4.35)$$

где

$$p(g_1, g_2) = \langle \tilde{T}(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle - c(g_1) - c(g_2) + c(g_1g_2). \quad (4.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для любых $g, g_1, g_2 \in G^X$:

$$\begin{aligned} U(g_1)U(g_2)F_g &= \exp\left(-\int_X a(g_1(x), g_2(x), g(x)) dm(x)\right) F_{g_1g_2g}, \\ U(g_1g_2)F_g &= \exp\left(-\int_X a'(g_1(x), g_2(x), g(x)) dm(x)\right) F_{g_1g_2g}, \end{aligned}$$

где

$$a(g_1, g_2, g) = \lambda(g_2, g) + \lambda(g_1, g_2g), \quad a'(g_1, g_2, g) = \lambda(g_1g_2, g).$$

Воспользуемся соотношением

$$l(g_2, g) + l(g_1, g_2g) - l(g_1g_2, g) = i \operatorname{Im} \langle \tilde{T}(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle$$

при

$$l(g_1, g_2) = \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle.$$

Из него следует, что

$$a(g_1, g_2, g) - a'(g_1, g_2, g) = i \operatorname{Im}(\langle \tilde{T}(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle - c(g_1) - c(g_2) + c(g_1 g_2)).$$

Значит,

$$\begin{aligned} & U(g_1)U(g_2)U^{-1}(g_1 g_2) F_g \\ &= \exp\left(-\operatorname{Im} \int_X p(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right) F_g \quad \text{при любом } g \in G^X, \end{aligned}$$

где $p(g_1, g_2)$ задается равенством (4.36). Отсюда следует утверждение.

ТЕОРЕМА 4.10. *Ограничение представления U группы G^X на подгруппу P^X совпадает с исходным представлением $\operatorname{INT} T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться, что на тотальном подмножестве векторов F_{g_1} операторы $U(g)$ совпадают при $g \in P^X$ с исходными операторами. При $g, g_1 \in P$ имеем согласно (4.7): $\langle \tilde{T}(g)b(g_1), b(g) \rangle = -c(gg_1) + c(g) + c(g_1)$. Значит,

$$\lambda(g, g_1) = c(g_1) - c(gg_1) + \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \operatorname{Re} c(g),$$

а потому выражение для $U(g)F_{g_1}$ совпадает при $g, g_1 \in P^X$ с исходным выражением (4.16).

5. Интегральная модель представления группы токов $O(n, 1)^X$, $n > 2$

Этот и последующие разделы посвящены описанию интегральных моделей представлений групп токов P^X , где P – максимальная параболическая подгруппа группы $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ или $\operatorname{Sp}(n, 1)$, и в двух первых случаях продолжению этих представлений групп P^X до представлений соответственно групп $O(n, 1)^X$ и $U(n, 1)^X$. (Для группы $\operatorname{Sp}(n, 1)$ представления ее группы токов не существует.) Отдельный раздел посвящен случаю $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) \cong \operatorname{SU}(1, 1)$, в котором P есть подгруппа треугольных матриц. У всех этих групп имеется единственная, с точностью до сопряженности, максимальная параболическая подгруппа P , и эта подгруппа представима в виде полупрямого произведения: $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$. Тем самым, описание интегральных моделей по существу сводится к описанию канонических представлений подгруппы P_0 .

Мы начинаем со случая подгруппы $P \subset O(n, 1)$, $n > 2$, поскольку в этом случае имеется единственное, с точностью до сопряженности, каноническое представление подгруппы P_0 и соответственно единственная интегральная модель представления группы P^X .

5.1. Предварительные определения и обозначения. По определению, $O(n, 1)$ есть группа линейных преобразований в $\mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющих невырожденную квадратичную форму сигнатуры $(n, 1)$. Здесь в качестве такой формы выбрана квадратичная форма $2x_1 x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2$, а элементы группы $O(n, 1)$ записываются в виде блочных матриц

$$g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3},$$

где на диагонали стоят квадратные матрицы соответственно порядка 1, $n-1$ и 1.

Такая матричная реализация группы $O(n, 1)$ удобна для описания ее максимальной параболической подгруппы $P \subset O(n, 1)$, являющейся, по определению, подгруппой всех линейных преобразований, сохраняющих изотропное относительно введенной квадратичной формы подпространство E . С точностью до сопряженности, группа $O(n, 1)$ обладает единственной максимальной параболической подгруппой. В принятой реализации изотропным подпространством E является одномерное подпространство векторов $(x_1, 0, \dots, 0)$, а соответствующая максимальная параболическая подгруппа P группы $O(n, 1)$ представима как подгруппа всех нижних клеточно-треугольных матриц в виде полупрямого произведения

$$P = D \ltimes N,$$

где $N \cong \mathbb{R}^{n-1}$ – максимальная нильпотентная подгруппа клеточных матриц вида

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\gamma^* & e_{n-1} & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma\gamma^* & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}^{n-1},$$

а $D \cong \mathbb{R}^* \times O(n-1)$ – подгруппа клеточно-диагональных матриц вида $d = \text{diag}(s^{-1}, u, s)$, $s \in \mathbb{R}^*$, $u \in O(n-1)$.

Будем представлять D в виде прямого произведения $D = \mathbb{R}_+^* \times D_0$, где D_0 – подгруппа матриц $d = \text{diag}(\pm 1, u, \pm 1)$, и обозначим:

$$P_0 = D_0 \ltimes N.$$

Таким образом,

$$P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0 = (\mathbb{R}_+^* \times D_0) \ltimes N.$$

Элементы из $\mathbb{R}_+^*$, D_0 и N будем обозначать соответственно через r , (ε, u) (где $\varepsilon = \pm 1$) и γ (вектор-строка). В этих обозначениях групповые соотношения имеют вид:

$$(\varepsilon, u)^{-1}g(\varepsilon, u) = \varepsilon\gamma u, \quad rgr^{-1} = r\gamma \quad \text{при } g = \gamma \in N.$$

5.2. Описание канонических представлений подгруппы P_0 . С точностью до сопряженности относительно группы автоморфизмов $\mathbb{R}_+^*$, существует единственное каноническое неприводимое унитарное представление T подгруппы $P_0 = D_0 \ltimes N$. Оно реализуется в гильбертовом пространстве H функций на единичной сфере $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{S^{n-2}} |f(\omega)|^2 d\omega,$$

где $d\omega$ – инвариантная мера на S^{n-2} , нормированная условием $\int_{S^{n-2}} d\omega = 1$. Операторы представления задаются формулами

$$(T(\gamma)f)(\omega) = e^{-i\langle \gamma, \omega \rangle} f(\omega) \quad \text{при } \gamma \in N, \quad N \cong \mathbb{R}^{n-1}, \quad (5.1)$$

$$(T(\varepsilon\omega u)f)(\omega) = f(\varepsilon\omega u) \quad \text{при } (\varepsilon, u) \in D_0, \quad D_0 = \{\pm 1\} \times O(n-1). \quad (5.2)$$

Операторы T_r , $r \in \mathbb{R}_+^*$, представлений, сопряженных с T , действуют в пространствах $H_r = H$ и задаются формулами

$$(T_r(\gamma)f)(\omega) = e^{-ir\langle \gamma, \omega \rangle} f(\omega), \quad T_r(g) = T(g) \quad \text{при } g \in D_0. \quad (5.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Представление T^- группы P_0 , заданное формулами

$$(T^-(\gamma)f)(\omega) = e^{i\langle\gamma,\omega\rangle} f(\omega), \quad T^-(g) = T(g) \quad \text{при } g \in D_0,$$

эквивалентно представлению T : $T^- = A^{-1}TA$, где $Af(\omega) = f(-\omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Представление T группы P_0 канонично.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что представления T_r попарно неэквивалентны. Поэтому достаточно проверить оценку

$$\|T_r(g)\mathbb{I} - \mathbb{I}\| < c(g)r \quad \text{для любого } g \in P_0, \quad (5.4)$$

где через $\mathbb{I}$ обозначен вектор $f(\omega) \equiv 1$. Поскольку $T_r(g)\mathbb{I} = \mathbb{I}$ при $g \in D_0$, то достаточно доказать (5.4) только для элементов $g = \gamma \in N$. Для этих элементов оценка следует из очевидного равенства

$$\|T_r(g)\mathbb{I} - \mathbb{I}\|^2 = 2 \int_{S^{n-2}} (1 - \cos(r\langle\gamma,\omega\rangle)) d\omega.$$

5.3. Особое представление группы P . Ассоциированное с T особое неприводимое представление $\tilde{T}$ группы P действует в прямом интеграле по мере $d^*r = r^{-1} dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ гильбертовых пространств $H_r = H$,

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r d^*r,$$

т. е. в пространстве сечений $f(r)$ расслоения над $\mathbb{R}_+^*$ со слоем H_r . Операторы подгруппы P_0 действуют в слоях этого расслоения, $(\tilde{T}(g)f)(r) = T_r(gf(r))$ при $g \in P_0$, а операторы подгруппы $\mathbb{R}_+^*$ задаются формулой

$$(\tilde{T}(r_0)f)(r) = f(r_0r).$$

Нетривиальный 1-коцикл $b: P \rightarrow \mathcal{H}$, связанный с этим представлением, будем задавать в виде

$$b(g) = \tilde{T}(g)f_0(r, \omega) - f_0(r, \omega), \quad \text{где } f_0(r, \omega) = e^{-r/2}. \quad (5.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Функции $\|b(g)\|^2$ и $c(g) = \langle b(g), f_0 \rangle$ задаются следующими формулами:*

$$\|b(g)\|^2 = \log \frac{(r_0 + 1)^2}{4r_0}, \quad c(g) = \log \frac{2}{r_0 + 1} \quad \text{при } g = r_0 \in \mathbb{R}_+^*; \quad (5.6)$$

$$\|b(g)\| = 2c(g) = \int_0^{\pi/2} (1 + |\gamma|^2 \cos^2 t) \sin^{n-3} t dt \quad \text{при } g = \gamma \in N. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством

$$\int_0^\infty (e^{-ar} - e^{-br})r^{-1} dr = \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{при } \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0. \quad (5.8)$$

Имеем:

$$\begin{aligned}\|b(r_0)\|^2 &= \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} (e^{-r_0 r} - 2e^{-(r_0+1)r/2} + e^{-r}) d\omega d^*r, \\ c(g) &= \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} (e^{-(r_0+1)r/2} - e^{-r}) d\omega d^*r.\end{aligned}$$

Отсюда на основании (5.8) следует (5.6).

Далее, имеем:

$$\|b(\gamma)\|^2 = \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} (2e^{-r} - e^{-(1+i\langle\gamma,\omega\rangle)r} - e^{-(1-i\langle\gamma,\omega\rangle)r}) d\omega d^*r.$$

Интегрируя сначала по r , получаем на основании (5.8):

$$\|b(\gamma)\|^2 = \int_{S^{n-2}} \log(1 + \langle\gamma, \omega\rangle^2) d\omega.$$

Перейдя к сферическим координатам и проинтегрировав по S^{n-3} , получаем:

$$\|b(\gamma)\|^2 = \int_0^\pi \log(1 + |\gamma|^2 \cos^2 t) \sin^{n-3} t dt.$$

Аналогичным вычислением получаем выражение для $C(g)$.

5.4. Продолжение особого представления группы P до представления группы $O(n, 1)$. Для построения этого продолжения сначала опишем реализацию особого представления группы $O(n, 1)$ в пространстве функций на $N \cong \mathbb{R}^{n-1}$; в дальнейшем элементы из N будем отождествлять с точками $x \in \mathbb{R}^{n-1}$. Воспользовавшись разложением $O(n, 1) = P^+ N$, где $P^+ \cong P$ – подгруппа *верхних* клеточно-треугольных матриц, можно интерпретировать N как сечение расслоения $O(n, 1) \rightarrow P^+ \setminus O(n, 1)$. Тем самым, на N определено действие $x \mapsto xg$ группы $O(n, 1)$:

$$xg = \left(-\frac{|x|^2}{2} g_{13} + xg_{23} + g_{33} \right)^{-1} \left(-\frac{|x|^2}{2} g_{12} + xg_{22} + g_{32} \right), \quad (5.9)$$

где g_{ij} – элементы клеточной матрицы $g \in O(n, 1)$. В частности,

$$\begin{aligned}xg &= x + x_0 \quad \text{при } g = x_0 \in N; & xg &= \varepsilon^{-1} \gamma u \quad \text{при } g = \text{diag}(\varepsilon^{-1}, u, \varepsilon); \\ xg &= -\frac{2x}{|x|^2} \quad \text{при } g = s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Определим далее функцию $\beta(x, g)$ формулой

$$\beta(x, g) = \left| -\frac{|x|^2}{2} g_{13} + xg_{23} + g_{33} \right|, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad g \in O(n, 1). \quad (5.10)$$

В частности, $\beta(x, g) = 1$ при $g \in N$; $\beta(x, g) = |\varepsilon|$ при $g = \text{diag}(\varepsilon^{-1}, u, \varepsilon)$; $\beta(x, s) = |x|^2/2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (см. [24]). Особое представление группы $O(n, 1)$ реализуется в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x) dx = 0$$

(dx – лебегова мера на $\mathbb{R}^{n-1}$), со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = - \int_{\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}} \log |x' - x''| \varphi_1(x') \overline{\varphi_2(x'')} dx' dx''. \quad (5.11)$$

Операторы представления имеют вид:

$$(T(g)\varphi)(x) = \varphi(xg)\beta^{1-n}(x, g). \quad (5.12)$$

В частности,

$$(T(g)\varphi)(x) = \varphi(x + x_0) \quad \text{при } g = x_0 \in N; \quad (5.13)$$

$$(T(g)\varphi)(x) = |\varepsilon|^{1-n} \varphi(\varepsilon^{-1} \gamma u) \quad \text{при } g = \text{diag}(\varepsilon^{-1}, u, \varepsilon); \quad (5.14)$$

$$(T(g)\varphi)(x) = \varphi\left(-\frac{2x}{|x|^2}\right) \left(\frac{|x|^2}{2}\right)^{1-n} \quad \text{при } g = s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Унитарность и групповое свойство этих операторов следует из соотношений:

$$\beta(x, g_1 g_2) = \beta(x, g_1) \beta(x g_1, g_2) \quad (5.16)$$

для любых $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $g_1, g_2 \in O(n, 1)$,

$$d(xg) = \beta^{1-n}(x, g) dx \quad (5.17)$$

для любого $g \in O(n, 1)$ и

$$|x' - x''|^2 = |x'g - x''g|^2 \beta(x', g) \beta(x'', g) \quad (5.18)$$

для любых $x', x'' \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $g \in O(n, 1)$. Нетривиальный 1-коцикл этого представления удобно задавать формулой

$$b(g, x) = T(g)\varphi_0 - \varphi_0, \quad (5.19)$$

где $\varphi_0(x)$ – преобразование Фурье функции $e^{-|\gamma|/2}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$; основание для такого выбора функции $\varphi_0(x)$ будет пояснено ниже.

Искомая реализация особого представления группы $O(n, 1)$ получается переходом от функций $\varphi(x)$ к их преобразованию Фурье

$$f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi(x) e^{i\langle \gamma, x \rangle} \varphi(x) dx.$$

Нетрудно убедиться, что при этом преобразовании пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ преобразуется в гильбертово пространство функций на $\mathbb{R}^{n-1}$, где норма в сферических координатах на $\mathbb{R}^{n-1}$ имеет вид

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty \int_{S^{n-2}} |f(r, \omega)|^2 d\omega dr,$$

т. е. в пространство $\mathcal{H}$ особого представления группы P . Очевидно, далее, что в этой новой реализации операторы представления подгруппы P имеют вид

$$(\tilde{T}(g)\varphi)(\gamma) = e^{-i\langle\gamma, \gamma_0\rangle} f(\gamma) \quad \text{при } g = \gamma_0 \in N, \quad (5.20)$$

$$(\tilde{T}(g)\varphi)(\gamma) = f(\varepsilon\gamma u) \quad \text{при } g = \text{diag}(\varepsilon^{-1}, u, \varepsilon), \quad (5.21)$$

т. е. они совпадают с операторами исходного особого представления группы P . Таким образом, полученное представление группы $O(n, 1)$ является искомым продолжением на $O(n, 1)$ исходного особого представления группы P .

Очевидно, далее, что 1-коцикл в пространстве функций $\varphi(x)$, заданный формулой (5.19), преобразуется в 1-коцикл исходного представления $b(g) = \tilde{T}(g)f_0 - f_0$, где $f_0(r) = e^{-r/2}$.

Операторы полученного продолжения представления подгруппы P на группу $O(n, 1)$ представимы в интегральной форме:

$$(\tilde{T}(g)\varphi)(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} A(\gamma, \gamma', g) f(\gamma') d\gamma', \quad (5.22)$$

где

$$A(\gamma, \gamma', g) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \exp(i(\langle\gamma, x\rangle - \langle\gamma', xg\rangle)) \beta^{1-n}(x, g) dx. \quad (5.23)$$

Эти выражения упрощаются только для элементов подгруппы P .

5.5. Описание интегральной модели $\text{INT } T$ представления группы токов P^X , ассоциированного с представлением T группы P_0 . В соответствии с общей конструкцией, представление $\text{INT } T$ группы P^X реализуется в прямом интеграле по мере $\mathcal{L}$ гильбертовых пространств $\mathcal{H}_\xi$,

$$\text{INT } H = \int_{l_+^1(X)}^\oplus \mathcal{H}_\xi d\mathcal{L}(\xi),$$

где $\mathcal{H}_\xi$, $\xi = \{r_k, x_k\}$, — счетные тензорные степени гильбертова пространства $H_r = H$ функций $f(\omega)$ на сфере S^{n-2} со стабилизирующим вектором $f(\omega) \equiv 1$:

$$\mathcal{H}_\xi = \bigotimes_{k=1}^\infty H_{r_k}, \quad H_{r_k} = H.$$

Таким образом, элементами пространства $\text{INT } H$ являются сечения $F(\xi)$ расслоения над $l_+^1(X)$ со слоем $\mathcal{H}_\xi$.

Операторы $U(g)$, $g \in P_0^X$, действуют в слоях $\mathcal{H}_\xi$ расслоения по формуле

$$U(g(\cdot)) = \bigotimes_{k=1}^\infty T_{r_k}(g(x_k)). \quad (5.24)$$

Операторы $U(r_0(\cdot))$, $r_0 \in \mathbb{R}^X$, задаются формулой

$$(U(r_0(\cdot))F)(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)\right) F(r_0(\cdot)\xi). \quad (5.25)$$

5.6. Формула для сферической функции и связь представления $\text{INT } T$ группы P^X с ее фоковским представлением. В соответствии с разделом 4, сферическая функция представления $\text{INT } T$ группы P^X задается равенством

$$\Psi(g) = \langle U(g)\Omega, \Omega \rangle, \quad \text{где } \Omega(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} (e^{-r_k/2} h_{r_k}) \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Сферическая функция представления $\text{INT } T$ имеет вид:*

$$\Psi(g) = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_X \|b(g(x))\|^2 dm(x)\right), \quad (5.26)$$

где $b(g)$ – 1-коцикл особого представления группы $O(n, 1)$.

В самом деле, в случае $O(n, 1)$ мы имеем $\text{Im } c(g) = 0$, а потому равенство (5.26) следует непосредственно из общей формулы (4.21) для сферической функции интегральной модели.

Согласно общей конструкции фоковских моделей, сферическая функция $\Phi(g) = \langle U(g) \text{EXP } 0, \text{EXP } 0 \rangle$ фоковского представления группы P^X , ассоциированная с представлением $\tilde{T}$ группы P и 1-коциклом b , задается той же формулой (5.26). Поэтому из теоремы 5.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ. *Интегральная модель $\text{INT } T$ представления группы P^X эквивалентна ее фоковскому представлению, ассоциированному с представлением $\tilde{T}$ группы P и 1-коциклом b . Сплетающий оператор этих представлений порожден отображением циклических векторов $\Omega \mapsto \text{EXP } 0$.*

5.7. Продолжение интегральной модели представления группы P^X до представления группы $O(n, 1)^X$. Пусть $\tilde{T}$ – описанное в п. 5.4 продолжение на $O(n, 1)$ особого представления $\tilde{T}$ группы P , и пусть $b(g) = \tilde{T}(g)f_0 - f_0$, где $f_0(r) = e^{-r/2}$, – его нетривиальный 1-коцикл.

Согласно п. 4.6, продолжение представления $\text{INT } T$ группы P^X в пространстве $\text{INT } H$ до представления группы $O(n, 1)^X$ строится так. В пространстве $\text{INT } H$ вводится тотальное множество векторов F_g , $g \in O(n, 1)^X$, вида

$$F_g(\xi) = \exp\left(-\int_X c(g(x)) dm(x)\right) \bigotimes_{k=1}^{\infty} (\tilde{T}(g(x_k))f_0)(r_k) \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}, \quad (5.27)$$

где $c(g) = \langle b(g), f_0 \rangle$. Отметим, что $\text{Im } c(g) = 0$.

Векторы F_g принадлежат пространству $\text{INT } H$, причем

$$\langle F_{g_1}, F_{g_2} \rangle = \exp\left(\int_X c(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right), \quad \text{где } c(g_1, g_2) = \langle b(g_1), b(g_2) \rangle.$$

Определим действие операторов $U(g)$, $g \in O(n, 1)^X$, на множестве векторов F_g следующим равенством:

$$U(g)F_{g_1} = \exp\left(-\int_X \lambda(g(x), g_1(x)) dm(x)\right) F_{gg_1},$$

где

$$\lambda(g, g_1) = \frac{1}{2} \|b(g)\|^2 + \langle \tilde{T}(g)b(g_1), b(g) \rangle.$$

Согласно п. 4.6, эти операторы сохраняют скалярные произведения $\langle F_{g_1}, F_{g_2} \rangle$ и порождают представление группы $O(n, 1)^X$ в пространстве $\text{INT } H$, являющееся продолжением исходного представления группы P^X .

Поскольку $\text{Im } c(g) = 0$, это представление группы $O(n, 1)^X$ является настоящим (непроективным).

6. Интегральные модели представлений группы токов $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$

Рассматривается подгруппа $P \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$ вещественных матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}$. Ее элементы условимся задавать в форме $g = \varepsilon(r, \gamma)$, где $\varepsilon = \pm 1$ и $(r, \gamma) = \begin{pmatrix} r^{-1/2} & 0 \\ r^{1/2}\gamma & r^{1/2} \end{pmatrix}$, $r > 0$. В этих обозначениях групповая операция на P имеет вид:

$$(r_1, \gamma_1)(r_2, \gamma_2) = (r_1 r_2, r_2^{-1} \gamma_1 + \gamma_2).$$

Группа P представима как полупрямое произведение коммутативных групп: $P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0$, где $P_0 = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}$ – подгруппа элементов $\varepsilon(1, \gamma)$, а $\mathbb{R}_+^*$ – подгруппа пар $(r, 0)$, $r > 0$. Группа $\mathbb{R}_+^*$ действует на P_0 преобразованиями $\varepsilon(1, \gamma) \rightarrow \varepsilon(r, 0)(1, \gamma)(r, 0)^{-1} = \varepsilon(1, r\gamma)$.

6.1. Канонические представления подгруппы P_0 и ассоциированные с ними представления группы P . С точностью до перехода к сопряженным представлениям, группа P_0 обладает одним каноническим неприводимым ортогональным представлением T^0 в двумерном пространстве H^0 . При окомплесивании оно распадается в прямую сумму двух канонических унитарных представлений $T^\pm$ в пространствах $H^\pm \cong \mathbb{C}$. При этом H^0 есть подпространство в $H^+ \oplus H^-$ векторов $(x, \bar{x}) \in \mathbb{C}^2$.

Операторы $T^\pm(\varepsilon(1, \gamma))$ действуют умножением на $e^{\pm i\gamma}$. Соответственно операторы $T_r^\pm(\varepsilon(1, \gamma))$, $r \in \mathbb{R}_+^*$, сопряженных представлений действуют умножением на $e^{\pm i r \gamma}$. Каноничность представлений $T^\pm$ следует из оценки $|e^{\pm i r \gamma} - 1| \sim |\gamma| r$ при $r \rightarrow 0$.

С представлениями $T^\pm$ подгруппы P_0 ассоциированы особые неприводимые унитарные представления $\tilde{T}^\pm$ группы P . Они действуют в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\pm$ функций $f(r)$ на полуоси $r > 0$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty |f(r)|^2 d^*r, \quad d^*r = r^{-1} dr,$$

и задаются формулами: $\tilde{T}^\pm(\varepsilon) = \text{id}$ (тривиальность операторов представления на центре группы),

$$(\tilde{T}^\pm(r_0, r_0 \gamma) f)(r) = e^{\pm i r_0 r \gamma} f(r_0 r). \quad (6.1)$$

В частности,

$$(\tilde{T}^\pm(1, \gamma) f)(r) = e^{\pm i r \gamma} f(r), \quad (6.2)$$

$$(\tilde{T}^\pm(r_0, 0) f)(r) = f(r_0 r), \quad r_0 \in \mathbb{R}_+^*. \quad (6.3)$$

Эти представления обладают нетривиальными 1-коциклами $b^\pm: P \rightarrow \mathcal{H}$, структуру которых мы обсудим в следующем пункте.

С ортогональным каноническим представлением T^0 группы P_0 ассоциировано особое ортогональное представление $\tilde{T}^0$ группы P в пространстве $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ функций $f(r): \mathbb{R}_+^* \rightarrow H^0$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty \|f(r)\|^2 d^*r.$$

Операторы представления $\tilde{T}^0(g)$ получаются ограничением на $\mathcal{H}^0$ операторов $\tilde{T}^+(g) \oplus \tilde{T}^-(g)$ в пространстве $\mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$.

6.2. Продолжение представлений $\tilde{T}^\pm$ и $\tilde{T}^0$ группы P до представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Введем всюду плотные инвариантные подпространства в пространствах особых представлений группы P . Конструкция искомым продолжений сведется тем самым к конструкции продолжений только на этих подпространствах.

Начнем со случая представления $\tilde{T}^+$ группы P в пространстве $\mathcal{H}^+$.

Обозначим через L верхнюю комплексную полуплоскость ($\mathrm{Im} z > 0$) с заданным на ней действием группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$:

$$z \mapsto gz = \frac{\delta z + \gamma}{\beta z + \alpha} \quad \text{при } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

(плоскость Лобачевского); в частности, $gz = z$ при $g = \pm e$ (где e – единица группы) и

$$gz = r(z + \gamma) \quad \text{при } g = (r, \gamma) \in P. \quad (6.4)$$

Поставим в соответствие каждой точке $z = u + iv \in L$ функцию $f_z(r)$ на правой полуоси:

$$f_z(r) = e^{irz} = e^{-r(v-iu)}, \quad \text{где } z = u + iv, \quad v > 0.$$

В частности,

$$f_{z_0}(r) = e^{-r} \quad \text{при } z_0 = i.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Функции $f_{z_1} - f_{z_2}$ принадлежат пространству $\mathcal{H}^+$, причем скалярное произведение любой пары этих функций задается следующей формулой:*

$$\langle f_{z_1} - f_{z_2}, f_{z'_1} - f_{z'_2} \rangle = \sum_{j,k=1,2} (-1)^{j+k-1} c(z_j, z'_k), \quad (6.5)$$

где

$$c(z_1, z_2) = \log(-i(z_1 - \bar{z}_2)) = \log((v_1 + v_2) + i(u_1 - u_2)) \quad \text{при } z_k = u_k + iv_k. \quad (6.6)$$

В частности,

$$\|f_{z_1} - f_{z_2}\|^2 = \log \frac{|z_1 - \bar{z}_2|^2}{4 \mathrm{Im} z_1 \mathrm{Im} z_2}. \quad (6.7)$$

Здесь и в дальнейшем через $\log$ обозначена главная ветвь логарифма на плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси такая, что $\log 1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения скалярного произведения в пространстве $\mathcal{H}^+$ следует: если $z_j = u_j + iv_j$, $z'_j = u'_j + iv'_j$, $j = 1, 2$, то

$$\langle f_{z_1} - f_{z_2}, f_{z'_1} - f_{z'_2} \rangle = \int_0^\infty \left(\sum_{j,k=1,2} (-1)^{j+k} \exp(-r((v_1 + v_2) - i(u_1 - u_2))) \right) r^{-1} dr.$$

Сходимость этого интеграла и формула (6.5) следуют из соотношения

$$\int_0^\infty (e^{-ar} - e^{-br}) r^{-1} dr = \log b - \log a \quad \text{при } \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ. Имеет место равенство:

$$\langle f_{z_1} - f_{z_0}, f_{z_2} - f_{z_0} \rangle = c(z_1) + \overline{c(z_2)} - c(z_1, z_2) - c(z_0), \quad (6.8)$$

где

$$c(z) = c(z, z_0), \quad z_0 = i. \quad (6.9)$$

В частности,

$$\|f_z - f_{z_0}\|^2 = 2 \operatorname{Re} c(g) - c(z, z) - c(z_0). \quad (6.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Выражение для $\|f_{z_1} - f_{z_2}\|^2$ представимо в виде

$$\|f_{z_1} - f_{z_2}\|^2 = 2 \log \left[\cosh \frac{d(z_1, z_2)}{2} \right], \quad (6.11)$$

где $d(z_1, z_2)$ – расстояние Лобачевского между z_1 и z_2 .

В самом деле, преобразуем выражение $I = \frac{4 \operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}{|z_1 - \bar{z}_2|^2}$, воспользовавшись формулой $\tanh \frac{d(z_1, z_2)}{2} = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|}$. Имеем:

$$I = \frac{|z_1 - \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2}{|z_1 - \bar{z}_2|^2} = 1 - \tanh^2 \frac{d(z_1, z_2)}{2} = \cosh^{-2} \frac{d(z_1, z_2)}{2}.$$

Отсюда следует (6.11).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Обозначим через M^+ предгильбертово подпространство в $\mathcal{H}^+$, линейно порожденное функциями $f_{z_1} - f_{z_2}$ или, что эквивалентно, функциями $f_z - f_{z_0}$.

Из (6.4) вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Подпространство M^+ инвариантно относительно действия операторов группы P , а именно, для любых $z_1, z_2 \in L$ имеем:

$$\tilde{T}^+(g)(f_{z_1} - f_{z_2}) = f_{gz_1} - f_{gz_2}. \quad (6.12)$$

Очевидно также, что подпространство M^+ всюду плотно в $\mathcal{H}^+$. Поэтому для продолжения представления T^+ группы P до представления группы $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})^X$ достаточно определить действие операторов представления только на этом подпространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Определим операторы $\tilde{T}^+$ представления всей группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ на элементах пространства M^+ той же формулой (6.12).

ТЕОРЕМА 6.1. *Операторы $\tilde{T}^+(g)$, $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, сохраняют скалярное произведение на M^+ и удовлетворяют групповому соотношению. Тем самым, они порождают продолжение представления $\tilde{T}^+$ группы P до унитарного представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Групповое соотношение для этих операторов очевидно. Далее, из соотношения

$$gz_1 - g\bar{z}_2 = (z_1 - \bar{z}_2)(\beta z_1 + \alpha)^{-1}(\beta \bar{z}_2 + \alpha)^{-1} \quad \text{для любого } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

следует, что

$$\sum_{j,k=1,2} (-1)^{j+k-1} c(gz_j, gz'_k) = \sum_{j,k=1,2} (-1)^{j+k-1} c(z_j, z'_k) \quad \text{для любого } g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \quad (6.13)$$

т.е. скалярное произведение на M^+ инвариантно относительно операторов $\tilde{T}^+(g)$ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Представление $\tilde{T}^+$ группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ обладает нетривиальным 1-коциклом $b^+ : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}^+$ вида*

$$b^+(g) = f_{gz_0} - f_{z_0}, \quad \text{где } z_0 = i. \quad (6.14)$$

В самом деле, $b^+(g) \in \mathcal{H}^+$ при любом $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Далее, поскольку $f_{gz_0} = \tilde{T}^+(g)f_{z_0}$, то $b^+(g) = \tilde{T}^+(g)f_{z_0} - f_{z_0}$, а потому $b^+(g)$ есть 1-коцикл. Так как $f_{z_0} \notin \mathcal{H}^0$, то этот 1-коцикл нетривиален.

Из формулы для скалярного произведения в H вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Для любых $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\langle b(g_1), b(g_2) \rangle = c(g_1 z_0) + \overline{c(g_2 z_0)} - c(g_1 z_0, g_2 z_0) - c(z_0, z_0); \quad (6.15)$$

в частности,

$$\|b(g)\|^2 = 2 \operatorname{Re} c(gz_0) - c(gz_0, gz_0) - c(z_0, z_0). \quad (6.16)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место соотношение:*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|b(g)\|^2 - \langle \tilde{T}^+(g)b(g_1), b(g) \rangle &= i \operatorname{Im} c(gz_0) + (c(gg_1 z_0, gz_0) - c(gg_1 z_0, z_0)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (c(gz_0, gz_0) - c(z_0, z_0)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Аналогично строится продолжение представления $\tilde{T}^-$ группы P до унитарного представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Именно, мы заменяем пространство M^+ функций $f_{z_1} - f_{z_2}$ на пространство M^- функций $\overline{f_{z_1}} - \overline{f_{z_2}}$. Очевидно, что M^- тотально в $\mathcal{H}^-$ и инвариантно относительно действия операторов группы P :

$$\tilde{T}^-(g)(\overline{f_{z_1}} - \overline{f_{z_2}}) = \overline{f_{gz_1}} - \overline{f_{gz_2}}. \quad (6.18)$$

Той же формулой (6.18) определяется продолжение представления $\tilde{T}^-$ подгруппы P на всю группу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Нетривиальный 1-коцикл b^- полученного представления связан с 1-коциклом b^+ соотношением $b^-(g) = \overline{b^+(g)}$.

Определенные так продолжения представлений $\tilde{T}^\pm$ подгруппы P до унитарных представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ индуцируют продолжение ортогонального представления подгруппы P в пространстве $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ до ортогонального представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Нетривиальный 1-коцикл, связанный с этим представлением, имеет вид:

$$b^0(g) = (b^+(g), b^-(g)).$$

6.3. Интегральные модели представлений группы токов P^X , ассоциированные с каноническими представлениями группы P_0 . Поскольку пространства $H_r^\pm$ представлений $T_r^\pm$ группы P_0 одномерны, их счетные тензорные произведения $H_\xi^\pm$, $\xi = \{r_k, x_k\}$, также одномерны. Таким образом, представления $\mathrm{INT} T^\pm$ группы P^X действуют в прямых интегралах по мере $\mathcal{L}$ одномерных пространств $H_\xi^\pm$, т. е. в гильбертовых пространствах $\mathrm{INT} H^\pm$ комплекснозначных функционалов $F^\pm(\xi) = F(\{r_k, x_k\})$ на $l_+^1(X)$ с нормой

$$\|F\|^2 = \int_{l_+^1(X)} |F(\xi)|^2 d\mathcal{L}(\xi).$$

Операторы представления группы P^X тождественны на ее центре и однозначно определяются формулами:

$$(U^\pm(1, \gamma(\cdot))F^\pm)(\xi) = \exp\left(\pm i \sum r_k \gamma(x_k)\right) F^\pm(\xi), \quad (6.19)$$

$$(U^\pm(r_0(\cdot), 0)F)(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)\right) F^\pm(r_0(\cdot)\xi) \quad (6.20)$$

при $\xi = \{r_k, x_k\}$.

Перейдем к описанию ортогонального представления $\mathrm{INT} T^0$ группы P^X , ассоциированного с каноническим представлением T^0 подгруппы P_0 . Здесь элементы пространств $H_r^0 = H^0$ представлений T_r^0 – векторы $(s, \bar{s})$, $s \in \mathbb{C}$, а потому пространства H_ξ^0 представлений группы P_0^X являются счетными тензорными произведениями двумерных вещественных пространств со стабилизирующим вектором $2^{-1/2}(1, 1)$. Очевидно, что $H_\xi^0 \subset H_\xi^0 \otimes H_\xi^0$.

Таким образом, представление $\mathrm{INT} T^0$, ассоциированное с каноническим представлением T^0 подгруппы P_0 , реализуется в вещественном ортогональном пространстве $\mathrm{INT} H^0$ функционалов $F(\xi)$ на $l_+^1(X)$ со значениями в пространствах H_ξ^0 с нормой

$$\|F\|^2 = \int_{l_+^1(X)} \|F(\xi)\|^2 d\mathcal{L}(\xi).$$

Операторы $U^0(1, \gamma(\cdot))$ задаются равенством

$$U^0(1, \gamma(\cdot)) \left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} (s_k, \bar{s}_k) \right) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} (e^{ir_k^2 \gamma(x_k)} s_k, e^{-ir_k^2 \gamma(x_k)} \bar{s}_k), \quad (6.21)$$

а операторы $U^0(r_0(\cdot), 0)$ задаются, как и в случае представлений $U^\pm$, равенствами (6.20).

Заметим, что при естественном вложении

$$\text{INT } H^0 \subset \text{INT } H^+ \otimes \text{INT } H^-$$

операторы $U^0(g)$ являются ограничениями на $\text{INT } H^0$ операторов $U^+(g) \otimes U^-(g)$ в пространстве $\text{INT } H^+ \otimes \text{INT } H^-$.

6.4. Продолжение унитарных представлений $U^\pm = \text{INT } T^\pm$ группы токов P^X до проективных унитарных представлений группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Построим продолжение унитарного представления $U^+ = \text{INT } T^+$ группы токов P^X в пространстве $U^+ = \text{INT } H^+$ до унитарного проективного представления группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Подобно случаю группы коэффициентов $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, действие операторов группы токов $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$ будет определено на некотором тотальном подмножестве $\tilde{M}^+ \subset \text{INT } H^+$.

Обозначим через L^X , где L – верхняя комплексная полуплоскость, пространство ограниченных функций $z: X \rightarrow L$, $z(x) = u(x) + iv(x)$, $v(x) > 0$. Действие группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ на L индуцирует поточечное действие на L^X ее группы токов $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$.

Поставим в соответствие каждой функции $z \in L^X$ следующий функционал $F_z(\xi) = F_z(\{r_k, x_k\})$ на $l_+^1(X)$:

$$F_z^+(\xi) = \exp\left(i \sum r_k z(x_k)\right) = \exp\left(-\sum r_k (v(x_k) - iu(x_k))\right) \quad \text{при } z = u + iv. \quad (6.22)$$

Из определения характеристического функционала меры $\mathcal{L}$ следует, что

$$\langle F_{z_1}^+, F_{z_2}^+ \rangle = \exp\left(-\int_X c(z_1(x), z_2(x)) dm(x)\right), \quad (6.23)$$

где функция $c(z_1, z_2)$ задается равенством (6.6). В частности,

$$\|F_z^+\|^2 = \exp\left(-\int_X \log(2v(x)) dm(x)\right) \quad \text{при } z = u + iv.$$

В силу условия ограниченности функций $z \in L^X$, функционалы F_z^+ принадлежат пространству $\text{INT } H^+$, и легко убедиться, что множество этих функционалов тотально в $\text{INT } H^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Определим действие операторов $U^+(g)$ группы токов $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$ на множестве функционалов F_z^+ следующей формулой:

$$U^+(g)F_z^+ = \exp\left(\int_X \varphi(g(x), z(x)) dm(x)\right)F_{gz}^+, \quad (6.24)$$

где

$$\varphi(g, z) = c(gz, gz_0) - c(z, z_0) - \frac{1}{2}(c(gz_0, gz_0) - c(z_0, z_0)), \quad z_0 = i. \quad (6.25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. *На элементах подгруппы P^X операторы $U^+(g)$ совпадают с операторами исходного представления группы P^X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $g = (r_0, \gamma) \in P$ имеем: $c(gz_1, gz_2) = \log r_0 + c(z_1, z_2)$. Отсюда следует, что множитель в формуле (6.24) для $U^+(g)$ равен единице при $g \in P_0$ и равен $\exp\left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)\right)$ при $g = (r_0(\cdot), \gamma(\cdot)) \in P^X$. Далее, имеем: $F_{gz}^+(\xi) = \exp(i \sum r_k \gamma(x_k)) F_z^+(\xi)$ при $g = (1, \gamma(\cdot))$ и $F_{gz}^+(\xi) = F_z^+(r_0(\cdot)\xi)$ при $g = (r_0(\cdot), 0)$. Следовательно,

$$U^+(g)F_z^+(\xi) = \exp\left(i \sum r_k \gamma(x_k)\right) F_z^+(\xi) \quad \text{при } g = (1, \gamma(\cdot)),$$

$$U^+(g)F_z^+(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)\right) F_z^+(r_0(\cdot)\xi) \quad \text{при } g = (r_0(\cdot), 0)$$

для любого $z \in L^X$. Отсюда следует утверждение.

Убедимся, что операторы U^+ задают продолжение представления группы P^X на всю группу $\text{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Для этого заменим множество функционалов F_z^+ на множество $\tilde{M}^+$ функционалов вида

$$\Psi_g^+ = 2^{-1/2} \exp\left(\int_X c(z(x)) dm(x)\right) F_z, \quad g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})^X, \quad \text{где } z = gz_0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. *На множестве $\tilde{M}^+$ скалярное произведение и операторы представления задаются формулами:*

$$\langle \Psi_{g_1}^+, \Psi_{g_2}^+ \rangle = \exp\left(\int_X \langle b(g_1(x)), b(g_2(x)) \rangle dm(x)\right), \quad (6.26)$$

где $b(g)$ – 1-коцикл $P \rightarrow \mathcal{H}^+$, заданный равенством (6.14);

$$U^+(g_1)\Psi_g^+ = \exp\left(-\int_X u(g_1(x), g(x)) dm(x)\right) \Psi_{g_1g}^+, \quad (6.27)$$

где

$$u(g_1, g) = i \operatorname{Im} c(g_1 z_0) + \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}(g_1)b(g), b(g_1) \rangle. \quad (6.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (6.26) следует из соотношения (6.15). Равенство (6.27) следует из соотношения (6.17), в котором следует поменять места g и g_1 .

ТЕОРЕМА 6.2. *Операторы $U^+(g)$ сохраняют скалярные произведения $\langle \Psi_{g_1}^+, \Psi_{g_2}^+ \rangle$, а потому продолжаются до унитарных операторов на всем пространстве $\text{INT } H^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\langle U^+(g)\Psi_{g_1}^+, U^+(g)\Psi_{g_2}^+ \rangle = \exp\left(\int_X v(g(x), g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right),$$

где

$$v(g, g_1, g_2) = -(u(g, g_1) + \overline{u(g, g_2)}) + \langle b(gg_1), b(gg_2) \rangle.$$

Отсюда и из равенства

$$\langle b(gg_1), b(gg_2) \rangle = \|b(g)\|^2 + \langle \tilde{T}^+(g)b(g_1), b(g) \rangle + \langle b(g), \tilde{T}^+(g)b(g_2) \rangle + \langle b(g_1), b(g_2) \rangle$$

следует, что $\langle U^+(g)\Psi_{g_1}^+, U^+(g)\Psi_{g_2}^+ \rangle = \exp\left(\int_X \langle b(g_1(x)), b(g_2(x)) \rangle dm(x)\right)$.

ТЕОРЕМА 6.3. *Операторы U^+ образуют проективное представление группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$; именно, для любых $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ имеем:*

$$U^+(g_1g_2) = \exp\left(i \operatorname{Im} \int_X a(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right) U^+(g_1)U^+(g_2), \quad (6.29)$$

где

$$a(g_1, g_2) = c(g_1z_0) + c(g_2z_0) - c(g_1g_2z_0) + \langle T(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle. \quad (6.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (6.27), имеем:

$$\begin{aligned} U^+(g_1)U^+(g_2)\Psi_g^+ &= \exp\left(-\int_X a_1(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right) \Psi_{g_1g_2g}^+, \\ U^+(g_1g_2)\Psi_g^+ &= \exp\left(-\int_X a_2(g_1g_2(x)) dm(x)\right) F_{g_1g_2g}^+, \end{aligned}$$

где

$$a_1(g_1, g_2) = u(g_2, g) + u(g_1, g_2g), \quad a_2(g_1g_2) = u(g_1g_2, g).$$

Следовательно,

$$U^+(g_1)U^+(g_2)\Psi_g = \exp\left(-\int_X a'(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right) U^+(g_1g_2)\Psi_g,$$

где

$$a'(g_1, g_2) = u(g_2, g) + u(g_1, g_2g) - u(g_1g_2, g),$$

т. е., согласно (6.28),

$$a'(g_1, g_2) = i \operatorname{Im}(c(g_1z_0) + c(g_2z_0) - c(g_1g_2z_0)) + v(g_2, g) + v(g_1, g_2g) - v(g_1g_2, g),$$

где $v(g_1, g) = \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}^+(g_1)b(g), b(g_1) \rangle$. Отсюда и из соотношения

$$v(g_2, g) + v(g_1, g_2g) - v(g_1g_2, g) = i \operatorname{Im} \langle \tilde{T}^+(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle$$

следует, что

$$a'(g_1, g_2) = i \operatorname{Im}(c(g_1z_0) + c(g_2z_0) - c(g_1g_2z_0) + \langle \tilde{T}^+(g_1)b(g_2), b(g_1) \rangle).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} U^+(g_1g_2)\Psi_g &= \exp\left(i \operatorname{Im} \int_X a(g_1(x), g_2(x)) dm(x)\right) U^+(g_1)U^+(g_2)\Psi_g \text{ для любого } g \in P^X, \end{aligned}$$

где $a(g_1, g_2)$ задается равенством (6.30) и не зависит от g . Отсюда следует (6.29). Теорема 6.3 доказана.

Продолжение второго представления U^- группы P^X до представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ получается заменой тотального множества $\tilde{M}^+ \subset \tilde{H}^+$ тотальным множеством $\tilde{M}^- \subset \tilde{H}^-$ функционалов $\Psi_g^- = \overline{\Psi_g^+}$. При этом формулы для скалярных произведений $\langle \Psi_{g_1}^-, \Psi_{g_2}^- \rangle$ и для операторов $U^-(g)$, а также соотношение между операторами $U^-(g_1 g_2)$ и $U^-(g_1)U^-(g_2)$ получаются из соответствующих формул (6.26), (6.27) и (6.29) для случая U^+ комплексным сопряжением:

$$\langle \Psi_{g_1}^-, \Psi_{g_2}^- \rangle = \exp \left(\int_X \langle b(g_2(x)), b(g_1(x)) \rangle dm(x) \right), \quad (6.31)$$

$$U^-(g_1) \Psi_g^- = \exp \left(- \int_X \overline{u(g_1(x), g(x))} dm(x) \right) \Psi_{g_1 g}^-, \quad (6.32)$$

$$U^-(g_1 g_2) = \exp \left(-i \operatorname{Im} \int_X a(g_1(x), g_2(x)) dm(x) \right) U^-(g_1) U^-(g_2). \quad (6.33)$$

6.5. Продолжение ортогонального представления $U^0 = \operatorname{INT} T^0$ группы токов P^X до ортогонального представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Как отмечалось, при естественном вложении $\operatorname{INT} H^0 \subset \operatorname{INT} H^+ \otimes \operatorname{INT} H^-$ операторы $U^0(g)$ группы P^X получаются ограничением на $\operatorname{INT} H^0$ операторов $U^+(g) \otimes U^-(g)$ в пространстве $\operatorname{INT} H^+ \otimes \operatorname{INT} H^-$. Тем самым, построенные продолжения представлений $U^\pm$ группы P^X до представлений группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$ индуцируют продолжение представления U^0 группы P^X в пространстве $\operatorname{INT} H^+$ до ортогонального представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Его окомплесивание есть унитарное непроективное представление $\operatorname{INT}(T^+ \oplus T^-) = \operatorname{INT} T^+ \otimes \operatorname{INT} T^-$, эквивалентное представлениям группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, построенного ранее в [1].

Приведем независимое описание продолжения представления $U^0(g)$ группы P^X до представления группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})^X$.

Отнесем каждой паре $z \in L^X$ и $(r, x) \in \mathbb{R}_+^* \times X$ вектор $f_{z,r,x}^0 \in H_r^0$,

$$f_{z,r,x}^0 = 2^{-1/2} (e^{ir_k z(x_k)}, e^{-ir_k \overline{z(x_k)}}),$$

и определим функционалы $F_z^0(\xi)$, $z \in L^X$, на $l_+^1(X)$ следующим равенством:

$$F_z^0(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} f_{z,r_k,x_k}^0. \quad (6.34)$$

ТЕОРЕМА 6.4. Для любых $z_1, z_2 \in L^X$ имеем

$$\begin{aligned} \langle F_{z_1}^0, F_{z_2}^0 \rangle &= \exp \left(- \int_X \log |z_1(x) - \overline{z_2(x)}| dm(x) \right) \\ &= \exp \left(- \int_X \operatorname{Re} c(z_1(x), z_2(x)) dm(x) \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

В частности,

$$\|F_z^0\|^2 = \exp \left(- \int_X \log(2 \operatorname{Im} z(x)) dm(x) \right). \quad (6.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для

$$\langle f_{z_1,r,x}^0, f_{z_2,r,x}^0 \rangle = \frac{1}{2} (e^{irz(x)}, e^{-ir\overline{z(x)}}), \quad \text{где } z = z_1 - \overline{z_2} \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in L^X.$$

Следовательно,

$$\langle F_{z_1}^0, F_{z_2}^0 \rangle = \int_{l_+^1(X)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} e^{ir_k z(x_k)} + \frac{1}{2} e^{-ir_k \bar{z}(x_k)} \right) d\mathcal{L}(\xi), \quad \text{где } z = z_1 - z_2.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся теоремой 2.3. Имеем на основании этой теоремы:

$$\langle F_{z_1}^0, F_{z_2}^0 \rangle = \exp \left(\int_X \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} e^{irz(x)} + \frac{1}{2} e^{-ir\bar{z}(x)} - e^{-r} \right) r^{-1} dr dm(x) \right),$$

т. е.

$$\langle F_{z_1}^0, F_{z_2}^0 \rangle = \exp \left(\frac{1}{2} \int_X (a(x) + \overline{a(x)}) dm(x) \right),$$

где

$$a(x) = \int_0^\infty (e^{irz(x)} - e^{-r}) r^{-1} dr.$$

Поскольку $e^{irz(x)} = e^{-r(v(x) - iu(x))}$ при $z = u + iv$, где $v > 0$, то

$$a(x) = -\log(v(x) - iu(x)).$$

Отсюда следует (6.35).

СЛЕДСТВИЕ. Функционалы F_z^0 принадлежат пространству $\text{INT } H^0$.

Легко убедиться, что множество этих функционалов тотально в $\text{INT } H^0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Зададим операторы $U^0(g)$, $g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})^X$, на $\tilde{M}^0$ следующим равенством:

$$U^0(g)F_z^0 = \exp \left(\text{Re} \int_X \varphi(g(x), z(x)) dm(x) \right) F_{gz}^0, \quad (6.37)$$

где $\varphi(g, z)$ задается равенством (6.25). Другими словами, формула для $U^0(g)$ получается из формулы для $U^\pm(g)$ заменой функции $\varphi(g, z)$ ее вещественной частью.

Подобно операторам $U^\pm$, на элементах подгруппы P^X эти операторы совпадают с операторами исходного представления группы P^X .

Введем, по аналогии со случаем $U^\pm$, тотальное множество $\tilde{M}^0 \subset \text{INT } H^0$ функционалов вида

$$\Psi_g^0 = 2^{-1/2} \exp \left(\text{Re} \int_X c(z(x)) dm(x) \right) F_z^0, \quad g \in \text{SL}(2, \mathbb{R})^X, \quad \text{где } z = gz_0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. На множестве $\tilde{M}^0$ скалярное произведение и операторы представления задаются формулами:

$$\langle \Psi_{g_1}^0, \Psi_{g_2}^0 \rangle = \exp \left(\int_X \langle b^0(g_1(x)), b^0(g_2(x)) \rangle dm(x) \right), \quad (6.38)$$

где $b^0(g)$ – 1-коцикл $P \rightarrow \mathcal{H}^0$, заданный равенством

$$b^0(g) = 2^{-1/2}(b(g), \overline{b(g)}); \quad (6.39)$$

$$U^0(g_1)\Psi_g^0 = \exp\left(-\int_X \tilde{u}(g_1(x), g(x)) dm(x)\right)\Psi_{g_1g}^0, \quad (6.40)$$

где

$$\tilde{u}(g_1, g) = \operatorname{Re} u(g_1, z) = \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}^0(g_1)b^0(g), b^0(g_1) \rangle. \quad (6.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функционалов Ψ^0 следует, что

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{g_1}^0, \Psi_{g_2}^0 \rangle &= \exp\left(\operatorname{Re} \int_X \langle b(g_1(x)), b(g_2(x)) \rangle dm(x)\right), \\ U^0(g_1)\Psi_g^0 &= \exp\left(-\operatorname{Re} \int_X u(g_1(x), g(x)) dm(x)\right)\Psi_{g_1g}^0, \end{aligned}$$

где $u(g_1, g)$ задается равенством (6.28). Остается заметить, что $\|b(g)\| = \|b^0(g)\|$ и $\operatorname{Re} \langle \tilde{T}^+(g_1)b(g), b(g_1) \rangle = \langle \tilde{T}^0(g_1)b^0(g), b^0(g_1) \rangle$.

По аналогии с теоремами 6.2 и 6.3 получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.5. *Операторы $U^0(g)$ сохраняют скалярные произведения $\langle \Psi_{g_1}^0, \Psi_{g_2}^0 \rangle$ и продолжаются до ортогональных (не проективных) операторов на всем пространстве $\operatorname{INT} H^0$.*

6.6. Связь с фоковскими представлениями группы $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})^X$. Установим связь интегральной модели U^+ представления группы $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})^X$ с фоковским представлением этой группы.

По определению, фоковское представление V^+ группы $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})^X$, ассоциированное с унитарным представлением $\tilde{T}^+$ группы $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ в пространстве $\mathcal{H}^+$ и 1-коциклом $b: \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}^+$, действует в гильбертовом пространстве $\tilde{H} = \operatorname{EXP} \mathcal{H}^X$, где

$$\operatorname{EXP} \mathcal{H}^X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k \mathcal{H}^X$$

и

$$\mathcal{H}^X = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x^+ dm(x), \quad \mathcal{H}_x^+ = \mathcal{H}^+.$$

Рассмотрим тотальное подмножество $\mathcal{M}^+ \subset \operatorname{EXP} \mathcal{H}^X$ векторов вида $\Phi_{g_1}^+ = \operatorname{EXP} b^X(g_1)$, $g_1 \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})^X$, где $b^X(g)$ – 1-коцикл $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})^X \rightarrow \mathcal{H}^X$, порожденный 1-коциклом $b^+: \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}^+$.

На этом подмножестве скалярные произведения и операторы фоковского представления задаются следующими формулами:

$$\langle \Phi_{g_1}^+, \Phi_{g_2}^+ \rangle = \exp\left(\int_X \langle b(g_1(x)), b(g_2(x)) \rangle dm(x)\right), \quad (6.42)$$

$$V^+(g)\Phi_{g_1}^+ = \exp\left(\int_X v(g(x), g_1(x)) dm(x)\right)\Phi_{gg_1}^+, \quad (6.43)$$

где

$$v(g, g_1) = -\frac{1}{2} \|b(g)\|^2 - \langle T(g)b(g_1), b(g) \rangle \quad \text{для любых } g, g_1 \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R}). \quad (6.44)$$

ТЕОРЕМА 6.6. *Продолжение на $SL(2, \mathbb{R})^X$ интегральной модели U^+ представления группы P^X в пространстве $INT H^+$ проективно эквивалентно фоковской модели V^+ представления группы $SL(2, \mathbb{R})^X$.*

В самом деле, при биекции $\Psi_g^+ \mapsto \Phi_g^+$ тотальных подмножеств $\tilde{M}^+$ и $\mathcal{M}^+$ в пространствах этих представлений скалярные произведения сохраняются, а формулы для соответствующих операторов $U^+(g)$ и $V^+(g)$ различаются лишь множителем:

$$U^+(g) = \exp\left(-i \int_X c(g(x)z_0) dm(x)\right) V^+(g).$$

Аналогичное утверждение справедливо для интегральной модели представления U^- .

Сравним теперь интегральную модель U^0 представления группы $SL(2, \mathbb{R})^X$ и фоковское представление V^0 этой группы, ассоциированное с ортогональным представлением $\tilde{T}^0$ группы $SL(2, \mathbb{R})$ в пространстве $\mathcal{H}^0$ и 1-коциклом $b^0: SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}^0$.

В этом случае фоковское представление V^0 является настоящим (непроективным), и на соответствующих тотальных подмножествах M^0 и $\mathcal{M}^0$ в пространствах представлений скалярные произведения и формулы для операторов представления совпадают. Отсюда вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.7. *Продолжение на $SL(2, \mathbb{R})^X$ интегральной модели U^0 ортогонального представления группы P^X в пространстве $\tilde{H}^0$ эквивалентно фоковской модели V^0 представления группы $SL(2, \mathbb{R})^X$. Сплетающий оператор этих представлений порожден отображением циклических векторов: $\Psi_e^0 \mapsto \Phi_e^0 = \text{EXP } 0$.*

6.7. Добавление: унитарные представления группы $\tilde{G}^X$, где $\tilde{G}$ – универсальная накрывающая группы $G = SL(2, \mathbb{R})$. В этом пункте через G обозначена группа $SL(2, \mathbb{R})$, а через $\tilde{G}$ – ее универсальная накрывающая, т. е. накрытие над G , где слой над $g \in G$ есть множество $\mathbb{Z}$ классов гомотопически эквивалентных путей на G из единичного элемента e в g . Элементы из $\tilde{G}$ условимся обозначать через $\tilde{g}$, а их образы в G – через g .

Поскольку G является факторгруппой группы $\tilde{G}$, интегральные модели проективных представлений $U^\pm$ ее группы токов индуцируют проективные представления $\tilde{U}^\pm$ группы $\tilde{G}^X$ в тех же гильбертовых пространствах $INT H^\pm$. Будет показано, что определенные так проективные представления группы $\tilde{G}^X$ проективно эквивалентны ее унитарным непроективным представлениям $V^\pm$ в тех же пространствах $\tilde{H}^\pm$. Приведем описание этих представлений $V^\pm$, ограничившись для определенности случаем $V^+ = V$. Для описания представления V достаточно определить действие операторов представления на элементах тотального подмножества функционалов F_z .

Введем функцию $\psi(\tilde{g}, z)$ на $\tilde{G} \times L$, где L – верхняя полуплоскость. Положим

$$\varphi(g, z) = -\log(\beta z + \alpha) \quad \text{при } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G \text{ и } z \in L,$$

где, как и прежде, $\log$ – ветвь логарифма на плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси такая, что $\log 1 = 0$. Функция φ всюду

конечна, и при любом фиксированном $z \in L$ она является однозначной аналитической функцией от $g \in G$ в достаточно малой окрестности единичного элемента e . Поэтому для любого $g \in G$ и любого пути $\tilde{g}$ на G из e в g определено ее аналитическое продолжение вдоль этого пути из точки e в точку g . Обозначим это аналитическое продолжение через $\psi(\tilde{g}, z)$. Определенная так функция $\psi(\tilde{g}, z)$ зависит только от гомотопического класса пути $\tilde{g}$, а потому является функцией на $\tilde{G} \times L$.

Из определения следует:

$$\psi(\tilde{g}, z) = -\log(\beta z + \alpha) \quad \text{при } g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (6.45)$$

если $g \in G$ и путь $\tilde{g}$ из e в g принадлежит достаточно малой окрестности единичного элемента e .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. При любых $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G}$ и $z \in L^+$ имеет место равенство

$$\psi(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2, z) = \psi(\tilde{g}_1, g_2 z) + \psi(\tilde{g}_2, z). \quad (6.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством

$$\beta z + \alpha = (\beta_1(g_2 z) + \alpha_1)(\beta_2 z + \alpha_2),$$

где (α_1, β_1) , (α_2, β_2) и (α, β) — элементы матриц g_1 , g_2 и $g_1 g_2$ соответственно. Из него при g_1, g_2 , достаточно близких к единичному элементу, следует:

$$\log(\beta z + \alpha) = \log(\beta_1(g_2 z) + \alpha_1) + \log(\beta_2 z + \alpha_2).$$

Таким образом, в силу (6.45), равенство (6.46) справедливо для элементов g_1, g_2 и путей $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$, достаточно близких к единице. Поэтому оно сохраняется и при аналитическом продолжении по g , т. е. остается справедливым для любых $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$. Предложение 6.8 доказано.

Поставим в соответствие каждой паре $\tilde{g} \in \tilde{G}^X$ и $z \in L^X$ следующую функцию на X :

$$\Psi_{\tilde{g}, z}(x) = \psi(\tilde{g}(x), z(x)). \quad (6.47)$$

Из предложения 6.8 вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Функции $\Psi_{\tilde{g}, z}$ связаны соотношением:

$$\Psi_{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2, z} = \Psi_{\tilde{g}_1, g_2 z} + \Psi_{\tilde{g}_2, z}. \quad (6.48)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Определим действие операторов $V(\tilde{g})$, $\tilde{g} \in \tilde{G}^X$, на функции F_z тотального множества M следующей формулой:

$$V(\tilde{g})F_z = \exp\left(\int_X \Psi_{\tilde{g}, z}(x) dm(x)\right) F_{gz}. \quad (6.49)$$

ТЕОРЕМА 6.8. Операторы $V(\tilde{g})$ унитарны на M , т. е.

$$\langle V(\tilde{g})F_{z_1}, V(\tilde{g})F_{z_2} \rangle = \langle F_{z_1}, F_{z_2} \rangle \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in L^X \text{ и } \tilde{g} \in \tilde{G}^X, \quad (6.50)$$

и удовлетворяют соотношению

$$V(\tilde{g}_1\tilde{g}_2)F_z = V(\tilde{g}_1)V(\tilde{g}_2)F_z \quad \text{для любых } \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G}^X \text{ и } z \in L^X. \quad (6.51)$$

Тем самым, они порождают унитарное (непроективное) представление группы $\tilde{G}^X$ в пространстве $\tilde{H}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Групповое свойство (6.51) следует непосредственно из предложения 6.9. Именно:

$$\begin{aligned} V(\tilde{g}_1)V(\tilde{g}_2)F_z &= \exp\left(\int_X (\Psi_{\tilde{g}_1, g_2 z}(x) + \Psi_{\tilde{g}_2, z}(x)) dm(x)\right) F_{g_1 g_2 z} \\ &= \exp\left(\int_X \Psi_{\tilde{g}_1 \tilde{g}_2, z}(x) dm(x)\right) F_{g_1 g_2 z} = U(\tilde{g}_1 \tilde{g}_2)F_z. \end{aligned}$$

Далее, ввиду односвязности группы $\tilde{G}$, свойство унитарности (6.50) достаточно установить только для элементов $\tilde{g} \in \tilde{G}^X$, достаточно близких к единичному элементу. Из определения операторов $V(\tilde{g})$ и формулы (6.23) следует:

$$\langle V(\tilde{g})F_{z_1}, V(\tilde{g})F_{z_2} \rangle = \exp\left(\int_X u(\tilde{g}, z_1, z_2) dm(x)\right),$$

где

$$u(\tilde{g}, z_1, z_2) = \Psi_{\tilde{g}, z_1} + \overline{\Psi_{\tilde{g}, z_2}} - c(gz_1, gz_2).$$

При сделанном предположении имеем, согласно (6.45):

$$\Psi_{\tilde{g}, z_1} + \overline{\Psi_{\tilde{g}, z_2}} = -\log(\beta z_1 + \alpha) - \log(\beta \bar{z}_2 + \alpha).$$

С другой стороны, из равенства

$$gz_1 - \overline{gz_2} = \frac{z_1 - \bar{z}_2}{(\beta z_1 + \alpha)(\beta \bar{z}_2 + \alpha)}$$

следует, что

$$c(gz_1, gz_2) = c(z_1, z_2) - \log(\beta z_1 + \alpha) - \log(\beta \bar{z}_2 + \alpha).$$

Таким образом, $u(\tilde{g}, z_1, z_2) = -c(z_1, z_2)$. Отсюда следует (6.50).

ТЕОРЕМА 6.9. Построенное представление V группы $\tilde{G}^X$ проективно эквивалентно представлению $\tilde{U}$ этой группы.

Утверждение непосредственно следует из формул для операторов этих представлений на тотальном подмножестве M^+ .

7. Интегральные модели представлений группы токов $U(n, 1)^X$

7.1. Исходные определения. Реализуем $U(n, 1)$ как группу линейных преобразований в $\mathbb{C}^{n+1}$, сохраняющих эрмитову форму $x_1 \bar{x}_{n+1} + x_{n+1} \bar{x}_1 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2$, и представим ее элементы в форме блочных матриц

$$g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3},$$

где на диагонали стоят квадратные матрицы соответственно порядка 1, $n - 1$ и 1. В этой реализации максимальная параболическая подгруппа P задается как группа нижних клеточно-треугольных матриц и является полупрямым произведением

$$P = D \ltimes N,$$

где N – максимальная нильпотентная подгруппа клеточных матриц вида

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -z^* & e_{n-1} & 0 \\ it - \frac{zz^*}{2} & z & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{C}^{n-1}$$

(группа Гейзенберга порядка $2n - 1$), а $D \cong \mathbb{C}^* \times U(n - 1)$ – подгруппа клеточно-диагональных матриц вида $d = \text{diag}(\bar{s}^{-1}, u, s)$, $s \in \mathbb{C}^*$, $u \in U(n - 1)$.

Представим D в виде прямого произведения $D = \mathbb{R}_+^* \times D_0$, где D_0 – подгруппа матриц $d = \text{diag}(\varepsilon, u, \varepsilon)$, $|\varepsilon| = 1$, и положим

$$P_0 = D_0 \ltimes N.$$

Таким образом,

$$P = \mathbb{R}_+^* \ltimes P_0 = (\mathbb{R}_+^* \times D_0) \ltimes N.$$

Элементы из D_0 и N будем отождествлять соответственно с парами (ε, u) , где $\varepsilon \in U(1)$, $u \in U(n - 1)$, и парами (t, z) , где $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}^{n-1}$ (вектор-строка). Иногда будем также вместо $(t, z) \in N$ писать (ζ, z) , где $\zeta = it - |z|^2/2$. В этих обозначениях групповые соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} (\zeta_1, z_1)(\zeta_2, z_2) &= (\zeta_1 + \zeta_2 - z_1 z_2^*, z_1 + z_2), \\ (\varepsilon, u)^{-1}(\zeta, z)(\varepsilon, u) &= (\zeta, \bar{\varepsilon} z u), \\ r(\zeta, z)r^{-1} &= (r^2 \zeta, rz) \quad \text{при } r \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

7.2. Описание канонических неприводимых представлений группы P_0 . Имеется, с точностью до сопряженности относительно группы автоморфизмов $\mathbb{R}_+^*$, два счетных набора $T_m^\pm$, $m = 0, 1, \dots$, канонических неприводимых унитарных представлений группы P_0 . Опишем сначала представление T_m^+ .

Введем унитарное представление группы P_0 в гильбертовом пространстве $H = H^+$ функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} |f(z)|^2 \exp(-zz^*) d\mu(z), \quad zz^* = \sum z_i \bar{z}_i, \quad (7.1)$$

где $d\mu(z)$ – лебегова мера на $\mathbb{C}^{n-1}$, нормированная условием

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} \exp(-zz^*) d\mu(z) = 1.$$

Операторы представления группы P_0 задаются следующими формулами:

$$(T^+(g)f)(z) = \exp(\zeta_0 - zz_0^*) f(z + z_0) \quad \text{при } g = (\zeta_0, z_0) \in N, \quad (7.2)$$

$$(T^+(g)f)(z) = f(\bar{\varepsilon} z u) \quad \text{при } g = (\varepsilon, u) \in D_0. \quad (7.3)$$

Соответственно, операторы T_r^+ представлений, сопряженных с T^+ , относительно группы автоморфизмов $\mathbb{R}_+^*$, действуют по формулам:

$$(T_r^+(g)f)(z) = \exp(r^2\zeta_0 - rzz_0^*)f(z + rz_0) \quad \text{при } g = (\zeta_0, z_0) \in N, \quad (7.4)$$

$$(T_r^+(g)f)(z) = f(\bar{\varepsilon}zu) \quad \text{при } g = (\varepsilon, u) \in D_0. \quad (7.5)$$

Заметим, что мультипликатор $e^{\zeta_0 - zz_0^*}$ в формуле для операторов подгруппы N является целой аналитической функцией от z . Отсюда следует, что *пространство H^+ есть прямая сумма неприводимых попарно не эквивалентных инвариантных подпространств*

$$H^+ = \bigoplus_{m=1}^{\infty} H_m^+,$$

где H_m^+ – инвариантное подпространство, циклически порожденное однородными полиномами от $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}$ степени однородности m . В частности, элементами пространства H_0^+ являются целые аналитические функции на $\mathbb{C}^{n-1}$.

Обозначим через T_m^+ ограничения операторов T^+ представления группы P_0 на подпространства H_m^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Представления T_m^+ группы P_0 в пространствах H_m^+ являются каноническими и обладают единственным почти инвариантным вектором $\varphi_m(z) = l_m^{n-2}(zz^*)$, где l_m^{n-2} – полином Лагерра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем все почти инвариантные векторы в H_m^+ . Очевидно, что каждый такой вектор $f_m(z)$ инвариантен относительно подгруппы $U(n-1)$, а потому является функцией от zz^* , $f(z) = \varphi(zz^*)$. Заметим далее, что для любого m прямая сумма пространств $\bigoplus_{k=1}^m H_k^+$ содержит все векторы $(zz^*)^k$ с $k \leq m$, но не содержит векторов $(zz^*)^k$ с $k > m$. Отсюда следует, что, с точностью до множителя, H_m содержит единственный вектор $f_m(z)$ вида $\varphi(zz^*)$, причем этот вектор получается на m -м шаге ортогонализации последовательности векторов $1, zz^*, (zz^*)^2, \dots$ относительно нормы в H^+ . Легко убедиться, что получаемый при такой ортогонализации этот вектор есть, с точностью до множителя, полином Лагерра от zz^* : $f_m(z) = l_m^{n-2}(zz^*)$. Далее, из очевидной оценки: $(T_r^+(g)f_m)(z) = f_m(z) + O(r)$ при $g \in N$ следует, что вектор $f_m(z)$ почти инвариантен. Следовательно, согласно предложению 3.2, представление T_m^+ канонично. Предложение 7.1 доказано.

Второе семейство T_m^- канонических неприводимых унитарных представлений группы P_0 получается из семейства T_m^+ операцией комплексного сопряжения, именно, представление T_m^- действует в пространстве функций $\bar{f}(z)$, где $f(z) \in H_m^+$, операторами вида

$$T^-(g)\bar{f} = \overline{T^+(g)f}.$$

В частности, представление T_0^- действует в пространстве целых антианалитических функций на $\mathbb{C}^{n-1}$.

С каждой парой T_m^+, T_m^- неприводимых унитарных представлений группы P_0 связано неприводимое ортогональное представление T_m^0 группы P_0 в пространстве $H_m^0 \subset H_m^+ \oplus H_m^-$ векторов вида $(f, \bar{f})$, $f \in H_m^+$. Операторы представления

определяются как ограничение на H_m^0 операторов $T_m^+(g) \oplus T_m^-(g)$ на $H_m^+ \oplus H_m^-$, т. е.

$$T_m^0(g)(f, \bar{f}) = (T_m^+(g)f, T_m^-(g)\bar{f}) = (T_m^+(g)f, \overline{T_m^+(g)f}).$$

С представлениями $T_m^\pm$ группы P_0 ассоциированы попарно не эквивалентные неприводимые унитарные представления $\tilde{T}_m^\pm$ максимальной параболической группы P в пространствах $\mathcal{H}_m^\pm = \int_0^\infty H_{m,r}^\pm r^{-1} dr$, $H_{m,r}^\pm = H_m^\pm$, и попарно не эквивалентные интегральные модели $U_m^\pm = \text{INT } T_m^\pm$ неприводимых унитарных представлений группы токов P^X . Представления $\tilde{T}_m^\pm$ группы P обладают нетривиальными 1-коциклами $b_m^\pm: P \rightarrow \mathcal{H}_m^\pm$,

$$b_m^\pm(g)(g) = T^\pm(g)f_m(r, z) - f_m(r, z), \quad \text{где } f_m(r, z) = e^{-r} l_m^{n-2}(zz^*),$$

где l_m^{n-2} – полином Лагерра.

Соответственно, с представлениями T_m^0 группы P_0 ассоциированы попарно не эквивалентные неприводимые ортогональные представления $\tilde{T}_m^0$ группы P в пространствах $\mathcal{H}_m^0 \subset \mathcal{H}_m^+ \oplus \mathcal{H}_m^-$ и попарно не эквивалентные интегральные модели $U_m^0 = \text{INT } T_m^0$ неприводимых ортогональных представлений группы токов P^X . Представления $\tilde{T}_m^0$ группы P обладают нетривиальными 1-коциклами $b^0(g) = (b^+(g), b^-(g))$.

7.3. Представления группы P , ассоциированные с представлениями $T^\pm$ и T^0 группы P_0 . В последующих пунктах этого раздела мы ограничиваемся каноническими представлениями подгруппы P_0 такими, что ассоциированное с ними представление группы P продолжаемо до представления всей группы $U(n, 1)$. Этим свойством обладают унитарные представления $T_0^\pm$, ортогональное представление T_0^0 и только они. Опишем подробно эти представления. Нижний значок 0 в их обозначениях в дальнейшем будем опускать.

Представление T^+ подгруппы P_0 реализуется в гильбертовом пространстве H^+ *целых аналитических функций* $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (7.1); операторы представления задаются на H формулами (7.2), (7.3). Соответственно, операторы сопряженных с T^+ представлений группы P_0 действуют в пространствах $H_r^+ = H^+$ по формулам (7.4), (7.5).

Вектором в H^+ , почти инвариантным относительно семейства сопряженных представлений T_r^+ группы P_0 , является функция $f(z) \equiv 1$, которую мы будем дальше обозначать через $\mathbb{1}$. Имеем для нее

$$\|T_r^+(g)\mathbb{1} - \mathbb{1}\| < c(g)r \quad \text{для любого } g \in P_0.$$

Ассоциированное с T^+ представление $\tilde{T}^+$ максимальной параболической группы P реализуется в прямом интеграле по мере $d^*r = r^{-1} dr$ на $\mathbb{R}^+$ гильбертовых пространств H_r^+ ,

$$\mathcal{H}^+ = \int_0^\infty H_r^+ d^*r,$$

т. е. элементами $\mathcal{H}^+$ являются сечения $f(r)$ расслоения над $\mathbb{R}_+^*$, где слоем над $r \in \mathbb{R}_+^*$ является пространство H_r^+ , удовлетворяющие условию

$$\int_0^\infty \|f(r)\|^2 r^{-1} dr < \infty.$$

В этой реализации операторы подгруппы P_0 действуют на каждом пространстве H_r^+ по формулам (7.4), (7.5), а операторы гомотетии $T(r_0)$, $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, изометрически отображают H_r в $H_{r_0 r}$.

Таким образом, представление $\tilde{T}^+$ группы P действует в пространстве $\mathcal{H}^+$ по формулам:

$$(\tilde{T}^+(g)f)(r, z) = \exp\left(r^2\left(it_0 - \frac{|z_0|^2}{2}\right) - rzz_0^*\right) f(r, z + rz_0) \quad \text{при } g = (t_0, z_0) \in N, \quad (7.6)$$

$$(\tilde{T}^+(g)f)(r, z) = f(r, \bar{\varepsilon}zu) \quad \text{при } g = (\varepsilon, u) \in D_0, \quad (7.7)$$

$$(\tilde{T}^+(g)f)(r, z) = f(r_0 r, z) \quad \text{при } g = r_0 \in \mathbb{R}_+^*. \quad (7.8)$$

Представление $\tilde{T}^+$ группы P имеет нетривиальный 1-коцикл $b^+ : P \rightarrow \mathcal{H}^+$:

$$b^+(g) = \tilde{T}^+(g)f_0(r, z) - f_0(r, z), \quad \text{где } f_0(r, z) = e^{-r^2}.$$

Второе каноническое унитарное представление T^- подгруппы P_0 и ассоциированное с ним унитарное представление группы P действуют соответственно в пространствах H^- и $\mathcal{H}^- = \int_0^\infty H_r^- d^*r$, где H^- – пространство *целых антианалитических функций* $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (7.1).

Наконец, каноническое ортогональное представление T^0 подгруппы P_0 и ассоциированное с ним ортогональное представление группы P действуют соответственно в пространствах H^0 и $\mathcal{H}^0 = \int_0^\infty H_r^- r^{-1} dr$, где $H^0 \subset H^+ \oplus H^-$ – подпространство векторов $(f, \bar{f})$, $f \in H^+$. Операторы $T^0(g)$ на H^0 получаются ограничением на H^0 операторов $T^+(g) \oplus T^-(g)$ на $H^+ \oplus H^-$, где H^- – пространство *целых антианалитических функций* $f(z)$ на $\mathbb{C}^{n-1}$ с нормой (7.1).

7.4. Представления группы P^X , ассоциированные с представлениями $T^\pm$ и T^0 группы P_0 . В соответствии с общими определениями, унитарные представления $U^\pm$ группы P^X , ассоциированные с представлениями $T^\pm$ группы P_0 , реализуются в прямых интегралах

$$\text{INT } H^\pm = \int_{l_+^1(X)}^\oplus H_\xi^\pm d\mathcal{L}(\xi),$$

где $H_\xi^\pm$, $\xi = \{r_k, x_k\}$, – счетные тензорные степени гильбертова пространства $H^\pm$ со стабилизирующим вектором $\mathbb{1}$:

$$H_\xi^\pm = \bigotimes_{k=1}^\infty H_{r_k}^\pm, \quad H_{r_k}^\pm = H^\pm.$$

Таким образом, элементами $\text{INT } H^\pm$ являются сечения $F(\tilde{r})$ расслоения над D_+ со слоем $H_{\tilde{r}}^\pm$.

Операторы $U^\pm(g)$, $g \in P_0^X$, действуют в слоях $\mathcal{H}_{\tilde{r}}^\pm$ расслоения по формуле

$$U^\pm(g(\cdot)) = \bigotimes_{k=1}^\infty T_{r_k}^\pm(g(x_k)). \quad (7.9)$$

Операторы $U^\pm(r_0(\cdot))$, $r_0 \in \mathbb{R}^X$, задаются формулой

$$(U^\pm(r_0(\cdot))f)(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_X \log r_0(x) dm(x)\right) f(r_0(\cdot)\xi). \quad (7.10)$$

Их групповое свойство и унитарность операторов $U^\pm(g)$ при $g \in P_0^X$ очевидны, а унитарность операторов $U^\pm(r_0(\cdot))$, $r_0 \in \mathbb{R}^X$, следует из проективной инвариантности меры $\mathcal{L}$.

Аналогично, ортогональное представление группы P^X , ассоциированное с представлением T^0 группы P_0 , реализуется в прямом интеграле

$$\text{INT } H^0 = \int_{l_+^1(X)}^\oplus H_\xi^0 d\mathcal{L}(\xi),$$

где H_ξ^0 , $\xi = \{r_k, x_k\}$, – счетные тензорные степени вещественного гильбертова пространства $H^0 \subset H^+ \oplus H^-$ со стабилизирующим вектором $2^{-1/2}(\mathbb{I}, \mathbb{I})$, а операторы $U^0(r_0(\cdot))$, $r_0 \in \mathbb{R}^X$, задаются формулой, аналогичной (7.10).

7.5. Продолжение представлений $\tilde{T}^\pm$ и $\tilde{T}^0$ подгруппы P до представлений группы $U(n, 1)$. Конструкция этих продолжений аналогична конструкции продолжений для случая $SL(2, \mathbb{R})$, приведенной в предыдущем разделе. Опишем сначала продолжения на $U(n, 1)$ представления $\tilde{T}^+$ подгруппы P .

Введем, по аналогии с плоскостью Лобачевского для случая $SL(2, \mathbb{R})$, однородное пространство $L = U(n, 1)/K$, где K – максимальная компактная подгруппа (n -мерное комплексное пространство Лобачевского). В принятой матричной реализации K есть подгруппа в $U(n, 1)$ клеточных матриц вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & a & \mu \\ b & c & b \\ \mu & a & \lambda \end{pmatrix},$$

$$L = \{v = (a, b) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{n-1} \mid a + \bar{a} + b^*b < 0\}, \quad \text{где } b^*b = \sum \bar{b}_i b_i$$

(b – вектор-столбец), и действие $v \mapsto gv$ на L элементов $g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$ группы $U(n, 1)$ задается так: $g(a, b) = (a', b')$, где

$$\begin{aligned} a' &= (g_{11} + g_{12}b + g_{13}a)^{-1}(g_{31} + g_{32}b + g_{33}a), \\ b' &= (g_{11} + g_{12}b + g_{13}a)^{-1}(g_{21} + g_{22}b + g_{23}a). \end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned} g(a, b) &= (a + \zeta_0 + (z_0, b), b - z_0^*) \quad \text{при } g = (\zeta_0, z_0) \in N, \\ g(a, b) &= (a, ub\bar{\varepsilon}) \quad \text{при } g = (\varepsilon, u) \in D_0, \\ g(a, b) &= (r^2a, rb) \quad \text{при } g = r \in \mathbb{R}_+^*, \\ s(a, b) &= (a^{-1}, a^{-1}b) \quad \text{при инволюции } s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & e_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Неподвижной точкой на L относительно действия подгруппы K является точка $v_0 = (-1, 0)$.

Введем следующую функцию на $L \times L$:

$$p(v_1, v_2) = -(a_1 + \bar{a}_2 + b_2^* b_1) \quad \text{при } v_i = (a_i, b_i) \in L. \quad (7.12)$$

Очевидно, что $p(v_0, v_0) = 2$ при $v_0 = (-1, 0)$, и легко убедиться, что

$$\operatorname{Re} p(v_1, v_2) > 0 \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in L. \quad (7.13)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Функция $p(v_1, v_2)$, где $v_1 = (a_1, b_1)$, $v_2 = (a_2, b_2) \in L$ и $g \in U(n, 1)$, удовлетворяет соотношению

$$p(gv_1, gv_2) = p(v_1, v_2)(g_{11} + g_{12}b_1 + g_{13}a_1)^{-1} [\overline{(g_{11} + g_{12}b_2 + g_{13}a_2)}]^{-1}. \quad (7.14)$$

В частности, функция $p(v_1, v_2)$ инвариантна относительно действия подгруппы P_0 и $p(gv_1, gv_2) = r^2 p(v_1, v_2)$ при $g = r \in \mathbb{R}_+^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость приведенных соотношений для элементов $g \in P_0$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ и инволюции s следует непосредственно из (7.11). Поскольку эти элементы алгебраически порождают $U(n, 1)$, отсюда следует их справедливость и для любых элементов $g \in U(n, 1)$.

Поставим в соответствие каждому $v = (a, b) \in L$ следующую функцию на $\mathbb{R}_+^* \oplus \mathbb{C}^{n-1}$:

$$f_v(r, z) = \exp(r^2 a + r(z, b)), \quad \text{где } (z, b) = \sum z_i b_i. \quad (7.15)$$

Заметим, что в этих обозначениях выражение для 1-коцикла на $\mathcal{H}^+$ имеет следующий вид:

$$b^+(g) = \tilde{T}^+(g)f_{v_0} - f_{v_0}, \quad \text{где } v_0 = (-1, 0). \quad (7.16)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. При любых фиксированных $v \in L$ и r функция $f_v(r, z)$ принадлежит пространству H^+ , и скалярное произведение в H^+ двух таких функций имеет вид

$$\langle f_{v_1}, f_{v_2} \rangle_{H^+} = \exp(-r^2 p(v_1, v_2)) \quad \text{при } v_i = (a_i, b_i), \quad (7.17)$$

где $p(v_1, v_2)$ задается равенством (7.12). В частности,

$$\|f_v\|_{H^+}^2 = \exp(-r^2 p(v, v)) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\langle f_{v_1}, f_{v_2} \rangle_{H^+} = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \exp(r^2(a_1 + \bar{a}_2) + r(z, b_1) + r(\overline{z, b_2}) - zz^*) d\mu(z).$$

Для доказательства (7.17) достаточно воспользоваться следующим равенством:

$$\int_{\mathbb{C}^{n-1}} \exp(r(z, b_1) + r(\overline{z, b_2}) - zz^*) d\mu(z) = \exp(r^2 b_2^* b_1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. Для любых $v_1, v_2 \in L^X$ функция $f_{v_1} - f_{v_2}$ принадлежит $\mathcal{H}^+$, и скалярное произведение функций $f_{v_1} - f_{v_2}$ и $f_{v'_1} - f_{v'_2}$ в пространстве $\mathcal{H}$ имеет вид:

$$\langle f_{v_1} - f_{v_2}, f_{v'_1} - f_{v'_2} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} (-1)^{i+j-1} \log p(v_i, v'_j). \quad (7.18)$$

В частности,

$$\|f_{v_1} - f_{v_2}\|^2 = \frac{1}{2} \log \frac{|p(v_1, v_2)|^2}{p(v_1, v_1)p(v_2, v_2)} < \infty. \quad (7.19)$$

Здесь через $\log$, как и всюду ранее, обозначена ветвь логарифма на плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси, заданная условием $\log 1 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению,

$$\langle f_{v_1} - f_{v_2}, f_{v'_1} - f_{v'_2} \rangle = \int_0^\infty \langle f_{v_1} - f_{v_2}, f_{v'_1} - f_{v'_2} \rangle_{H_r^*} r^{-1} dr.$$

Поэтому равенство (7.19) следует непосредственно из (7.15) и соотношения

$$\int_0^\infty (e^{-ar^2} - e^{-br^2}) r^{-1} dr = \frac{1}{2} (\log b - \log a) \quad \text{при } \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Обозначим через M^+ множество функций $f_{v_1} - f_{v_2}$, $v_1, v_2 \in \mathcal{H}^+$, в пространстве $\mathcal{H}^+$.

Очевидно, что M^+ тотально в $\mathcal{H}^+$.

Легко убедиться, что множество M^+ функций $f_{v_1} - f_{v_2}$ тотально в $\mathcal{H}^+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. Множество функций f_v , $v \in L$, а значит, и множество M^+ , инвариантны относительно действия операторов представления группы P , а именно,

$$\tilde{T}^+(g)f_v = f_{gv} \quad \text{для любых } v \in L \text{ и } g \in P,$$

где $gv = g(a, b)$ определяется при $g \in P$ формулами (7.11).

В этом легко непосредственно убедиться, сравнивая между собой выражения для $\tilde{T}^+(g)f_v$ и f_{gv} .

Таким образом, операторы группы P действуют на множестве M^+ по формуле:

$$\tilde{T}^+(g)(f_{v_1} - f_{v_2}) = f_{gv_1} - f_{gv_2} \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in L. \quad (7.20)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Определим действие операторов $\tilde{T}^+$ всей группы $U(n, 1)$ на множестве M^+ той же формулой (7.20).

ТЕОРЕМА 7.1. Операторы $\tilde{T}^+$ сохраняют скалярное произведение на M^+ , удовлетворяют групповому соотношению и тем самым задают продолжение исходного представления $\tilde{T}^+$ подгруппы P до унитарного представления группы $U(n, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость группового соотношения очевидна. Инвариантность скалярного произведения следует из явной формулы (7.18) для скалярного произведения и соотношения (7.14) для функции $p(v_1, v_2)$.

Определенное так представление $\tilde{T}^+$ группы $U(n, 1)$ является особым, и нетривиальный 1-коцикл $b^+ : U(n, 1) \rightarrow \mathcal{H}^+$ является продолжением на $U(n, 1)$ 1-коцикла группы P , т. е. задается в принятых обозначениях, как и для подгруппы P , формулой $b^+(g) = T(g)f_{v_0} - f_{v_0}$.

Аналогично определяется продолжение представления $\tilde{T}^-$ группы P до унитарного представления группы $U(n, 1)$. Именно, множество M^+ функций $f_{v_1} - f_{v_2}$ заменяется на множество M^- функций $\overline{f_{v_1}} - \overline{f_{v_2}}$. Очевидно, что M^- тотально в $\mathcal{H}^-$ и инвариантно относительно действия операторов $\tilde{T}^-$ группы P :

$$\tilde{T}^-(g)(\overline{f_{z_1}} - \overline{f_{z_2}}) = \overline{f_{gz_1}} - \overline{f_{gz_2}}. \quad (7.21)$$

Той же формулой (7.21) определяется и продолжение представления $\tilde{T}^-$ подгруппы P на всю группу $U(n, 1)$.

Наконец, определенные так продолжения представлений $\tilde{T}^\pm$ подгруппы P до унитарных представлений группы $U(n, 1)$ индуцируют продолжение ортогонального представления подгруппы P в пространстве $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ до ортогонального представления группы $U(n, 1)$.

Приведем в заключение несколько соотношений, которые будут использованы в дальнейшем.

Обозначим:

$$c(v_1, v_2) = \log(p(v_1, v_2)), \quad v_1, v_2 \in L. \quad (7.22)$$

В этих обозначениях условие инвариантности скалярного произведения на M^+ можно представить в виде

$$\begin{aligned} c(gv_1, gv_0) + \overline{c(gv_2, gv_0)} - c(gv_1, gv_2) - c(gv_0, gv_0) \\ = c(v_1, v_0) + \overline{c(v_2, v_0)} - c(v_1, v_2) - c(v_0, v_0) \end{aligned} \quad (7.23)$$

для любого $g \in U(n, 1)$, где $v_0 = (-1, 0)$. Далее, на основании предложения 7.4 имеем:

$$\|b(g)\|^2 = \frac{1}{2} (2 \operatorname{Re} c(gv_0, v_0) - c(gv_0, gv_0) - \log 2), \quad \text{где } v_0 = (-1, 0), \quad (7.24)$$

$$\langle T(g)b(g_1), b(g) \rangle = \frac{1}{2} (c(gg_1v_0, v_0) + c(gv_0, gv_0) - c(gg_1v_0, gv_0) - c(gv_0, v_0)). \quad (7.25)$$

Из (7.24) и (7.25) также следует:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|b(g)\|^2 - \langle T(g)b(g_1), b(g) \rangle &= \frac{i}{2} \operatorname{Im} c(gz_0, v_0) \\ &+ \frac{1}{2} (c(gg_1v_0, gv_0) - c(gg_1v_0, v_0)) - \frac{1}{4} (c(gv_0, gv_0) - c(v_0, v_0)). \end{aligned} \quad (7.26)$$

7.6. Продолжение унитарных представлений $U^\pm$ группы токов P^X до проективных унитарных представлений группы $U(n, 1)^X$. Конструкция этих продолжений аналогична случаю $SL(2, \mathbb{R})$. Опишем продолжение на $U(n, 1)^X$ представления U^+ группы P^X .

Обозначим через L^X пространство ограниченных функций $v: X \rightarrow L$, $v(x) = (a(x), b(x))$. Действие группы $U(n, 1)$ на L индуцирует поточечное действие на L^X группы токов $U(n, 1)^X$ и, в частности, подгруппы P^X .

Поставим в соответствие каждой функции $v(x) = (a(x), b(x)) \in L^X$ функционал F_v^+ на $l_+^1(X)$. Именно, свяжем с каждой функцией $v(x) = (a(x), b(x)) \in L^X$ и каждой парой $(r, x) \in \mathbb{R}_+^* \times X$ целую функцию на $\mathbb{C}^{n-1}$:

$$f_{v,r,x}(z) = \exp(r^2 a(x) + r(z, b(x))) \quad (7.27)$$

и определим функционалы $F_v^+(\xi) = F_v^+(\{r_k, x_k\})$ на $l_+^1(X)$ следующим равенством:

$$F_v^+(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} f_{v,r_k,x_k} \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}. \quad (7.28)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. Для каждого $v \in L^X$ и каждого $\xi \in l_+^1(X)$ бесконечное тензорное произведение (7.28) сходится и принадлежит пространству H_ξ^+ . При этом для любых $v_1, v_2 \in L^X$ имеем:

$$\langle F_{v_1}^+(\xi), F_{v_2}^+(\xi) \rangle_{H_\xi^+} = \exp\left(-\sum r_k^2 p(v_1(x_k), v_2(x_k))\right), \quad (7.29)$$

где функция $p(v_1, v_2)$ задается равенством (7.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что функции $f_{v,r_k,x_k}(z)$ принадлежат пространствам $H_{r_k}^+ = H^+$, и для любых $v_1, v_2 \in L^X$ имеем на основании (7.15):

$$\langle f_{v_1,r_k,x_k}, f_{v_2,r_k,x_k} \rangle_{H^+} = \exp(-r_k^2 p(v_1(x_k), v_2(x_k))). \quad (7.30)$$

В частности, $\|f_v\|_{H^+}^2 = \exp(-r^2 p(v, v)) < \infty$.

Далее, из предложения 7.1 следует, что функции f_{v,r_k,x_k} удовлетворяют оценке

$$\|f_{v,r_k,x_k} - \mathbb{I}\| < c r_k.$$

Из этой оценки следует, что бесконечное тензорное произведение $F_v^+(\xi)$ сходится и принадлежит пространству H_ξ^+ . Формула (7.29) следует непосредственно из (7.30).

Отметим, что формула (7.29) может быть записана в виде

$$\langle F_{v_1}^+(\xi), F_{v_2}^+(\xi) \rangle_{H_\xi^+} = \exp(-\langle \tilde{r}^2, p(v_1, v_2) \rangle). \quad (7.31)$$

ТЕОРЕМА 7.2. Для каждого $v \in L^X$ функционал $F_v^+(\xi)$ на $l_+^1(X)$ со значениями в H_ξ^+ принадлежит пространству $\text{INT } H^+$, и для любых $v_1, v_2 \in L^X$ имеем:

$$\langle F_{v_1}^+, F_{v_2}^+ \rangle = c \exp\left(-\frac{1}{2} \int_X \log p(v_1(x), v_2(x)) dm(x)\right), \quad c = e^{\gamma/2} \quad (7.32)$$

(γ – постоянная Эйлера).

В самом деле, равенство (7.32) следует непосредственно из (7.31) и соотношения (2.9) для меры $\mathcal{L}$, согласно которому

$$\int_{l_+^1(X)} \exp\left(-\sum r_k^2 a(x_k)\right) d\mathcal{L}(\xi) = e^{\gamma/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_X \log a(x) dm(x)\right).$$

Сходимость интеграла в правой части равенства (7.32) следует из условия ограниченности функции $v \in L^X$.

Обозначим через M^+ определенное таким образом подмножество функционалов $F_v \in \text{INT } H^+$, $v \in L^X$. Нетрудно убедиться, что это подмножество тотально в $\text{INT } H^+$.

ТЕОРЕМА 7.3. *Множество M^+ инвариантно относительно операторов подгруппы P_0^X , а именно, имеем для любого $v = (a, b) \in L^X$: $U^+(g)F_v^+ = F_{gv}^+$, где $gv = (a + \zeta_0 + (z_0, b), b - z_0^*)$ при $g = (\zeta_0, z_0) \in N^X$ и $gv = (a, ub\bar{\varepsilon})$ при $g = (\varepsilon, u) \in D_0^X$.*

При $g = r_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^X$ имеем:

$$U^+(r_0)F_v^+ = \exp\left(\int_X \log r_0(x) dm(x)\right) F_{gv}^+, \quad \text{где } gv = (r_0^2 a, r_0 b).$$

Утверждения следуют непосредственно из формул для операторов представления и определения функционалов F_v^+ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Определим действие операторов $U^+(g)$ группы $U(n, 1)^X$ на множестве M^+ следующим равенством:

$$U^+(g)F_v^+ = \exp\left(\frac{1}{2} \int_X \varphi(g(x), v(x)) dm(x)\right) F_{gv}^+, \quad (7.33)$$

где

$$\varphi(g, v) = (c(gv, gv_0) - c(v, v_0)) - \frac{1}{2}(c(gv_0, gv_0) - c(v_0, v_0)). \quad (7.34)$$

Заметим, что это определение аналогично соответствующему определению функционалов F_z^+ для случая группы $SL(2, \mathbb{R})^X$ (см. формулы (6.24) и (6.25)). При этом функция $c(v_1, v_2)/2$ удовлетворяет тем же соотношениям, что и функция $c(z_1, z_2)$ в случае $SL(2, \mathbb{R})$. Поэтому основанные на этом определении утверждения и конструкции для случая $SL(2, \mathbb{R})$ переносятся и на случай $U(n, 1)$. Изложим их более кратко.

Прежде всего, ограничения операторов $U^+(g)$ на подгруппу P^X совпадают с операторами исходного представления группы P^X .

Далее, подобно случаю $SL(2, \mathbb{R})$, мы заменяем множество функционалов F_v^+ множеством $\tilde{M}^+$ функционалов вида

$$\Psi_g^+ = (2c)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \int_X c(v(x), v_0) dm(x)\right) F_z, \quad g \in U(n, 1)^X,$$

где $v = gv_0$, $c = e^{\gamma/2}$.

На этом множестве скалярное произведение и операторы представления задаются формулами:

$$\langle \Psi_{g_1}^+, \Psi_{g_2}^+ \rangle = \exp\left(\int_X \langle b^+(g_1(x)), b^+(g_2(x)) \rangle dm(x)\right), \quad (7.35)$$

где $b^+(g)$ – 1-коцикл $G \rightarrow \mathcal{H}^+$, заданный равенством (7.16);

$$U^+(g_1)\Psi_g^+ = \exp\left(-\int_X u(g_1(x), g(x)) dm(x)\right)\Psi_{g_1g}^+, \quad (7.36)$$

где

$$u(g_1, g) = \frac{i}{2} \operatorname{Im} c(g_1 v_0, v_0) + \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}(g_1)b(g), b(g_1) \rangle. \quad (7.37)$$

Отсюда, подобно случаю $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.4. *Операторы $U^+(g)$ сохраняют скалярные произведения $\langle \Psi_{g_1}^+, \Psi_{g_2}^+ \rangle$, и их продолжения на все пространство $\mathrm{INT} H^+$ образуют проективное унитарное представление группы $\mathrm{U}(n, 1)^X$.*

Продолжение второго представления U^- группы P^X до представления группы $\mathrm{U}(n, 1)^X$ получается заменой тотального множества $\tilde{M}^+ \subset \mathrm{INT} H^+$ тотальным множеством $\tilde{M}^- \subset \mathrm{INT} H^-$ функционалов $\Psi_g^- = \overline{\Psi_g^+}$. Очевидно, что скалярные произведения $\langle \Psi_{g_1}^+, \Psi_{g_2}^+ \rangle$ и $\langle \Psi_{g_1}^-, \Psi_{g_2}^- \rangle$ комплексно сопряжены. Действие операторов $U^-(g)$ группы $\mathrm{U}(n, 1)^X$ на $\mathrm{INT} M^-$ задается равенством

$$U^-(g)\Psi_g^- = \overline{U^+(g)\Psi_g^+}.$$

Подобно случаю U^+ , ограничения операторов $U^-(g)$ на подгруппу P^X совпадают с операторами исходного представления подгруппы P^X в пространстве $\mathrm{INT} H^+$, и для них также справедлива теорема 7.4.

7.7. Продолжение ортогонального представления U^0 группы токов P^X до ортогонального представления группы $\mathrm{U}(n, 1)^X$. Свяжем с каждой парой $v(x) = (a(x), b(x)) \in L^X$ и $(r, x) \in \mathbb{R}_+^* \times X$ вектор $f_{v,r,x}^0 \in H_r^0$,

$$f_{v,r,x}^0 = 2^{-1/2} (e^{ir^2 z(x)}, e^{-ir^2 \overline{z(x)}}),$$

и определим функционалы $F_v^0(\xi)$ на $l_+^1(X)$ следующим равенством:

$$F_v^0(\xi) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} f_{v,r_k,x_k}^0 \quad \text{при } \xi = \{r_k, x_k\}. \quad (7.38)$$

Подобно случаю $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, бесконечное тензорное произведение $\bigotimes_{k=1}^{\infty} f_{v,r_k,x_k}^0$ сходится и $F_v^0(\xi) \in H_\xi^0$ при любых $v \in L^X$ и $\xi \in l_+^1(X)$. Определенные так функционалы F_v^0 принадлежат пространству $\mathrm{INT} H^0$ и образуют в нем тотальное подмножество M^0 . При этом

$$\langle F_{v_1}^0, F_{v_2}^0 \rangle = c \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_X \log(p(v_1(x), v_2(x))) dm(x)\right), \quad c = \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (7.39)$$

Зададим операторы $U^0(g)$, $g \in \mathrm{U}(n, 1)^X$, на $\tilde{M}^0$ равенством:

$$U^0(g)F_v^0 = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_X \varphi(g(x), v(x)) dm(x)\right)F_{gv}^0, \quad (7.40)$$

где $\varphi(g, v)$ задается равенством (7.34).

Подобно операторам $U^\pm$, на элементах подгруппы P^X эти операторы совпадают с операторами исходного представления U^0 группы P^X .

Введем, далее, по аналогии со случаем $U^\pm$, тотальное множество $\tilde{M}^0 \subset \text{INT } H^0$ функционалов вида

$$\Psi_g^0 = (2c)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} \text{Re} \int_X c(v(x), v_0) dm(x)\right) F_v^0, \quad g \in U(n, 1)^X, \quad \text{где } v = gv_0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. На множестве $\tilde{M}^0$ скалярное произведение и операторы представления задаются формулами:

$$\langle \Psi_{g_1}^0, \Psi_{g_2}^0 \rangle = \exp\left(\int_X \langle b^0(g_1(x)), b^0(g_2(x)) \rangle dm(x)\right), \quad (7.41)$$

где $b^0(g)$ – 1-коцикл $G \rightarrow \mathcal{H}^0$, заданный равенством

$$b^0(g) = 2^{-1/2} (b(g), \overline{b(g)}); \quad (7.42)$$

$$U^0(g_1) \Psi_g^0 = \exp\left(-\int_X \tilde{u}(g_1(x), g(x)) dm(x)\right) \Psi_{g_1 g}^0, \quad (7.43)$$

где

$$\tilde{u}(g_1, g) = \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}^0(g_1) b^0(g), b^0(g_1) \rangle. \quad (7.44)$$

Доказательство то же, что и для случая $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Отсюда по аналогии с теоремами 6.2 и 6.3 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7.5. Операторы $U^0(g)$ сохраняют скалярные произведения $\langle \Psi_{g_1}^0, \Psi_{g_2}^0 \rangle$ и продолжаются до ортогональных (непроективных) операторов на всем пространстве $\text{INT } H^0$.

7.8. Связь между интегральной и фоковской моделями представления группы $U(n, 1)^X$. Эта связь аналогична установленной ранее связи для случая группы $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Обозначим через $V^\pm$ фоковские проективные унитарные представления группы $U(n, 1)^X$, отвечающие парам $(\tilde{T}^\pm, b^\pm)$, где $\tilde{T}^\pm$ – особые унитарные представления группы $U(n, 1)$ и $b^\pm: U(n, 1) \rightarrow \mathcal{H}^\pm$ – 1-коциклы, определенные равенством (7.16). Аналогично, обозначим через V^0 фоковское ортогональное представление, отвечающее паре $(\tilde{T}^0, b^0)$.

ТЕОРЕМА 7.6. Продолжения на $U(n, 1)^X$ интегральных моделей $\text{INT } T^\pm$ унитарных представлений группы P^X проективно эквивалентны фоковским проективным унитарным представлениям $V^\pm$ группы $U(n, 1)^X$.

Продолжение на $U(n, 1)^X$ интегральной модели $\text{INT } T^0$ ортогонального представления группы P^X эквивалентно фоковскому ортогональному представлению V^0 группы $U(n, 1)^X$. Сплетающий оператор этих представлений порожден отображением циклических векторов $\Psi_e^0 \mapsto \text{EXP } 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению, фоковское представление V^+ группы $U(n, 1)$ реализуется в комплексном гильбертовом пространстве $\text{EXP } \mathcal{H}^X$, где

$$\text{EXP } \mathcal{H}^X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k \mathcal{H}^X$$

и

$$\mathcal{H}^X = \int_X^{\oplus} \mathcal{H}_x^+ dm(x), \quad \mathcal{H}_x^+ = \mathcal{H}^+,$$

$\mathcal{H}^+$ – пространство представления $\tilde{T}^+$ группы P .

Введем в $\text{EXP } \mathcal{H}^X$ тотальное подмножество $\mathcal{M}^+ \subset \text{EXP } \mathcal{H}^X$ векторов вида

$$\Phi_g^+ = \text{EXP } b^X(g), \quad g \in \text{U}(n, 1)^X,$$

где $b^X: \text{U}(n, 1)^X \rightarrow \mathcal{H}^X$ – 1-коцикл, порожденный 1-коциклом $b^+: \text{U}(n, 1) \rightarrow \mathcal{H}$. На нем скалярное произведение и операторы представления группы $\text{U}(n, 1)^X$ задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{g_1}^+, \Phi_{g_2}^+ \rangle &= \exp \left(\int_X \langle b^+(g_1(x)), b^+(g_2(x)) \rangle dm(x) \right), \\ V^+(g_1) \Phi_g^+ &= \exp \left(- \int_X u'(g_1(x), g(x)) dm(x) \right) \Psi_{g_1 g}^+, \end{aligned}$$

где

$$u'(g_1, g) = \frac{i}{2} \text{Im } c(g_1 v_0, v_0) + \frac{1}{2} \|b(g_1)\|^2 + \langle \tilde{T}(g_1) b(g), b(g_1) \rangle.$$

Рассмотрим естественную биекцию $\tilde{M}^+ \rightarrow \mathcal{M}^+$ тотальных подмножеств в пространствах $\text{INT } H^+$ и $\text{EXP } \mathcal{H}^X$. Из явных формул для скалярных произведений и операторов представлений $U^+(g)$ и $V^+(g)$ на $\tilde{M}^+$ и $\mathcal{M}^+$ следует, что при этой биекции скалярные произведения сохраняются, а соответствующие операторы различаются только множителем:

$$U^+(g) = \exp \left(-\frac{i}{2} \text{Im} \int_X c(g(x) v_0, v_0) dm(x) \right) V^+(g).$$

Следовательно, представления U^+ и V^+ проективно эквивалентны. То же справедливо и для представлений U^- и V^- .

Аналогично, сравнивая формулы для скалярных произведений и операторов на тотальных подмножествах $\tilde{M}^0 \subset \text{INT } H^0$ и $\mathcal{M}^0 \subset \text{EXP } \mathcal{H}^X$, убеждаемся, что эти формулы сохраняются при естественной биекции $\tilde{M}^0 \rightarrow \mathcal{M}^0$. Отсюда следует утверждение теоремы для случая представлений U^0 и V^0 .

7.9. Добавление: унитарное представление группы $\tilde{G}^X$, $G = \text{U}(n, 1)$, где $\tilde{G}$ – универсальная накрывающая группы $G = \text{U}(n, 1)$. По определению, $\tilde{G}$ является накрытием над G , где слой над $g \in G$ есть множество классов гомотопически эквивалентных путей на G из единичного элемента e в g . Элементы из $\tilde{G}$ условимся обозначать через $\tilde{g}$, а их образы в G – через g .

Как и в случае $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, интегральные модели представлений $U^\pm$ группы токов $G^X = \text{U}(n, 1)^X$ индуцирует представления $\tilde{U}^\pm$ группы токов $\tilde{G}^X$ в тех же гильбертовых пространствах $\tilde{H}^\pm$. Эти представления группы $\tilde{G}^X$ проективно эквивалентны ее не проективным унитарным представлениям $V^\pm$ в тех же пространствах $\tilde{H}^\pm$, которые здесь будут явно описаны. Для определенности ограничимся описанием представления V^+ .

Конструкция представления V^+ аналогична случаю $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Достаточно определить операторы представления на элементах тотального подмножества функционалов F_v^+ . Для этого сначала положим для любых $v = (a, b) \in L$ и $g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3} \in U(n, 1)$:

$$\varphi(g, v) = -\log(g_{11} + g_{12}b + g_{13}a),$$

где, как обычно, через $\log$ обозначена ветвь логарифма на плоскости с разрезом вдоль вещественной отрицательной полуоси такая, что $\log 1 = 0$. Эта функция φ всюду конечна, и при любом фиксированном $v \in L$ она является однозначной аналитической функцией от $g \in G$ в достаточно малой окрестности единичного элемента. Поэтому для любого $g \in G$ и любого пути $\tilde{g}$ на G из e в g определено ее аналитическое продолжение по этому пути из e в g . Обозначим это аналитическое продолжение через $\psi(\tilde{g}, v)$. Определенная так функция $\psi(\tilde{g}, v)$ зависит только от гомотопического класса пути $\tilde{g}$, а потому является функцией на $\tilde{G} \times L$.

Из определения следует:

$$\psi(\tilde{g}, v) = -\log(g_{11} + g_{12}b + g_{13}a) \quad (7.45)$$

при условии, что $g \in G$ и путь $\tilde{g}$ из e в g принадлежат достаточно малой окрестности единичного элемента e .

Подобно случаю $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. *При любых $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G}$ и $v \in L^+$ имеет место равенство*

$$\psi(\tilde{g}_1\tilde{g}_2, v) = \psi(\tilde{g}_1, g_2v) + \psi(\tilde{g}_2, v). \quad (7.46)$$

Поставим теперь в соответствие каждой паре $\tilde{g} \in \tilde{G}^X$ и $v \in L^X$ следующую функцию на X :

$$\Psi_{\tilde{g},v}(x) = \psi(\tilde{g}(x), v(x)). \quad (7.47)$$

Из предложения 7.8 следует, что функции $\Psi_{\tilde{g},v}$ связаны соотношением:

$$\Psi_{\tilde{g}_1\tilde{g}_2,v} = \Psi_{\tilde{g}_1,g_2v} + \Psi_{\tilde{g}_2,v}. \quad (7.48)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Определим действие операторов $V(\tilde{g})$, $\tilde{g} \in \tilde{G}^X$, на функции F_v тотального множества M следующей формулой:

$$V(\tilde{g})F_z = \exp\left(\int_X \Psi_{\tilde{g},v}(x) dm(x)\right)F_{gv}. \quad (7.49)$$

Тогда, как и в случае $L(2, \mathbb{R})$, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7.7. *Операторы $V(\tilde{g})$ унитарны на M , т. е.*

$$\langle V(\tilde{g})F_{v_1}, V(\tilde{g})F_{v_2} \rangle = \langle F_{v_1}, F_{v_2} \rangle \quad \text{для любых } v_1, v_2 \in L^X \text{ и } \tilde{g} \in \tilde{G}^X, \quad (7.50)$$

и удовлетворяют соотношению

$$V(\tilde{g}_1\tilde{g}_2)F_v = V(\tilde{g}_1)V(\tilde{g}_2)F_v \quad \text{для любых } \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G}^X \text{ и } v \in L^X. \quad (7.51)$$

Тем самым, они порождают линейное унитарное представление группы $\tilde{G}$ в пространстве $\tilde{H}$.

Очевидно, что построенное представление V группы $\tilde{G}^X$ проективно эквивалентно представлению $\tilde{U}$ этой группы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другая модель унитарного представления группы $\tilde{G}^X$ была построена в [32].

8. Интегральные модели представлений группы P^X , где P – максимальная параболическая подгруппа группы $\mathrm{Sp}(n, 1)$

Здесь для случая группы $\mathrm{Sp}(n, 1)$ приведено описание канонических представлений подгруппы $P_0 \subset P$; с каждым из них, в силу общей конструкции, ассоциировано неприводимое унитарное представление группы P^X . Отметим, что, в отличие от $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, эти представления не продолжаемы до представлений группы $\mathrm{Sp}(n, 1)^X$.

8.1. Исходные определения и обозначения. Реализуем $\mathrm{Sp}(n, 1)$ как группу линейных преобразований в $\mathbb{H}^{n+1}$, где $\mathbb{H}$ – тело кватернионов, сохраняющих форму $x_1\bar{y}_{n+1} + x_{n+1}\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n$ над $\mathbb{H}$, и будем представлять ее элементы в форме блочных матриц

$$g = \|g_{ij}\|_{i,j=1,2,3},$$

где на диагонали стоят квадратные матрицы соответственно порядка 1, $n-1$ и 1.

В этой реализации

$$P = D \ltimes N,$$

где $N \cong \mathbb{R}^{n-1}$ – подгруппа клеточных матриц вида

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -w^* & e_{n-1} & 0 \\ t - \frac{ww^*}{2} & w & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{H}_0, \quad w \in \mathbb{H}^{n-1}$$

($\mathbb{H}_0$ – пространство мнимых кватернионов), а $D \cong \mathbb{H}^* \times \mathrm{Sp}(n-1)$ – подгруппа клеточно-диагональных матриц вида $d = \mathrm{diag}(\bar{s}^{-1}, u, s)$, $s \in \mathbb{H}^*$, $u \in \mathrm{Sp}(n-1)$.

Представим D в виде прямого произведения $D = \mathbb{R}_+^* \times D_0$, где D_0 – подгруппа матриц $d = \mathrm{diag}(\varepsilon, u, \varepsilon)$, $|\varepsilon| = 1$, и положим

$$P_0 = D_0 \ltimes N.$$

Таким образом,

$$P = \mathbb{R}_+^* \rtimes P_0 = (\mathbb{R}_+^* \times D_0) \ltimes N.$$

Через $\mathrm{Sc} x$ и $\mathrm{Vec} x$ будем обозначать соответственно вещественную и мнимую часть кватерниона x , т.е. $\mathrm{Sc} x = (x + \bar{x})/2$, $\mathrm{Vec} x = (x - \bar{x})/2$.

Отождествим элементы из D_0 и N соответственно с парами (ε, u) , где $\varepsilon \in \mathrm{Sp}(1)$, $u \in \mathrm{Sp}(n-1)$, и парами (t, w) , где $t \in \mathbb{H}_0$, $w \in \mathbb{H}^{n-1}$ (вектор-строка). Иногда будем также вместо $(t, w) \in N$ писать (ζ, w) , где $\zeta = t - ww^*/2$.

В этих обозначениях групповые соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}(\zeta_1, w_1)(\zeta_2, w_2) &= (\zeta_1 + \zeta_2 - w_1 w_2^*, w_1 + w_2), \\ (\varepsilon, u)^{-1}(\zeta, w)(\varepsilon, u) &= (\bar{\varepsilon}\zeta\varepsilon, \bar{\varepsilon}zu), \\ r(\zeta, w)r^{-1} &= (r^2\zeta, rw) \quad \text{при } r \in \mathbb{R}_+^*.\end{aligned}$$

8.2. Описание канонических представлений группы P_0 . Для описания канонических представлений группы P_0 сначала введем, подобно случаю группы $U(n, 1)$, приводимое унитарное представление этой группы и покажем затем, что неприводимые составляющие этого представления являются каноническими.

Обозначим через S^2 пространство мнимых кватернионов s с нормой 1, изоморфное двумерной сфере ($s \in \mathbb{H}_0$, $s^2 = -1$). На S^2 естественно действует группа кватернионов ε с нормой 1: $s \mapsto \bar{\varepsilon}s\varepsilon$.

Введем унитарное представление T группы P_0 в гильбертовом пространстве функций $f(s, w)$ на $S^2 \times \mathbb{H}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{S^2} \int_{\mathbb{H}^{n-1}} |f(s, w)|^2 d\mu(w) d\mu(s), \quad (8.1)$$

где $d\mu(w)$ – лебегова мера на $\mathbb{H}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{4(n-1)}$ и $d\mu(s)$ – инвариантная мера на S^2 .

Операторы представления имеют вид:

$$(\tilde{T}(g)f)(s, w) = \exp(-i \operatorname{Sc}[s(\zeta_0 - ww_0^*)]) f(s, w + w_0) \quad \text{при } g = (\zeta_0, w_0) \in N; \quad (8.2)$$

$$(\tilde{T}(g)f)(s, w) = f(\bar{\varepsilon}s\varepsilon, \bar{\varepsilon}wu) \quad \text{при } g = (\varepsilon, u) \in D_0. \quad (8.3)$$

Групповое свойство и унитарность операторов сразу же следуют из этих формул. Очевидно, что операторы представлений $\tilde{T}_r(g) = \tilde{T}(rg r^{-1})$, сопряженных с T относительно группы автоморфизмов $\mathbb{R}_+^*$, задаются формулами:

$$\begin{aligned}(\tilde{T}_r(g)f)(s, w) &= \exp(-i \operatorname{Sc}[s(r^2\zeta_0 - rww_0^*)]) f(s, w + rw_0) \quad \text{при } g = (\zeta_0, w_0) \in N; \\ (\tilde{T}_r(g)f)(s, w) &= f(\bar{\varepsilon}s\varepsilon, \bar{\varepsilon}wu) \quad \text{при } g = (\varepsilon, u) \in D_0.\end{aligned}$$

Ассоциированное с $\tilde{T}$ представление группы P реализуется в прямом интеграле по мере $d^*r = r^{-1}dr$ на $\mathbb{R}_+^*$ гильбертовых пространств $H_r = H$ с заданными на них представлениями $\tilde{T}_r$ подгруппы P_0 ,

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty H_r d^*r,$$

т.е. в расслоении над $\mathbb{R}_+^*$ со слоем H_r . Операторы подгруппы P_0 действуют на этом расслоении послойно, а операторы $\tilde{T}(r_0)$, $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$, – по формуле $(\tilde{T}(r_0)f)(r) = f(r_0r)$.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пространство H является прямой суммой инвариантных попарно не эквивалентных неприводимых подпространств H_m :*

$$H = \bigoplus_{m=0}^\infty H_m.$$

Для каждого $m \geq 0$ представление группы P_0 в пространстве H_m канонично и обладает единственным, с точностью до множителя, почти инвариантным вектором:

$$f_m(\omega, w) = l_m^{2n-3}(ww^*)e^{-\frac{1}{2}ww^*},$$

где $l_m^{2n-3}(x)$ – полином Лагерра.

Для доказательства теоремы представим H как прямой интеграл,

$$H = \int_{S^2} H(\omega) d\omega,$$

гильбертовых пространств функций $f(w)$ на $\mathbb{H}^{n-1}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{H}^{n-1}} |f(w)|^2 d\mu(w).$$

Очевидно, что эти пространства $H(\omega)$ инвариантны относительно подгруппы $P_1 = D_1 \ltimes N \subset P_0$, где $D_1 \subset D_0$ – подгруппа элементов $(1, u)$, и что представления подгруппы P_1 преобразуются одно в другое действием подгруппы автоморфизмов $g \mapsto (\varepsilon, e_{n-1})^{-1}g(\varepsilon, e_{n-1})$, $(\varepsilon, e_{n-1}) \in D_0$.

Утверждение теоремы 8.1 непосредственно следует из аналогичного утверждения для пространств $H(\omega)$:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. *Каждое пространство $H(\omega)$ является прямой суммой инвариантных попарно не эквивалентных неприводимых относительно подгруппы P_1 подпространств $H_m(\omega)$:*

$$H(\omega) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m(\omega).$$

Для каждого $m \geq 0$ представление группы P_1 в пространстве $H_m(\omega)$ канонично и обладает единственным, с точностью до множителя, почти инвариантным вектором:

$$f_m(w) = l_m^{2n-3}(ww^*)e^{-\frac{1}{2}ww^*}. \quad (8.4)$$

8.3. Доказательство предложения 8.1. Достаточно доказать утверждение для одного фиксированного $\omega \in S^2$, например, для $\omega = e_1$, где e_1 – базисный вектор в $\mathbb{H}$. Положим для краткости $H(e_1) = \mathcal{H}$.

Представим кватернионы $\sum_{k=0}^3 a_k e_k \in \mathbb{H}$ как элементы алгебры над $\mathbb{C}$: $a = (a_0 + ia_1) + (a_2 + ia_3)j$, где $j^2 = -1$ и $ij = -ji$, и будем интерпретировать функции $f(w)$ на $\mathbb{H}^{n-1}$ как функции $f(z) = f(z^1, z^2)$ на $\mathbb{C}^{2n-2} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n-1}$, где $w \in \mathbb{H}^{n-1}$ и $z = (z^1, z^2)$ связаны соотношением $w = z^1 + z^2 j$. Таким образом, в новой реализации представление группы P_1 действует в пространстве функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^{2n-2}$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{2n-2}} |f(z)|^2 d\mu(z).$$

ЛЕММА. В новой реализации операторы представления группы P_1 имеют следующий вид:

$$(T(g)f)(t_0, w_0) = \exp(i(t_1 - \operatorname{Im}(zz_0^*)))f(z + z_0) \quad \text{при } g = (t_0, w_0) \in N, \quad (8.5)$$

где $t_1 \in \mathbb{R}$ и $z_0 = (z_0^1, z_0^2) \in \mathbb{C}^{2n-2}$ определяются из соотношений $t_0 = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$ и $w_0 = z_0^1 + z_0^2 j$;

$$(T(g)f)(z) = f(zv) \quad \text{при } g = (1, u) \in D_1, \quad (8.6)$$

где

$$v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u'_2 & u'_1 \end{pmatrix} \quad \text{при } u = u_1 + u_2 j \in \operatorname{Sp}(n-1) \quad (8.7)$$

(штрих обозначает транспонирование).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $g = (t_0, w_0) \in N$ оператор $T(g)$ в исходной реализации имеет вид:

$$(\tilde{T}(g)f)(w) = \exp(-i \operatorname{Sc}[e_1(t_0 - ww_0^*)])f(w + w_0).$$

Очевидно, что в новой реализации $\operatorname{Sc}(e_1 t_0) = -t_1$. Имеем, далее: $ww_0^* = z^1(z_0^1)^* + z^2(z_0^2)^* + z^1(z_0^2 j)^* + (z_0^2 j)(z^1)^*$. Легко убедиться, что $\operatorname{Sc}[e_1(z^1(z_0^2 j)^* + (z_0^2 j)(z^1)^*)] = 0$. Поэтому $\operatorname{Sc}[e_1(ww_0^*)] = \operatorname{Re}(iz^1(z_0^1)^* + z^2(z_0^2)^*) = -\operatorname{Im}(zz_0^*)$. Отсюда следует (8.5).

Далее, при $g = (1, u) \in D_1$ оператор $T(g)$ в исходной реализации имеет вид:

$$(\tilde{T}(g)f)(w) = f(wu).$$

Имеем: $wu = (z^1 + z^2 j)(u_1 + u_2 j) = z^1 u_1 + z^2(ju_2 j) + (z^1 u_2 - z^2(ju_1 j))j$. Таким образом, поскольку $ju_i j = -u'_i$, вектору $wu \in \mathbb{H}^{n-1}$ соответствует вектор $(z^1, z^2)v$, где v – клеточная матрица вида (8.7). Лемма доказана.

Обозначим через V_n группу всех преобразований v вида (8.7) в пространстве $\mathbb{C}^{2n-2}$. Очевидно, что $V_n \equiv \operatorname{Sp}(n-1)$.

Убедимся, что $V_n \subset U(n-1)$.

В самом деле, условие $u \in \operatorname{Sp}(n-1)$ эквивалентно условию

$$(u_1 + u_2 j)(u_1 + u_2 j)^* = e_{n-1},$$

что, в свою очередь, эквивалентно соотношениям $u_1 u_1^* + u_2 u_2^* = e_{n-1}$ и $u_1 \bar{u}_2 = u_2 \bar{u}_1$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Из этих соотношений непосредственно следует принадлежность матриц вида (8.7) группе $U(2n-2)$.

Полученные формулы для операторов $T(g)$ представления группы $P_1 \subset \operatorname{Sp}(n, 1)$ совпадают с формулами (8.4) и (8.5) для операторов T^+ представления подгруппы P_0 для случая $U(n, 1)$, в которых лишь n должно быть заменено на $2n-1$. Поэтому разложение представления на неприводимые канонические представления может быть проведено далее по той же схеме.

Сначала перейдем к новой реализации этого представления, положив

$$f(z) = \varphi(z) \exp\left(-\frac{zz^*}{2}\right).$$

В новой реализации представление действует в гильбертовом пространстве функций $f(z)$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^{2n-2}} |f(z)|^2 \exp(-zz^*) d\mu(z).$$

При этом формулы (8.6) для операторов $T(g)$, $g \in D_1$, сохраняются, а формулы для операторов $T(g)$, $g = (t_0, z_0) \in N$, принимают вид:

$$(T(g)f)(z) = \exp\left(i \frac{t_1 - z_0 z_0^*}{2} - z z_0^*\right) f(z + z_0). \quad (8.8)$$

В этой реализации мультипликатор в формуле для оператора $T(g)$, $g \in N$, является целой аналитической функцией от z . Отсюда, как и в случае $U(n, 1)$, следует, что пространство представления $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму неприводимых попарно не эквивалентных инвариантных подпространств:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H_m,$$

где H_m – подпространство, циклически порожденное однородными полиномами степени m от $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{2n-2}$.

Отметим, что в случае $U(n, 1)$ неприводимость подпространств H_m следовала из неприводимости пространства однородных полиномов от $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{2n-2}$ относительно действия всей унитарной группы $U(2n-2)$. Однако это свойство сохраняется и при замене группы $U(2n-2)$ ее подгруппой $V_n \equiv \text{Sp}(n-1)$.

Далее, так же, как и в случае $U(n, 1)$, доказывается, что в каждом пространстве H_m существует и притом единственный почти инвариантный вектор, равный $l_m^{2n-3}(zz^*)$.

Поскольку $zz^* = ww^*$, то в исходной реализации представления и в исходных координатах w этот вектор задается формулой (8.4).

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Представления группы $SL(2, \mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ – кольцо функций”, *УМН*, **28**:5 (1973), 83–128; англ. пер.: A. M. Vershik, I. M. Gel’fand, M. I. Graev, “Representations of the group $SL(2, \mathbf{R})$, where $\mathbf{R}$ is a ring of functions”, *Russian Math. Surveys*, **28**:5 (1973), 87–132.
- [2] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Неприводимые представления группы G^X и когомологии”, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:2 (1974), 67–69; англ. пер.: A. M. Vershik, I. M. Gel’fand, M. I. Graev, “Irreducible representations of the group G^X and cohomologies”, *Funct. Anal. Appl.*, **8**:2 (1974), 151–153.
- [3] Н. Araki, “Factorizable representation of current algebra. Non commutative extension of the Lévy–Khinchin formula and cohomology of a solvable group with values in a Hilbert space”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **5**:3 (1970), 361–422.
- [4] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Textes Math., **2**, CEDIC, Paris, 1980; пер. с франц.: А. Гишарде, *Когомологии топологических групп и алгебр Ли*, Мир, М., 1984.
- [5] Д. А. Каждан, “О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:1 (1967), 71–74; англ. пер.: D. A. Kazhdan, “Connection of the dual space of a group with the structure of its close subgroups”, *Funct. Anal. Appl.*, **1**:1 (1967), 63–65.

- [6] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, New Math. Monogr., **11**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [7] А. М. Вершик, С. И. Карпушев, “Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции”, *Матем. сб.*, **119**:4 (1982), 521–533; англ. пер.: A. M. Vershik, S. I. Karpushev, “Cohomology of groups in unitary representations, the neighborhood of the identity, and conditionally positive definite functions”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:2 (1984), 513–526.
- [8] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Представления группы диффеоморфизмов”, *УМН*, **30**:6 (1975), 3–50; англ. пер.: A. M. Vershik, I. M. Gel'fand, M. I. Graev, “Representations of the group of diffeomorphisms and conditionally positive definite functions”, *Russian Math. Surveys*, **30**:6 (1975), 1–50.
- [9] A. M. Vershik, I. M. Gel'fand, M. I. Graev, “Representations of the group of smooth mappings of a manifold X into a compact Lie group”, *Compositio Math.*, **35**:3 (1977), 299–334.
- [10] A. M. Veršik, I. M. Gel'fand, M. I. Graev, “Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group”, *Compositio Math.*, **42**:2 (1980), 217–243.
- [11] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой”, *Функц. анализ и его прил.*, **17**:2 (1983), 70–72; англ. пер.: A. M. Vershik, I. M. Gel'fand, M. I. Graev, “A commutative model of representation of the group of flows $SL(2, \mathbb{R})^X$ that is connected with a unipotent subgroup”, *Funct. Anal. Appl.*, **17**:2 (1983), 137–139.
- [12] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, “Models of representations of current groups”, *Representations of Lie groups and Lie algebras* (Budapest, 1971), Akad. Kiadó, Budapest, 1985, 121–179.
- [13] А. М. Вершик, М. И. Граев, “Коммутативная модель представления группы $O(n, 1)^X$ и обобщенная лебегова мера в пространстве распределений”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:2 (2005), 1–12; англ. пер.: M. I. Graev, A. M. Vershik, “A commutative model of a representation of the group $O(n, 1)^X$ and a generalized Lebesgue measure in the space of distributions”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:2 (2005), 81–90.
- [14] M. I. Graev, A. M. Vershik, “The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure”, *Indag. Math. (N. S.)*, **16**:3–4 (2005), 499–529.
- [15] А. М. Вершик, М. И. Граев, “Интегральные модели представлений групп токов”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:1 (2008), 22–32; англ. пер.: A. M. Vershik, M. I. Graev, “Integral models of representations of current groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:1 (2008), 19–27.
- [16] А. М. Вершик, М. И. Граев, “Интегральные модели унитарных представлений групп токов со значениями в полупрямых произведениях”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:4 (2008), 37–49; англ. пер.: A. M. Vershik, M. I. Graev, “Integral models of unitary representations of current groups with values in semidirect products”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:4 (2008), 279–289.
- [17] P. Delorme, “Irreductibilité de certaines représentations de G^X ”, *J. Funct. Anal.*, **30**:1 (1978), 36–47.
- [18] R. S. Ismagilov, “Representations of infinite-dimensional groups”, Transl. Math. Monogr., **152**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [19] А. М. Вершик, “Существует ли бесконечномерная мера Лебега?”, *Анализ и особенности. Часть 2*, Тр. МИАН, **259**, Наука, М., 2007, 256–281; англ. пер.: A. M. Vershik, “Does there exist a Lebesgue measure in the infinite-dimensional space?”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **259**:2 (2007), 248–272.
- [20] A. M. Vershik, “The behavior of the Laplace transform of the invariant measure on the hypersphere of high dimension”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **3**:2 (2008), 317–329.

- [21] A. M. Vershik, “Invariant measures for the continual Cartan subgroup”, *J. Funct. Anal.*, **255**:9 (2008), 2661–2682.
- [22] N. Tsilevich, A. Vershik, M. Yor, “An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process”, *J. Funct. Anal.*, **185**:1 (2001), 274–296.
- [23] A. Vershik, B. Tsirelson, “Examples of nonlinear continuous tensor product of measure spaces and non-Fock factorisations”, *Rev. Math. Phys.*, **10**:1 (1998), 81–145.
- [24] А. М. Вершик, М. И. Граев, “Структура дополнительных серий и особых представлений групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ ”, *УМН*, **61**:5 (2006), 3–88; англ. пер.: A. M. Vershik, M. I. Graev, “Structure of the complementary series and special representations of the groups $O(n, 1)$ and $U(n, 1)$ ”, *Russian Math. Surveys*, **61**:5 (2006), 799–884.
- [25] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, “Особые представления группы $SU(n, 1)$ и проективные унитарные представления группы токов $SU(n, 1)^X$ ”, *Докл. АН СССР*, **332**:3 (1993), 280–282; англ. пер.: I. M. Gel’fand, M. I. Graev, “Special representations of the group $SU(n, 1)$ and projective unitary representations of the current group $SU(n, 1)^X$ ”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **48**:2 (1994), 291–295.
- [26] В. Ф. Молчанов, “Канонические представления и надгруппы для гиперболюидов”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:4 (2005), 48–61; англ. пер.: V. F. Molchanov, “Canonical representations and overgroups for hyperboloids”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:4 (2005), 284–295.
- [27] А. М. Переломов, *Обобщенные когерентные состояния и их применения*, Наука, М., 1987; пер. с англ.: A. Perelomov, *Generalized coherent states and their applications*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [28] A. Guichardet, “Symmetric Hilbert space and related topics”, *Lecture Notes in Math.*, **261**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.
- [29] P. Delorme, “1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations”, *Bull. Soc. Math. France*, **105**:3 (1977), 281–336.
- [30] А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, “Фоковские факторизации и разложения пространства L^2 над общим процессом Леви”, *УМН*, **58**:3 (2003), 3–50; англ. пер.: A. M. Vershik, N. V. Tsilevich, “Fock factorizations, and decompositions of the L^2 spaces over general Lévy processes”, *Russian Math. Surveys*, **58**:3 (2003), 427–472.
- [31] K. R. Parthasarathy, K. Schmidt, *Positive definite kernels, continuous tensor products, and central limit theorems of probability theory*, Lecture Notes in Math., **272**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.
- [32] Ф. А. Березин, “Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара”, *Тр. ММО*, **36** (1978), 275–293; англ. пер.: F. A. Berezin, “Representations of a continuous direct product of universal coverings of the group of motions of the complex ball”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **36** (1979), 281–298.

А. М. Вершик (A. M. Vershik)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

24.12.2008

М. И. Граев (M. I. Graev)

Научно-исследовательский институт

системных исследований РАН

E-mail: graev_36@mtu-net.ru