Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бабич, О канонической параметризации фазовых пространств уравнений изомонодромных деформаций фуксовых систем размерности 2×2 . Вывод уравнения Пенлеве VI, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 51–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:29:55

УДК 517.912

**О канонической параметризации фазовых пространств
уравнений изомонодромных деформаций
фуксовых систем размерности 2×2 .
Вывод уравнения Пенлеве VI**

М. В. Бабич

Рассматривается факторизация, по линейным заменам искомой вектор-функции, многообразия матричных 2×2 линейных дифференциальных уравнений первого порядка с простыми полюсами в правой части. Показано, как при параметризации таких фактормногообразий естественным образом возникают уравнения Гарнье–Пенлеве VI, а также связанные с ними алгебро-геометрические конструкции – поверхность Окамото и алгебраический атлас координат Дарбу на ней.

Библиография: 42 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	52
1. Системы с фуксовыми особыми точками	60
1.1. Локальная теория	60
1.2. Глобальная теория, изомонодромные деформации	62
2. Подмногообразия изомонодромных слоев. Система Шлезингера	67
3. Гамильтонов формализм и пуассонова динамика на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	69
3.1. Гамильтонов формализм	69
3.2. Скобка Ли–Пуассона	71
3.3. Пуассонова структура системы Шлезингера	74
4. Построение многообразия $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$ – фазового пространства гамильтоновой системы Гарнье–Пенлеве VI	77
4.1. Орбиты коприсоединенного представления $SL(2, \mathbb{C})$	77
4.2. Гамильтонова (симплектическая) редукция	80
5. Построение рациональных координат Дарбу на $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$	88
5.1. Аналитическая геометрия в терминах $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$	90
5.2. Отображение $Q_{\sqrt{2a_{i_0 i_0}}}$	92
5.3. Базис, сопутствующий $A^{(i)}, A^{(j)}, A^{(k)}$; условия его существования	93

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00451).

© М. В. Бабич, 2009

5.4. Симплектичность пространства $M_{a_{\bar{i}\bar{j}}}$, построение сопутствующего базиса по данному набору $A^{(\bar{k})}$	96
6. Система Гарнье, уравнение Пенлеве VI	100
6.1. Рациональная (традиционная, классическая) форма P^{VI}	103
6.2. Эллиптическая форма P^{VI}	108
7. Поверхность начальных данных P^{VI} (поверхность Окамото) и определяющее многообразие	117
7.1. Симплектическая склейка квадрик – связь между координатами, построенными с помощью разных сопутствующих базисов ..	117
7.2. Поверхность Окамото. Определяющее многообразие	122
8. Заключение	131
Список литературы	131

Введение

Решения уравнений класса Пенлеве претендуют на роль нелинейных специальных функций (см. [1]–[4]).

Особое место в списке этих уравнений занимает уравнение Пенлеве VI (P^{VI}) – наиболее общее (наименее вырожденное) из всех, и в этом смысле – наиболее фундаментальное. Выводится оно, т. е. связывается с остальным миром математики вообще и дифференциальных уравнений в частности, двумя способами – во-первых, как уравнение, решения которого обладают свойством Пенлеве, и, во-вторых, как уравнение, которое управляет коэффициентами линейного уравнения при специальных, “изомонодромных” деформациях (этого линейного уравнения). Свойство Пенлеве – специфическую зависимость общего решения от начальных данных – мы более упоминать не будем. Статья посвящена только исследованию многообразия линейных уравнений.

Получение собственно уравнения P^{VI} – задача непростая как “технически”, так и “идеологически”. В статье решается эта и смежные с ней проблемы, в частности, строится “всё” фазовое пространство гамильтоновой системы Пенлеве VI – так называемая поверхность Окамото.

Изложение рассчитано на читателя с “формульным” (не абстрактно-алгебраическим) взглядом на математику. Предполагаемая подготовка – курс математики физического факультета университета (не обязательно Московского или Петербургского), т. е. уровень “потребителя специальных функций”.

Текст представляет собой попытку дать подробное и максимально наглядное (геометризованное) изложение *связи* между задачей изомонодромной деформации фуксовой системы 2×2 и уравнением P^{VI} .

Большое влияние на работу – на выбор точки зрения, материала, стиля изложения, оказали статьи [5]–[12].

Чтобы ввести в курс дела – пояснить, о чем идет речь, рассмотрим “игрушечный пример” – скалярный (коммутативный) случай:

$$\frac{d}{d\lambda} \Psi = \sum_{k=1}^n \frac{A^{(k)}}{\lambda - \lambda_k} \Psi, \quad (\star)$$

здесь

$$A^{(k)} \in \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad \Psi \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \lambda, \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Это множество уравнений естественно рассматривать как многообразие

$$M^\Lambda := \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})^n \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,$$

представляющее собой декартово произведение многообразия вычетов

$$A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})^n = M$$

и многообразия параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^n = \Lambda$. В основном тексте вместо $\mathfrak{gl}(1, \mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ будут рассматриваться $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, кроме того, вместо комплексной плоскости $\mathbb{C}$ будет сфера Римана $\mathbb{CP}^1$ и индекс k , нумерующий полюсы, будет меняться не от 1 до n , а от 0 до n ; будет строиться локальная по параметрам и глобальная по λ теория, параметры λ_k будут меняться каждый в своем, не пересекающемся с остальными, диске $\Lambda_k \subset \mathbb{CP}^1$.

Решение уравнения $(\star)$ можно рассматривать как многозначную функцию

$$\Psi = c(\lambda - \lambda_1)^{A^{(1)}} \dots (\lambda - \lambda_n)^{A^{(n)}},$$

имеющую точки ветвления при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \dots, n$. Константа $c = c(\lambda_{\bar{k}})$ произвольно зависит от параметров.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1. На протяжении всего текста черта над индексом будет означать набор таких величин со всевозможными (из контекста) значениями индекса. Например, сейчас

$$c(\lambda_{\bar{k}}) = c(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

далее будет

$$A^{\overline{(i)}} = A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$$

и т. п.

Введем основное понятие всей теории, понятие монодромии – *характеристики неоднозначности решения*. Пусть переменная λ обойдет какую-нибудь из точек λ_k и вернется к своему исходному значению. Функция Ψ получит не зависящий от λ множитель $M_k := e^{2\pi i A^{(k)}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, он и называется *множителем монодромии*, соответствующим тому контуру, по которому λ обошла λ_k .

“Набор данных монодромии” в скалярном случае – это множество чисел $e^{2\pi i A^{(1)}}, \dots, e^{2\pi i A^{(n)}}$. Он локально однозначно определяет вычеты $A^{(k)}$. Оговорка “локально” необходима, потому что только при непрерывных изменениях (деформациях) число M_k однозначно определяет $A^{(k)} = (2\pi i)^{-1} \log M_k$, так как нужно фиксировать ветвь логарифма. В матричном случае тоже возможны дискретные преобразования уравнения (вычетов $A^{(k)}$), не меняющие набора $M_{\bar{k}}$, – это так называемые *преобразования Шлезингера*.

Итак, набор данных монодромии является важнейшей характеристикой линейного уравнения. Рассмотрим множество всех уравнений, обладающих одинаковыми наборами данных монодромии. Назовем *изомонодромным слоем*

связную компоненту этого множества. Все пространство уравнений расслоится на такие изомонодромные слои; требуется описать это *изомонодромное слоение*.

В нашем “игрушечном” скалярном примере задача решается тривиально – монодромии $M_k = \exp\{2\pi i A^{(k)}\}$ от положения полюсов *вообще не зависят*, так что искомые уравнения, выделяющие n -мерные слои в $2n$ -мерном пространстве $\mathrm{gl}(1, \mathbb{C})^n \times \mathbb{C}^n$, неинтересны: $\partial A^{(k)} / \partial \lambda_j = 0$ для любых k, j . Эта же задача в матричном случае становится нетривиальной, так как у монодромии появляется зависимость от положения полюсов λ_k – изомонодромные слои “искривляются”, сходят с декартова сомножителя $\mathbb{C}^n \ni \lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Рассмотрим усложнения, появляющиеся в матричном случае. Пусть в уравнении $(\star)$ вычеты $A^{(k)}$ принадлежат $\mathrm{gl}(m, \mathbb{C})$, и пусть $\Psi \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ – какое-нибудь решение (фундаментальная матрица, составленная из вектор-функций решений). Так же как и в скалярном случае, аналитическое продолжение решений по замкнутому циклу, обходящему точку λ_k , приводит к появлению у Ψ множителя, но это уже *матричный* множитель: $\Psi \rightarrow \Psi M_k \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$. Следующим осложняющим моментом является то, что теперь монодромия *не определяется уравнением* – разные решения *одного* уравнения, если они отличаются правым множителем $\Psi(\lambda) \rightarrow \Psi(\lambda) \Phi_r$, имеют разные наборы монодромий

$$M_1, \dots, M_n \rightarrow \Phi_r^{-1} M_1 \Phi_r, \dots, \Phi_r^{-1} M_n \Phi_r.$$

Самим уравнением набор $M_{\bar{k}}$ определяется лишь *с точностью до общего сопряжения*. С другой стороны, теперь и функции $\Psi(\lambda)$, отличающиеся *постоянным множителем* (матричным, левым), удовлетворяют уже *разным* уравнениям – домножение $\Psi(\lambda) \rightarrow \Phi_l \Psi(\lambda)$, т. е. линейная замена “искомой функции”, приводит к преобразованию подобия коэффициентов уравнения

$$A_1, \dots, A_n \rightarrow \Phi_l^{-1} A_1 \Phi_l, \dots, \Phi_l^{-1} A_n \Phi_l.$$

Возникает необходимость рассмотрения классов эквивалентности по одновременному сопряжению обоих наборов. Именно *этим* и создается (основная) трудность, приводящая к печально-известной громоздкости вывода уравнения Пенлеве VI. Ввести удобные координаты на фактормногообразии оказывается нелегко еще и потому, что они должны быть каноническими для некоторой гамильтоновой структуры. Структура же эта, хотя и “пришла из мира матриц”, но “ничего не знает” о нашем желании рассматривать наборы и факторизовать их по общему сопряжению.

Вернемся к задаче описания изомонодромного слоя в $\mathrm{gl}(m, \mathbb{C})^n \times \mathbb{C}^n$, т. е. не проводя, пока, никаких факторизаций. Рассмотрим какую-нибудь конкретную изомонодромную деформацию $\Psi(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, т. е. n -параметрическое семейство функций $\Psi(\lambda)$, каждая из которых имеет один и тот же набор монодромий $M_1, \dots, M_n$ и только простые полюсы в $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ у логарифмической производной $(d\Psi/d\lambda)\Psi^{-1}$.

Такая Ψ определяет n -мерное подмногообразие в $(m^2 n + n)$ -мерном пространстве уравнений (наборов $A^{(\bar{k})}, \lambda_{\bar{k}}$); назовем ее “кривой” (n -мерной). Домножение справа $\Psi(\lambda; \lambda_{\bar{k}}) \rightarrow \Psi(\lambda; \lambda_{\bar{k}}) \Phi_r(\lambda_{\bar{k}})$ будет менять монодромию, но не изменит

этой кривой (уравнений). Домножение *слева* $\Psi(\lambda; \lambda_{\bar{k}}) \rightarrow \Phi_l(\lambda_{\bar{k}})\Psi(\lambda; \lambda_{\bar{k}})$ будет изгибать эту кривую, но *так*, что она не будет сходить с интересующего нас изомонодромного слоя (домножение слева не меняет монодромий).

При всевозможных таких изгибах каждая точка кривой, т. е. набор вычетов $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$, превратится в $(m^2 - 1)$ -мерное¹ многообразие, в орбиту

$$\bigcup_{g \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})} g^{-1} A^{(1)} g, \dots, g^{-1} A^{(n)} g.$$

Интересующий нас изомонодромный слой окажется $(m^2 - 1 + n)$ -мерной поверхностью в $(m^2 n + n)$ -мерном пространстве, замеченной n -мерными “кривыми” при калибровочных “изгибах” $\Phi_l(\lambda_{\bar{k}})$.

Предлагается следующая иллюстрация. Евклидово трехмерное пространство (это аналог пространства уравнений) некоторым условием (условием изомонодромности) наложено на поверхности (изомонодромные слои), переходящие в себя при вращении вокруг оси OZ (это действие калибровочной группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ на Ψ -функцию слева). Роль параметров деформации $\lambda_{\bar{k}}$ в этом примере играет координата на оси OZ . Иными словами, пространство некоторым специальным (искомым) образом наложено на поверхности вращения вокруг оси OZ . Любая кривая, лежащая на какой-нибудь из этих поверхностей вращения, будет обладать нужным свойством (ее точки-уравнения имеют одинаковые наборы монодромий), причем через любую точку можно провести бесконечно много разнообразных кривых (размерность слоя $m^2 - 1 + n$ больше n – числа параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$). В данной статье решается задача описания этих слоев – *искомых поверхностей вращения*.

Естественным способом описания поверхности вращения является задание какой-нибудь направляющей, один раз пересекающей все окружности (орбиты действия калибровочной группы $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$). Можно, например, задать направляющую *плоской* кривой в пространстве – пересечением поверхности вращения плоскостью, содержащей ось, – тогда в уравнениях движения точки трехмерного пространства по этой кривой не будет участвовать угловая переменная, и сразу после введения координат на кривой эти уравнения можно интерпретировать как искомые уравнения изомонодромных деформаций (уравнения Гарнье–Пенлеве VI). Эта *плоская направляющая кривая* является (задается) решением системы уравнений Шлезингера, которой удовлетворяют изомонодромные деформации $\Psi(\lambda; \lambda_{\bar{k}})$, обладающие дополнительным (наложенным “руками”) свойством:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi(\lambda; \lambda_{\bar{k}}) = \mathrm{const} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C}) \quad \forall \lambda_{\bar{k}}.$$

Обычно точки этой же линии (решение уравнений Шлезингера) и используют для параметризации “образующих окружностей” (введения координат на фактормногообразии по действию калибровочной группы). Этот путь известен весьма тяжеловесными вычислениями, не освещенными какой бы то ни было

¹Размерность не m^2 , а $m^2 - 1$, на единицу меньше размерности $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$, так как пропорциональные матрицы одинаково преобразуют наборы $A^{(\bar{k})}$.

геометрической моделью (см. [1]); кроме того, рассуждения для общего положения при некоторых наборах параметров не работают, необходимо рассматривать различные случаи. Заметим в этой связи, что аналитическая сложность всей теории связана еще и с тем, что мы изначально имеем дело с многообразиями очень высоких размерностей. Например, для уравнения Пенлеве $n = 3$, $m = 2$, так что размерность пространства уравнений $m^2n + n = 15$ (!), в то время как истинная размерность задачи равна *трём* (!) – именно трехмерное расширенное фазовое пространство оказывается наслоенным на одномерные подмногообразия, решения уравнения Пенлеве VI. Для такого уменьшения размерности приходится прибегать к множеству ухищрений, затуманивающих нарисованную выше схематическую картину, – переходить от группы GL к SL и от алгебры gl к sl (деление на скаляр $\Psi \rightarrow \Psi/\sqrt{\det \Psi}$ не меняет локального постоянства монодромий), к подмногообразиям матриц с фиксированными собственными числами, факторизовать по действию калибровочной группы и т. д.

Заметим здесь, что изрядную часть этой работы можно было бы опустить – отнести на счет общей теории, – перейдя на более адекватный, но более абстрактный язык теории связностей в расслоениях. Именно на этом языке вся теория выглядит наиболее естественной, на нем были получены наиболее тонкие результаты теории изомонодромных деформаций, решена 21-я проблема Гильберта [13], [14].

К сожалению, как и в художественной литературе, смена языка означает смену читательской аудитории, поэтому мы не будем давать определений и сколько-то последовательного изложения, а лишь на словах поясним, о чем идет речь – что такое векторное расслоение со связностью, в чем сходство и различие изомонодромных деформаций уравнений и связностей (подробнее см. [14], [15]).

Расслоение – это многообразие, которое снабжено некоторой дополнительной структурой. В нашем случае систем 2×2 линейных уравнений на $\mathbb{CP}^1$ нужны расслоения с базой $\mathbb{CP}^1$, слоем $\mathbb{C}^2$ и структурной группой $GL(2, \mathbb{C})$. Этот случай и будем рассматривать.

Пространство расслоения E – это трехмерное многообразие, на котором задана проекция на базу $\text{pr}: E \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Прообраз $\text{pr}^{-1}(\lambda)$ каждой точки $\lambda \in \mathbb{CP}^1$ диффеоморфен слою $\mathbb{C}^2$. *Структура расслоения* “склеивает” эти, изначально никак не связанные, слой-прообразы в трехмерное многообразие E : база покрывается окрестностями $\bigcup_{\alpha} D_{\alpha} = \mathbb{CP}^1$, и в каждом прообразе $\text{pr}^{-1}(D_{\alpha}) \subset E$ вводятся координаты прямого произведения $\phi_{\alpha}: \text{pr}^{-1}(D_{\alpha}) \rightarrow D_{\alpha} \times \mathbb{C}^2$ так, чтобы возникающие на перекрытиях $D_{\alpha} \cap D_{\beta} \neq \emptyset$ автоморфизмы кроме стандартных условий (коцикла), обеспечивающих корректность построения E как многообразия, еще имели дополнительные свойства:

- естественная проекция $\text{pr}_{\alpha}: D_{\alpha} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow D_{\alpha}$ на первый декартов сомножитель согласована с проекцией pr : $\text{pr} = \text{pr}_{\alpha} \circ \phi_{\alpha}$, т. е. слой отображается в слой;
- индуцированные в пересечениях $D_{\alpha} \cap D_{\beta}$ автоморфизмы слоев $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ принадлежат структурной группе $GL(2, \mathbb{C})$.

Связностью в расслоении называется отображение, которое каждому пути $l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{CP}^1$ на базе ставит отображение между слоями над конечной и начальной точками, принадлежащее структурной группе. При этом кроме непрерывности и независимости от параметризации должно быть выполнено *условие аддитивности*: если какая-нибудь кривая разбита на две так, что конец одной совпадает с началом другой, то соответствующее этой составной кривой отображение слоев должно совпадать с композицией отображений, определенных ее частями.

После введения локальных координат связность может быть задана системой дифференциальных уравнений:

$$d\Psi(\lambda) = \omega(\lambda)\Psi(\lambda).$$

Здесь $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ – координаты в слое над точкой базы λ . Координаты эти определены базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)(\lambda)$, выбранным в слое при введении координат (сама *точка* слоя – это $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\Psi$).

Эта система уравнений, конечно, определена *только* там, где определены эти локальные координаты. Если координаты прямого произведения на расслоении можно ввести *глобально*, то такое расслоение называется *тривиальным*. Именно *тривиальные* расслоения эквивалентны системам уравнений, заданным на базе.

Матричнозначная (2×2) -форма

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} d\lambda & \omega_{12} d\lambda \\ \omega_{21} d\lambda & \omega_{22} d\lambda \end{pmatrix}, \quad \omega_{ij} = \omega_{ij}(\lambda),$$

называется формой связности. Она, в координатах $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, задает преобразование слоя над λ в слой над $\lambda + d\lambda$ при инфинитезимальном сдвиге $d\lambda$ из точки λ .

В зависимости от свойств $\omega_{ij}(\lambda)$ различают гладкие, аналитические, мероморфные и прочие связности. Для фуксовых систем $\omega_{ij}(\lambda)$ – это мероморфные формы на $\mathbb{CP}^1$ с только простыми полюсами.

Замена базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)\Phi$ в слое над каждой точкой λ приводит к замене (искомой, зависимой) переменной – домножению $\Psi = \Psi(\lambda)$ слева на $\Phi = \Phi(\lambda)$, т.е. к калибровочному преобразованию уравнения:

$$d\Psi' = (d\Phi \Phi^{-1} + \Phi \omega \Phi^{-1})\Psi'.$$

Таким образом, исследуя связность, мы сразу исследуем целый класс уравнений, связанных линейными заменами искомой функции.

Понятия монодромии и изомонодромной деформации естественно формулируются на этом языке. Монодромия связности – это автоморфизм слоя, задаваемый замкнутой кривой на базе. При изомонодромных деформациях эти автоморфизмы не должны меняться.

Итак, на языке теории связностей в расслоениях, основная часть данного обзора посвящена специальному выбору базисов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в слоях тривиального расслоения над $\mathbb{CP}^1$.

Вернемся к дифференциальным уравнениям. В работах японской школы [9], [10], [16] была продемонстрирована эффективность методов теории гамильтоновых систем в задачах изомонодромной деформации. С этой точки зрения исследуемые фуксовы системы являются точками фазового пространства, а их изомонодромные деформации – это траектории соответствующей гамильтоновой системы.

То, что координатами Дарбу для многих гамильтоновых систем, имеющих представление нулевой кривизны, являются положения полюсов блоховской функции и собственные значения L -оператора в этих точках, впервые установлено в работе [17] и, в значительно более общем виде, в [18] (приложение к теории Виттена–Зайберга см. [19], [20]). В конкретном случае фуксовых систем, отвечающих уравнению Пенлеве VI, эти координаты представляют собой пару функций p, q – положение корня антидиагонального члена правой части уравнения $(\star)$ и значение диагонального члена в этой точке:

$$q : \left(\sum_{k=1}^3 \frac{A^{(k)}}{q - \lambda_k} \right)_{12} = 0, \quad p = \left(\sum_{k=1}^3 \frac{A^{(k)}}{q - \lambda_k} \right)_{11}.$$

Тут представитель семейства калибровочно-эквивалентных друг другу уравнений выбирается так, чтобы вычет $A^{(0)}$ в бесконечно удаленной точке $\lambda_0 = \infty$ был диагонален, такую калибровку будем называть традиционной.

В данной статье предлагается другая калибровка, ее можно было бы назвать *треугольной*. Прежде всего она отличается тем, что для выбора уравнения-представителя используется не одна (это была $\lambda_0 = \infty$), а три различных точки, в тексте они обозначены ∞_+, ∞_- и ∞_* (см. с. 68).

Вообще идея треугольной нормировки функции Ψ одновременно в разных точках не нова. В работе [21] И. М. Кричевер использовал аналогичную нормировку решения вспомогательной линейной системы при исследовании двухточечной функции Бейкера–Ахиезера. В окрестности точки $\lambda = 0$ матрица Ψ выбиралась верхнетреугольной, с единицами на диагонали, а в окрестности точки $\lambda = \infty$ матрица Ψ была нижнетреугольной. Предлагаемая в данной статье нормировка (16), кроме наличия третьей нормировочной точки, от нормировки И. М. Кричевера отличается тем, что треугольный вид имеет не сама функция Ψ , т. е. не решение линейной системы, а логарифмическая производная $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi \right) \Psi^{-1}$ или, в точке ветвления Ψ , вычет этой логарифмической производной. Это более слабое, чем треугольность, ограничение на Ψ , оно эквивалентно условию линейной зависимости между строкой и ее производной.

Нормированная таким образом система обладает замечательным свойством: если для калибровки использовать, скажем, вычеты $A^{(0)}, A^{(2)}$ и $A^{(3)}$, то естественная проекция подмногообразия уравнений на орбиту $\mathcal{O}$, замечаемую вычетом $A^{(1)}$:

$$A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)} \rightarrow A^{(1)},$$

окажется каноническим отображением. Соответственно любая пара канонически-сопряженных переменных p, q на орбите $\mathcal{O}$ – стандартном симплектическом пространстве – даст каноническую параметризацию многообразия уравнений.

Несколько слов по поводу общности наших построений.

Имеется подсемейство уравнений $(\star)$, все вычеты которых могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду. Такие наборы вычетов мы назовем одновременно-треугольными. “Одновременно-треугольный” случай много проще общего и *не нуждается* в теории, изложению которой посвящена эта статья.

Действительно, приведем набор $A^{(\bar{k})}$ к верхнетреугольному виду $A_{21}^{(k)} = 0$ для любого k ; поскольку собственные числа $A_{11}^{(k)}$ вычетов фиксируются монодромиями, то соответствующие наборы параметризуются просто отношением $A_{12}^{(0)} : A_{12}^{(1)} : \dots : A_{12}^{(n)}$ – точками проективного пространства. Соответствующее изомонодромное подмногообразие будет задаваться системой *линейных* уравнений на $A_{12}^{(k)}$; в случае Пенлеве $n = 3$ эта система сводится к гипергеометрическому уравнению.

УСЛОВИЕ. Мы исключаем из рассмотрения случай, когда все матрицы $A^{(i)}$, $i = 0, \dots, n$, могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду.

Назовем это условием *одновременной нетреугольности*. Заметим, что если компонента такая существует, то из необходимости равенства нулю суммы всех вычетов $\sum A^{(k)}$ следует, что сумма параметров – собственных чисел – равна нулю, т. е. “одновременно-треугольная” компонента существует *только при специальных значениях параметров*. Предложенный способ параметризации (линейных уравнений) позволяет единообразно рассматривать *всё* пространство линейных уравнений, кроме одновременно-треугольного его подмногообразия. Итак, это одновременно-треугольное множество *удалено* из всех рассматриваемых многообразий.

На *параметры* исследуемого изомонодромного слоя (параметры Пенлеве $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), иначе – на собственные числа вычетов $A^{(k)}$, не накладывается *никаких ограничений*.

Отметим теперь следующий тонкий момент. Множество уравнений с одинаковыми монодромиями устроено не просто. Прежде всего, имеется компонента, существующая *при всех* значениях параметров (собственных чисел матриц-вычетов $A^{(k)}$). Эту компоненту можно назвать *регулярной* или *шлезингеровой*. Именно она описывается уравнением Пенлеве VI, и вычеты $A^{(k)}$, не покидающие эту компоненту при деформациях, удовлетворяют (при надлежащей калибровке) системе уравнений Шлезингера (15). Данная статья посвящена описанию именно этой – *шлезингеровой* – компоненты.

В случае общего положения – отсутствия натуральных разностей между собственными числами $A^{(k)}$ – этой компонентой все и исчерпывается. Однако при некоторых значениях параметров имеются и другие семейства уравнений с совпадающими монодромиями, осложняющие картину и являющиеся причиной множества оговорок при формулировках. Эти сложные случаи обычно называют *резонансами*. *Случай резонансов* является предметом интенсивных исследований [22], [14], [23], однако лежит далеко за пределами данной статьи. Мы будем исследовать *только* деформации, описываемые уравнением Пенлеве VI.

В заключение, однако, заметим, что хотя уравнения, описывающие резонансные изомонодромные деформации, в статье и не обсуждаются, но сами точки этих исключительных (резонансных) семейств автоматически оказываются параметризованными (кроме уже оговоренных одновременно-треугольных) вместе со всеми остальными точками $M_{a_{\vec{i}\vec{i}}}$.

Возвращаясь к системе Шлезингера, укажем, что она потребуется нам *только* для получения уравнений изомонодромных деформаций. Параметризовать же орбиты (вводить необходимые для дальнейшего исследования канонические координаты) предлагается другим образом (см. [24]–[26]), ему соответствует другая “направляющая”, заданная уравнениями (13), (14), где R приведено в (17), но в дальнейшем эти уравнения не потребуются. В результате естественным образом появляется многообразие $M_{a_{\vec{i}\vec{i}}}$ – фазовое пространство гамильтоновой системы, задающей листы изомонодромного слоения (системы Гарнье–Пенлеве VI); $M_{a_{\vec{i}\vec{i}}}$ строится как *симплектическое алгебраическое многообразие* – объединение аффинных квадрик (орбит коприсоединенного представления $SL(2, \mathbb{C})$) с алгебраическими (даже бирациональными) функциями переклейки, сохраняющими симплектическую структуру. Это многообразие является частью так называемой поверхности Окамото, или поверхности начальных данных уравнения P^{VI} (см. [16], [8]). Для построения всей поверхности Окамото к $M_{a_{\vec{i}\vec{i}}}$ нужно будет добавить (см. раздел 7) еще одну линию (дивизор, см. [27]), точки которой соответствуют решениям, обратившимся в этот момент в бесконечность.

Венцом-итоном развиваемой теории является доказательство теоремы, принадлежащей К. Окамото и утверждающей, что на соответствующем расширенном фазовом пространстве нет другого поля направлений (алгебраического, т. е. направляющие косинусы которого были бы алгебраически связаны с координатами на многообразии), кроме как задаваемого уравнением Пенлеве VI. Теорема эта интересна тем, что позволяет свести исследование важного дифференциального уравнения к изучению геометрии некоторого алгебраического многообразия.

1. Системы с фуксовыми особыми точками

Объектом нашего исследования является семейство (матричных) линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\lambda} \Psi = \sum_{k=0}^n \frac{A^{(k)}}{\lambda - \lambda_k} \Psi, \quad \Psi \in SL(2, \mathbb{C}), \quad A^{(k)} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (1)$$

Системы такого вида, т. е. с полюсами только первого порядка, называются фуксовыми (в конце XIX века их исследовал Л. Фукс [28], современные изложения см. в [1], [3], [4]).

1.1. Локальная теория. Данная статья посвящена исследованию *деформаций* такого уравнения, т. е. будет изучаться зависимость коэффициентов $A^{(k)}$ и решения Ψ от параметров $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, но пока пусть все параметры λ_k *фиксированы*. Как ведет себя $\Psi(\lambda)$ в окрестности особой точки $\lambda = \lambda_k$?

Введем координату

$$x := \lambda - \lambda_k. \quad (2)$$

Локальные исследования уравнения

$$\frac{d}{dx}\Psi = \left(\frac{A}{x} + \mathbf{O}(1)\right)\Psi, \quad (3)$$

где $\mathbf{O}(1)$ аналитична в некоторой окрестности нуля, показывают (см. [29]), что решение Ψ может быть представлено в виде

$$\Psi = \Psi_{\text{reg}}(x)\Psi_{\text{sing}}(x)\Psi_{\text{mdr}}, \quad (4)$$

где $\Psi_{\text{reg}}(x)$ регулярна (в частности – обратима), Ψ_{mdr} постоянна (не зависит от x), а $\Psi_{\text{sing}}(x)$ имеет некоторый стандартный вид. Именно, Ψ_{sing} является негладкой и обеспечивает особенность (простой полюс) у $d\Psi\Psi^{-1}$ в точке $x = 0$.

Введем понятие *локальной монодромии*. Рассмотрим маленькую окружность с центром в нуле и аналитически продолжим вдоль нее $\Psi(x)$ – решение (3). Обозначим результат этого аналитического продолжения $\Psi(xe^{2\pi i})$. Поскольку $Ax^{-1} + \mathbf{O}(1)$ – однозначная функция, $\Psi(xe^{2\pi i})$ является решением того же уравнения, а любые два решения одного линейного уравнения отличаются постоянным правым множителем:

$$\Psi(xe^{2\pi i}) = \Psi(x)M. \quad (5)$$

Эта матрица M и называется локальной монодromией решения Ψ в точке $x = 0$.

Домножение Ψ *справа* на постоянную матрицу приводит к преобразованию подобия M :

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x)\Phi_r \quad \Rightarrow \quad M \rightarrow \Phi_r^{-1}M\Phi_r,$$

и сохраняет уравнение; домножение Ψ *слева* на постоянную матрицу приводит к преобразованию подобия коэффициентов уравнения (3), в частности вычета A , – меняет уравнение:

$$\Psi(x) \rightarrow \Phi_l\Psi(x) \quad \Rightarrow \quad A \rightarrow \Phi_l^{-1}A\Phi_l,$$

и сохраняет монодromию.

Таким образом, имеет смысл рассматривать не “индивидуальное” соответствие $A \leftrightarrow M$, не выдерживающее калибровочных преобразований $\Psi(x) \rightarrow \Phi_l\Psi(x)\Phi_r$, а соответствие между классами эквивалентности (по сопряжению)

$$\bigcup_{\Phi \in \text{SL}(2, \mathbb{C})} \Phi^{-1}A\Phi \quad \leftrightarrow \quad \bigcup_{\Phi \in \text{SL}(2, \mathbb{C})} \Phi^{-1}M\Phi.$$

Такие классы можно характеризовать нормальной жордановой формой содержащихся в них матриц. Мы выберем Ψ_{sing} так, что

а) вычет $d\Psi_{\text{sing}}\Psi_{\text{sing}}^{-1}$ имеет нормальную жорданову форму:

$$\frac{d}{dx}\Psi_{\text{sing}} = \left(\frac{A_J}{x} + \mathbf{O}(1)\right)\Psi_{\text{sing}},$$

A_J – нормальная жорданова форма матрицы A в (3);

б) локальная монодромия $\Psi_{\text{sing}}(x)$ тоже имеет нормальную жорданову форму:

$$\Psi_{\text{sing}}(xe^{2\pi i}) = \Psi_{\text{sing}}(x)M_J,$$

M_J – нормальная жорданова форма матрицы M в (5).

Пусть $\pm a$ – собственные значения A . Если $2a \notin \mathbb{Z}$, то A_J и M_J диагональны, и, как-то зафиксировав ветвь x^a , получаем набор

$$A_J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad M_J = \begin{pmatrix} e^{2\pi ia} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi ia} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\text{sing}} = \begin{pmatrix} x^a & 0 \\ 0 & x^{-a} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В общем случае, и для полужелых a , локальные исследования (см. [29], [23], [12], [30]) показывают, что Ψ_{sing} можно выбрать так, что

$$\Psi_{\text{sing}} = \begin{pmatrix} x^a & 0 \\ 0 & x^{-a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\psi}_{\text{sing}}(x | M_J) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\psi}_{\text{sing}}(x | M_J)$ – функция, определяемая монодрией. Она полиномиально зависит от $\log x$.

1.2. Глобальная теория, изомонодромные деформации. Нашей целью является изучение таких деформаций уравнения, что его монодромии не меняются. Из предыдущего замечания следует, что **всегда**

$$\text{“собственное число” } A_J = \frac{1}{2\pi i} \log \text{“собственное число” } M_J,$$

т. е. хорошо известное утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При непрерывных изомонодромных деформациях собственные числа вычетов $A^{(k)}$ не меняются – это параметры деформации.

Вернемся к уравнению (1). Рассмотрим его глобально (на $\overline{\mathbb{C}}$) по λ и локально по параметрам λ_k . Удобна следующая точка зрения и обозначения.

Рассматривается $\mathbb{CP}^1$ и набор попарно непересекающихся дисков

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \subset \mathbb{CP}^1.$$

Независимой переменной будет положение точки $P \in \mathbb{CP}^1$, а параметрами – положение точек $P_k \in \Lambda_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Мы уже знаем, что в точках $P = P_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, функция

$$\Psi = \Psi(P; P_0, P_1, \dots, P_n)$$

определена не будет (это ее точки ветвления). Обозначим $\Lambda := \Lambda_0 \times \dots \times \Lambda_n$ и Δ_Λ множество, состоящее из таких $(P, P_0, \dots, P_n)$, что P совпадает с какой-нибудь из P_k . Зададим область определения $(\mathbb{CP}^1 \times \Lambda) \setminus \Delta_\Lambda$ функции Ψ , выбросив из $\mathbb{CP}^1 \times \Lambda$ множество Δ_Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Матричнозначная функция Ψ как функция P при фиксированных P_k , $k = 0, \dots, n$, имеет ветвление в P_k , так что, на самом деле, для каждого набора $P_0, \dots, P_n$ функция Ψ определена не на самой $\mathbb{CP}^1 \setminus \{P_0, \dots, P_n\}$,

а на ее универсальной накрывающей. Однако для упрощения речи мы будем пользоваться лексикой *многозначных функций на $\mathbb{CP}^1$* , подразумевая естественную проекцию на $\mathbb{CP}^1$ достаточно малой окрестности обсуждаемой точки.

Введем на $\mathbb{CP}^1 \times \Lambda$, как на декартовом произведении многообразий², операторы *частного дифференцирования* $d_{\downarrow}$ и $d_{\uparrow}$.

Для любой параметризации $\lambda: \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ положим $\lambda := \lambda(P)$, $\lambda_k := \lambda(P_k)$ и для любой функции $f = f(\lambda; \lambda_0, \dots, \lambda_n)$ определим выражения $d_{\downarrow}f$ и $d_{\uparrow}f$:

$$d_{\downarrow}f := \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_k = \text{const}} f d\lambda, \quad d_{\uparrow}f := \sum_{k=0}^n \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Big|_{\substack{\lambda = \text{const} \\ \lambda_i = \text{const} \\ i \neq k}} f d\lambda_k. \quad (7)$$

Они не зависят от параметризации λ и корректно определяют операторы “частного дифференцирования”, удовлетворяющие соотношениям:

$$d_{\downarrow} + d_{\uparrow} = d, \quad d_{\downarrow} \wedge d_{\downarrow} = d_{\uparrow} \wedge d_{\uparrow} = 0 = d \wedge d, \quad d_{\downarrow} \wedge d_{\uparrow} = -d_{\uparrow} \wedge d_{\downarrow}. \quad (8)$$

Уравнение (1) может быть переписано в форме $d_{\downarrow}\Psi = \omega_{\downarrow}\Psi$, где

$$\omega_{\downarrow} := \sum_{k=0}^n A^{(k)} d_{\downarrow} \log(\lambda(P) - \lambda(P_k)) \quad (9)$$

– мероморфный дифференциал на $\mathbb{CP}^1$, все особенности которого – это простые полюсы в P_k с вычетами $A^{(k)} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим какое-нибудь решение $\Psi(P)$ этого уравнения (локально, в какой-нибудь области вне дисков Λ_k). Его, как и решение уравнения (3), можно аналитически продолжать вдоль любого пути $\mathcal{L}$, не проходящего через особенности P_k . Если этот путь окажется замкнутым, мы снова получим два решения одного уравнения (дифференциал $\omega_{\downarrow}$ однозначен); эти решения отличаются постоянным (не зависящим от P) правым множителем $M_{\mathcal{L}}$ – монодромией, что можно было бы обозначить как $\Psi(Pe^{2\pi i\mathcal{L}}) = \Psi(P)M_{\mathcal{L}}$.

Нас будут интересовать решения Ψ , монодромии которых вдоль *всех* циклов на $\mathbb{CP}^1 \setminus \Lambda$ постоянны, не зависят от вариации параметров P_k внутри своих Λ_k .

Поскольку решение $\Psi(P)$ определяется уравнением (вычетами $A^{(k)}$) с точностью до произвольного правого множителя, поставим вопрос следующим образом:

Задача изомонодромной деформации. *Как могут непрерывно зависеть вычеты $A^{(k)}$ дифференциала $\omega_{\downarrow}$ от параметров P_k (коэффициенты уравнения (1) от параметров λ_k), чтобы существовала $\Psi(P; P_0, \dots, P_n)$, монодромии $M_{\mathcal{L}}$ которой вдоль всех циклов $\mathcal{L}$ на $\mathbb{CP}^1 \setminus \Lambda$ одни и те же, не меняются при вариации параметров $P_k \in \Lambda_k$?*

Любое такое семейство решений $\Psi(P)$ (вместе с соответствующим семейством уравнений), гладко зависящее от параметров P_k , назовем *изомонодромной деформацией*.

²Потом их, конечно же, ограничим на $(\mathbb{CP}^1 \times \Lambda) \setminus \Delta_{\Lambda}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Можно доказать (см. [23]), что любая непрерывная изомонодромная деформация может быть параметризована аналитически.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Существуют еще *дискретные* преобразования Ψ , не меняющие монодромии, но нетривиально меняющие уравнение, это так называемые *преобразования Шлезингера*. Поскольку целью данной статьи является построение координат на связном гладком многообразии – *компоненте* изомонодромного подмногообразия, то дискретные преобразования (Шлезингера) *намеренно исключены из рассмотрения*.

Из (4) следует, что монодромия Ψ при обходе точки P_k имеет представление

$$M^{(k)} = (\Psi_{\text{mdr}}^{(k)})^{-1} M_J \Psi_{\text{mdr}}^{(k)}.$$

Оставим в стороне сложный случай целой разницы собственных значений $a - (-a) = 2a$ матрицы A_J , при ненулевых a порождающий дополнительные *резонансные* компоненты и далеко выходящий за рамки данной статьи (см. [13], [14]). Для него мы просто сформулируем конечный результат (теорема 1 ниже). Сейчас рассмотрим представление (4), где матрица Ψ_{sing} задана в (6). Если монодромия постоянна, то Ψ_{mdr} тоже постоянна с точностью до левого диагонального множителя. Однако Ψ_{mdr} и определена с точностью до такого множителя, поскольку его можно “пронести” через диагональную Ψ_{sing} , относя к Ψ_{reg} . Так что при изомонодромной деформации (в нерезонансном случае) всегда можно выбрать

$$\Psi_{\text{mdr}} = \text{const} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Мы получим следующее равенство (10), известное еще Л. Фуксу и лежащее в основе теории шлезингеровых деформаций.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если собственные значения вычета матриц $A^{(k)}$ не полные, то функция $\Psi : (\mathbb{CP}^1 \times \Lambda) \setminus \Delta_\Lambda \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ является решением уравнения (1) и имеет постоянные монодромии тогда и только тогда, когда она регулярна по всем аргументам и в окрестности выколотых точек P_k может быть представлена в виде

$$\Psi = \Psi_{\text{reg}}^{(k)}(P; P_i) \Psi_{\text{sing}}^{(k)}(\lambda(P) - \lambda(P_k)) \Psi_{\text{mdr}}^{(k)}, \quad P \in \Lambda_k, \quad (10)$$

где λ – какой-нибудь голоморфный параметр на $\mathbb{CP}^1$, $\Psi_{\text{reg}}^{(k)}$ регулярна, $\Psi_{\text{mdr}}^{(k)}$ постоянна, а $\Psi_{\text{sing}}^{(k)}(x)$ – многозначная функция одной комплексной переменной (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость нами доказана, а достаточность очевидна, так как $d \downarrow \Psi \Psi^{-1}$ имеет только простые полюсы и, по построению, все локальные монодромии такой Ψ постоянны.

Для $a = 0$ аналогичное утверждение тоже верно, хотя Ψ_{sing} уже не имеет диагональной формы и доказательство чуть более громоздко, однако для случая $2a \in \mathbb{N}$ изомонодромная деформация уже не обязана иметь вид (10), хотя

деформации (10) все равно остаются изомонодромными. Это мы примем без доказательства, не желая отвлекаться на исследование сложной формы Ψ_{sing} и ее монодромии в этом случае.

Чтобы выписать уравнение, которому удовлетворяет функция Ψ по параметрам – переменным λ_k , отметим два важных обстоятельства.

Во-первых, в точке $\lambda = \lambda_k$ сингулярный множитель не зависит от остальных параметров λ_i , $i \neq k$, вся зависимость от них сосредоточена в Ψ_{reg} .

Во-вторых, Ψ_{sing} зависит только от разности $\lambda - \lambda_k = x$, так что обе матричнозначные функции – как $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi\right) \Psi^{-1}$, так и $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi\right) \Psi^{-1}$, имеют в $\lambda = \lambda_k$ простой полюс с тем же самым вычетом $A^{(k)}$.

Итак, зафиксируем P и все P_i , кроме одного, кроме P_k . Рассмотрим

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right|_{\substack{\lambda = \text{const} \\ \lambda_i = \text{const} \\ i \neq k}} \Psi(\lambda; \lambda_0, \dots, \lambda_n) =: \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi(\lambda)$$

как функцию (одной) комплексной переменной λ . Она регулярна везде на $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, точек λ_i , $i = 0, \dots, n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Особо отметим, что функция $\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi$ регулярна и в $\infty_\lambda \in \mathbb{CP}^1$ – той точке, где (произвольно выбранный) параметр λ обращается в бесконечность. Эта точка *ничем не выделена* для $\Psi(P; P_0, \dots, P_n)$.

Какая сингулярность у $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi\right) \Psi^{-1}$ в точках P_i ? Рассмотрим представление (10); заметим, что сингулярный член $\Psi_{\text{sing}}^{(i)}(\lambda - \lambda_i) \Psi_{\text{mdr}}^{(i)}$ при $i \neq k$ вообще от λ_k не зависит, а при $i = k$ зависит от разности $\lambda - \lambda_k$. Мы видим, что единственная особенность $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi\right) \Psi^{-1}$ как функции λ на всей сфере Римана – это

простой полюс в P_k и с тем же самым вычетом, что и у $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi\right) \Psi^{-1}$ (см. [31; уравнение (14), с. 103]):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi = \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda} A^{(k)} + R^{(k)} \right) \Psi, \quad (11)$$

где $R^{(k)} = R^{(k)}(P_0, P_1, \dots, P_n)$ – какая-то не зависящая от P матрица – значение $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi\right) \Psi^{-1}$ в точке ∞_λ .

ТЕОРЕМА 1 (Л. Фукс, Л. Шлезингер). Для изомонодронности деформации Ψ достаточно выполнения уравнений (11).

В нерезонансном случае, т.е. если отсутствуют натуральные разности собственных значений вычетов $A^{(k)}$, это условие является и необходимым.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Несмотря на кажущуюся симметрию (11) и (1), еще раз отметим, что имеется принципиальная разница. Зависимость $d\Psi \Psi^{-1}$ от λ_k локальна и трансцендентна: $\lambda_k \in \lambda(\Lambda_k)$, $A^{(k)} = A^{(k)}(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, в то время как от λ обе функции $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Psi\right) \Psi^{-1}$ и $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi\right) \Psi^{-1}$ зависят рационально.

Перепишем уравнения на Ψ в дифференциалах:

$$\begin{aligned} d\Psi &= \sum_{k=0}^n (A^{(k)} d\log(\lambda - \lambda_k) + R^{(k)} d\lambda_k) \Psi \stackrel{\text{def}}{=} \omega \Psi, \quad \omega = \omega_{\downarrow} + \omega_{\uparrow}, \\ \omega_{\downarrow} &= \sum_{k=0}^n A^{(k)} \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_k}, \quad \omega_{\uparrow} = \sum_{k=0}^n \left(A^{(k)} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} + R^{(k)} \right) d\lambda_k. \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим $R := \sum_{k=0}^n R^{(k)} d\lambda_k$. Сразу видно, что

$$R = d_{\uparrow} \Psi \Psi^{-1}(\infty_{\lambda}; P_0, \dots, P_n),$$

поэтому R – плоская связность на $\Lambda_0 \times \dots \times \Lambda_n = \Lambda$.

С другой стороны, R – любая плоская связность. Действительно, домножение Ψ слева на любую функцию, не зависящую от P , монодромии (в частности – ее постоянства) не меняет, так что $\Psi(\infty_{\lambda}; P_0, \dots, P_n)$ можно выбрать любой, и, стало быть, R – любая плоская.

Выпишем уравнения на $A^{(k)}$ и $R^{(k)}$, обеспечивающие разрешимость (12). Их выполнение повлечет существование изомонодромной Ψ , принадлежность уравнения изомонодромному слою, т.е. соответствующие $A^{(k)}$ будут являться решением задачи изомонодромной деформации.

Поскольку Ψ – локально однозначная функция, т.е. у любой точки ее области определения (точки P_k там не содержатся, они выколоты) есть окрестность, в которой можно выделить однозначную ветвь, то имеют место равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \lambda_k} \Psi = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k \partial \lambda} \Psi, \quad \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \Psi = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j \partial \lambda_i} \Psi.$$

На языке внешних форм эти равенства записываются так: $d^2 \Psi = 0$; подставляя сюда $d\Psi = \omega \Psi$, получаем уравнения $d\omega + \omega \wedge \omega = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n dA^{(k)} \wedge d\log(\lambda - \lambda_k) + \sum_{i,j=0}^n (A^{(i)} A^{(j)} d\log(\lambda - \lambda_i) \wedge d\log(\lambda - \lambda_j) \\ + R^{(i)} A^{(j)} d\log \lambda_i \wedge d\log(\lambda - \lambda_j)) = 0, \\ dR + R \wedge R = 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю суммарный вычет в каждом полюсе, получим

$$dA^{(k)} + \left[\sum_{i=0}^n (A^{(i)} d\log(\lambda_k - \lambda_i) + R^{(i)} d\lambda_i), A^{(k)} \right] = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} R^{(i)} - \frac{\partial}{\partial \lambda_i} R^{(k)} + [R^{(i)}, R^{(k)}] = 0; \quad (14)$$

здесь использовано обозначение $d\log(\lambda_k - \lambda_k) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, т.е. слагаемое суммы при $i = k$ – это $R^{(k)} d\lambda_k$. Для нерезонансного случая доказана (Л. Шлезингер, [31]), а в резонансном принимается без доказательства следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Чтобы члены семейства уравнений (1), непрерывно параметризованного λ_k , имели одинаковые наборы монодромий, достаточно, а в нерезонансном случае необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $A^{(k)}$ удовлетворяли (13) для каких-нибудь $R^{(k)}$, удовлетворяющих (14).*

2. Подмногообразие изомонодромных слоев. Система Шлезингера

Далее мы будем исследовать *только* деформации, описываемые уравнениями (13)–(14), назовем их *деформациями шлезингеровского типа*. В нерезонансном случае все изомонодромные деформации ими и исчерпываются.

Из вида уравнений (13)–(14) следует, что размерность многообразия их решений, т. е. уравнений, имеющих одинаковую монодромию, больше (на три единицы) числа параметров $(n + 1)$. Это следует из-за наличия в них R – произвольной плоской $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -значной формы на $\Lambda_0 \times \dots \times \Lambda_n$. Размерность многообразия таких форм именно *три* ($3 = \dim \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$), так как $R = d_1 \Psi \Psi^{-1}(\infty_\lambda)$, где $\Psi(\infty_\lambda)$ – любая $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -значная функция $n+1$ комплексного параметра P_k .

Уравнения, задающие *все* многообразие таких изомонодромных деформаций, получаются исключением R из (13)–(14); они, следовательно, не могут иметь вида $dA^{(k)} = F_k(A^{(0)}, \dots, A^{(n)})$, где F_k – выражение, зависящее от матричных элементов $A^{(i)}$, P_k и dP_k . Эти уравнения (Гарнье–Пенлеве VI) имеют вид

$$dG_k(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}) = F_k(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}),$$

где G_k – некоторые функции матричных элементов $A^{(i)}$. По значениям $G_k(A^{(0)}, \dots, A^{(n)})$ невозможно восстановить сами $A^{(i)}$, только некоторые специфические характеристики набора $A^{(0)}, \dots, A^{(n)}$ (например, следы всевозможных произведений $A^{(i)} A^{(j)}$).

Уравнения Гарнье–Пенлеве VI будут выведены позже – в разделе 6, а сейчас выпишем уравнения (Шлезингера) – более сильные – *именно* вида

$$dA^{(k)} = F_k(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}), \quad k = 0, \dots, n,$$

из них будет *следовать* изомонодромность и выполнение (13). Для получения таких уравнений можно, каким угодно образом, задать матрицы

$$R^{(k)} = R^{(k)}(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}),$$

удовлетворяющие (14). Один из естественных способов – это просто положить $R = 0$. Уравнения на $A^{(k)}$, получившиеся в результате такого выбора R , называются системой уравнений Шлезингера:

$$dA^{(k)} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n [A^{(i)}, A^{(k)}] d \log(\lambda_i - \lambda_k) = 0, \quad k = 0, \dots, n. \quad (15)$$

Им удовлетворяют деформации шлезингеровского типа, обладающие *дополнительным свойством*, а именно: те решения этих уравнений, что обладают одинаковыми монодромиями, *принимает одно, общее для всех, значение* $\Psi(\infty_\lambda) = \text{const} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в некоторой фиксированной точке, в $\infty_\lambda \in \mathbb{CP}^1$.

Положить $R = 0$ – не единственно возможный выбор, укажем еще один (кроме дающего систему Шлезингера) способ, который окажется удобным в дальнейшем, при построении канонических координат.

Выберем три *различные* точки ∞_+ , ∞_- , ∞_* на $\mathbb{CP}^1$. Пусть (пока) они не совпадают ни с одной из P_k .

Потребуем, чтобы первые строки $\Psi(\infty_+)$ и $d_\downarrow \Psi(\infty_+)$ были *линейно зависимы*; также пусть *линейно зависимы* вторые строки $\Psi(\infty_-)$ и $d_\downarrow \Psi(\infty_-)$.

Такое условие эквивалентно обращению в нуль матричных элементов

$$(d_\downarrow \Psi \Psi^{-1})_{12}(\infty_+) \quad \text{и} \quad (d_\downarrow \Psi \Psi^{-1})_{21}(\infty_-).$$

Далее мы убедимся, что в нашем, “одновременно-нетреугольном”, случае всегда можно выбрать точки $\infty_\pm$ так, что эти условия выполняются.

Калибровочные преобразования матричнозначной функции Ψ приводят к преобразованию подобия $d_\downarrow \Psi \Psi^{-1}(P)$ одной и той же матрицей для всех P . Преобразования, не разрушающие ни верхней треугольности (в P_+), ни нижней треугольности (в P_-), – это преобразования диагональными матрицами. Зафиксируем диагональный множитель, потребовав постоянства и неравенства нулю (для всех значений параметров λ_k) какого-нибудь недиагонального элемента матрицы $\left(\frac{d_\downarrow}{d\lambda} \Psi\right) \Psi^{-1}$ в точке ∞_* .

Итак, пусть при всех значениях параметров P_k

$$\begin{aligned} (d_\downarrow \Psi \Psi^{-1})_{12}|_{\infty_+} &= (d_\downarrow \Psi \Psi^{-1})_{21}|_{\infty_-} = 0, \\ \left(\left(\frac{d_\downarrow}{d\lambda} \Psi\right) \Psi^{-1}\right)_{12}|_{\infty_*} &= 1 \end{aligned} \tag{16}$$

для некоторой параметризации λ .

Можно показать, что из этих условий определяются, т.е. выражаются через $A^{(k)}$, все матричные элементы $R_{ij}^{(k)}$. Мы этого делать не будем. Приведем только конечную формулу, тот ее вариант, что получится, если поместить ∞_+ , ∞_- , ∞_* в точки ветвления P_0 , P_{n-1} , P_n (что и будет сделано ниже). В этом случае вместо треугольности и постоянства недиагонального элемента у $d\Psi \Psi^{-1}$ калибровка однозначно фиксируется наличием этих же свойств у соответствующих вычетов $A^{(k)}$. Уравнения (12) на Ψ принимают вид

$$\begin{aligned} d\Psi \Psi^{-1} &= \sum_{k=0}^n \left(A^{(k)} d \log(\lambda - \lambda_k) \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} \frac{A_{11}^{(k)}}{\lambda_k - \lambda_n} + A_{11}^{(n)} A_{12}^{(k)} \left(\frac{1}{\lambda_k - \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_k - \lambda_0} \right) & \frac{A_{12}^{(k)}}{\lambda_k - \lambda_0} \\ \frac{A_{21}^{(k)}}{\lambda_k - \lambda_{n-1}} & -(\dots) \end{pmatrix} d\lambda_k \right), \end{aligned} \tag{17}$$

здесь опять используем символ $d \log(\lambda_k - \lambda_k) := 0 =: \frac{1}{\lambda_k - \lambda_k}$.

3. Гамильтонов формализм и пуассонова динамика на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

Дальнейшее изложение требует введения некоторых понятий теории гамильтоновых систем. Приведем необходимые формулы и дадим пояснения. Утверждения и теоремы ближайших пунктов имеются в учебниках [1], [15], [32].

3.1. Гамильтонов формализм. Пусть M – симплектическое многообразие; на нем задана симплектическая (т.е. внешняя, гладкая, замкнутая, не обращающаяся в нуль) 2-форма:

$$\omega = \sum_{i,j} \Pi_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad \Pi_{ij} = -\Pi_{ji}.$$

Симплектическое многообразие является пуассоновым – скобка Пуассона, кососимметрическое произведение ковекторов (дифференциалов функций)

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \Pi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \Pi^{ij} = -\Pi^{ji},$$

задается обратной матрицей

$$(\Pi \dots)^{-1} = \Pi^{\dots} : \sum_k \Pi_{ik} \Pi^{kj} = \delta_i^j.$$

Координаты $x^1 = p$, $x^2 = q$ называются каноническими, если $\omega = dp \wedge dq$, т.е.

$$\begin{aligned} \Pi \dots &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & \Pi_{12} &= -\Pi_{21} = 1, \\ \Pi^{\dots} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\Pi \dots, & \Pi^{12} &= -\Pi^{21} = -1, \end{aligned}$$

и, значит, для канонических координат

$$\{x^1, x^2\} = \Pi^{12} = \{p, q\} = -1.$$

Система уравнений Гамильтона – (гамильтоново) векторное поле на M – в канонических координатах имеет вид

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial}{\partial p} H, \\ \dot{p} = -\frac{\partial}{\partial q} H, \end{cases} \quad (18)$$

где H – функция на M (гамильтониан). Система (18) может быть записана по-разному:

а) *симплектическая формулировка*:

как условие того, что направление $dp : dq : dt$ в расширенном фазовом пространстве $M^\Lambda := M \times \Lambda \xrightarrow{\pi_M} M$ является направлением вырождения 2-формы Ω :

$$\Omega = \pi_M^* \omega - dH \wedge dt = dp \wedge dq - dH \wedge dt; \quad (19)$$

б) *пуассонова* формулировка:

векторное поле можно задать, указав, как по его направлению будут дифференцироваться всевозможные скалярные поля (функции).

Гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H дифференцирует по своему направлению произвольную функцию f следующим образом:

$$\dot{f} = -\{H, f\}, \quad (20)$$

именно при таком выборе знака для координатных функций $x^1 = p$, $x^2 = q$ будем иметь каноническую систему (18):

$$\begin{aligned} \dot{q} = \dot{x}^2 &= -\{H, x^2\} = -\Pi^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial x^2}{\partial x^j} = -\Pi^{12} \frac{\partial H}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial p} H, \\ \dot{p} = \dot{x}^1 &= -\{H, x^1\} = -\Pi^{ij} \frac{\partial H}{\partial x^i} \frac{\partial x^1}{\partial x^j} = -\Pi^{21} \frac{\partial H}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial q} H. \end{aligned}$$

Немного усложним ситуацию. Пусть теперь матрица Π^{ij} необратима, M – пуассоново, но не симплектическое многообразие; тогда форма ω из (19) не может быть задана с помощью элементов обратной матрицы Π_{ij} (она не существует), но (20) тем не менее имеет смысл и задает гамильтоново векторное поле.

В этом случае имеется набор нетривиальных функций (Казимира), скобка Пуассона с которыми равна нулю всегда (следствие необратимости Π^{ij}). Интегральные линии поля (20) в этом случае лежат на поверхностях уровня функций Казимира.

Опять изменим ситуацию. Пусть снова M симплектическое (и пуассоново), но теперь имеется не одно время “ t ”, а несколько “времен” – переменных $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, являющихся координатными функциями на многообразии Λ . Пусть зависимость от них задается гамильтонианами $H_0, H_1, \dots, H_n$, зависящими как от времен λ_i , так и от координат на M . Нам требуются новые понятия; введем их, следуя [15], [1].

Слоением (k -мерным) какого-либо N -мерного многообразия M^Λ называется такая совокупность k -мерных поверхностей (слоев слоения) $\mathcal{F}_\chi \subset M^\Lambda$, что через каждую точку многообразия M^Λ проходит одна и только одна гладкая k -мерная поверхность $\mathcal{F}_\chi$, гладко зависящая от точки многообразия:

$$M^\Lambda = \coprod_{\chi} \mathcal{F}_\chi,$$

значок χ нумерует слои.

Распределением (k -мерным) называется гладкое поле k -мерных касательных направлений, т. е. функция, ставящая в соответствие каждой точке $x \in M^\Lambda$ k -мерное подпространство $\mathcal{L}(x)$ касательного пространства $T_x M^\Lambda \supset \mathcal{L}(x)$.

Распределение называется интегрируемым, если имеется слоение, касательные $\mathcal{L}$ к слоям $\mathcal{F}_\chi$ которого ($\mathcal{L}$ – линейные подмногообразия TM^Λ размерности $\dim \mathcal{L} = \dim \mathcal{F}_\chi = k$) образуют это распределение.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2. Обозначать распределения будем строчной буквой в квадратных скобках – $[h]$.

В предыдущем, одномерном, случае слои $\mathcal{F}_\chi$ – это интегральные линии гамильтонова поля – решения

$$\bigcup_t (p(t), q(t), t) \subset M^\Lambda;$$

(одномерные) подпространства $\mathcal{L}(x)$ – это прямые, задаваемые уравнениями Гамильтона, т. е.

$$(dp : dq : dt) = (-\{H, p\}, -\{H, q\}, 1).$$

Одномерное распределение всегда интегрируемо.

Пусть $M^\Lambda = M \times \Lambda$ – расширенное фазовое пространство гамильтоновой системы с фазовым пространством M и $(n+1)$ -мерным $\Lambda \ni (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ – пространством “времен”.

Распределение $[h]$ в M^Λ может быть задано 1-формой $h \in T^*M^\Lambda$ вида

$$h = \sum_{j=0}^n H_j d\lambda_j.$$

Пусть M – симплектическое многообразие с формой $\omega \in \bigwedge^2 T^*M$. Плоскости $((n+1)$ -мерные) распределения $[h]$ могут быть заданы аналогично формуле (19) – как подпространства, на которых форма Ω ,

$$\Omega = \pi_M^* \omega - dh = \pi_M^* \omega - \sum_{j=0}^n dH_j \wedge d\lambda_j, \quad (21)$$

вырождена, т. е.

$$\vec{\xi}_h \in [h] \Leftrightarrow \Omega(\vec{\xi}, \vec{\xi}_h) = 0 \quad \forall \vec{\xi} \in TM^\Lambda.$$

Распределения, заданные гамильтонианами H_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $n > 0$, интегрируемы (задают слоение) тогда и только тогда, когда потоки, задаваемые разными H_k , коммутируют. Это происходит, когда H_k удовлетворяют соотношениям (уравнениям нулевой кривизны):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i - \frac{\partial}{\partial \lambda_i} H_j + \{H_i, H_j\}, f \right\} = 0 \quad \forall f, \quad (22)$$

т. е. $(H_i)_{\lambda_j} - (H_j)_{\lambda_i} + \{H_i, H_j\}$ – функция Казимира, например, нуль.

3.2. Скобка Ли–Пуассона. Важнейшим примером пространств, обладающих пуассоновой структурой, являются пространства, двойственные к какой-нибудь алгебре Ли. Сначала скобка определяется на линейных функциях (на этих двойственных пространствах), а уж потом, по линейности и правилу Лейбница, распространяется и на всевозможные функции.

Продемонстрируем, как эта схема действует в случае алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Мы апеллируем к геометрической интуиции и изоморфизму алгебр Ли $\mathfrak{su}(2) \simeq (\mathbb{R}^3, [\cdot, \cdot])$, позволяющему рассматривать $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \supset \mathfrak{su}(2)$ как комплексификацию алгебры Ли вещественных трехмерных векторов с коммутатором – векторным произведением $[\cdot, \cdot]$. Будем называть элементы $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ векторами, а элементы $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$, т. е. линейные функции на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, – ковекторами.

Кроме коммутатора – “векторного произведения”, на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ определено и скалярное произведение (Киллинга):

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr } AB.$$

Пользуясь тем, что оно невырождено – только нулевой вектор ортогонален всему пространству:

$$\langle \sigma, A \rangle = 0 \quad \forall A \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0,$$

можно отождествить $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$. Линейный изоморфизм между ними строится так: вектору $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ставится в соответствие ковектор $|A\rangle \in \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$ скалярного умножения на этот A :

$|A\rangle$ – линейное отображение $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, которое каждому $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ставит в соответствие $\langle B, A \rangle \in \mathbb{C}$; изоморфность следует из невырожденности $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Элементы второго сопряженного пространства $\mathfrak{sl}^{**}(2, \mathbb{C})$ – это линейные функции на $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$ – элементы самого $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}^{**}(2, \mathbb{C})$:

$A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, как элемент $\mathfrak{sl}^{**}(2, \mathbb{C})$, является функцией на $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$, которая каждому $\tilde{A} \in \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$ – функционалу $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ – ставит в соответствие число – значение этого функционала на A :

$$A \in \mathfrak{sl}^{**}(2, \mathbb{C}): \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C}) \ni \tilde{A} \mapsto \tilde{A}(A) \in \mathbb{C}.$$

Типичный пример линейной функции на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (элемента $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$) – это какой-нибудь матричный элемент A_{ij} ; соответственно линейная функция на $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$ – это матричный элемент A_{ij} ковектора $|A\rangle$. Какие элементы $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ соответствуют A_{11} , A_{12} , A_{21} при отождествлении $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}^{**}(2, \mathbb{C})$?

Обозначим

$$\sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (23)$$

очевидно, что³

$$A_{11} = \left\langle A, \frac{\sigma_3}{2} \right\rangle, \quad A_{12} = \langle A, \sigma_- \rangle, \quad A_{21} = \langle A, \sigma_+ \rangle. \quad (24)$$

Функция на $\mathfrak{sl}^*$ – это элемент $\mathfrak{sl}$ – на нем вычисляются значения функционалов из $\mathfrak{sl}^*$. По определению, скобка Ли–Пуассона между (линейными) функциями $f_1, f_2 \in (\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C}))^*$ на $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$ полагается равной их коммутатору:

$$\{f_1, f_2\}_{\text{LP}} = f_3 \quad \Leftrightarrow \quad F_3 = [F_1, F_2],$$

если

$$\mathfrak{sl}^{**}(2, \mathbb{C}) \ni f_i \quad \leftrightarrow \quad F_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

³Этим объясняется выбор в этой статье базиса $\sigma_3, \sigma_{\pm}$ в качестве стандартного – эти векторы сопряжены матричным элементам.

Таким образом, $\{A_{11}, A_{12}\}_{\text{LP}}$ – это матричный элемент ковектора, соответствующий коммутатору $\frac{\sigma_3}{2}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\left[\frac{\sigma_3}{2}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow A_{12}$, то

$$\{A_{11}, A_{12}\}_{\text{LP}} = -A_{12}.$$

Аналогично,

$$\{A_{11}, A_{21}\}_{\text{LP}} = A_{21}, \quad \{A_{21}, A_{12}\}_{\text{LP}} = 2A_{11}.$$

Одной формулой все эти равенства записываются так:

$$\{A_{ij}, A_{kl}\}_{\text{LP}} = -A_{il}\delta_{jk} + A_{kj}\delta_{li}. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из общей теории следует (см. [32], [33]), что симплектическим пространством является орбита $\mathcal{O}$ какого-нибудь элемента сопряженного этой алгебре Ли пространства; орбита, заметаемая этим элементом при коприсоединенном действии на него самой группы.

Скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{O}}$, канонически соответствующая этой симплектической структуре, согласована со скобкой Ли–Пуассона объемлющего пространства (сопряженного алгебре Ли) следующим образом.

Пусть f и g – функции на сопряженном алгебре (объемлющем) пространстве, а $f_{\mathcal{O}}$ и $g_{\mathcal{O}}$ – их сужения на орбиту $\mathcal{O}$. Тогда значение $\{f, g\}_{\text{LP}}$ в точках орбиты, т.е. сужение $\{f, g\}_{\text{LP}}|_{\mathcal{O}}$, совпадает со значением скобки $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{O}}$, вычисленной на $f_{\mathcal{O}}$ и $g_{\mathcal{O}}$:

$$\{f_{\mathcal{O}}, g_{\mathcal{O}}\}_{\mathcal{O}} = \{f, g\}_{\text{LP}}|_{\mathcal{O}}.$$

Не будем далее писать индексы “LP” и “ $\mathcal{O}$ ” у скобок, подразумевая сужение функций на соответствующие подмногообразия (орбиты), где значения этих скобок совпадают.

В нашем случае $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ легко видеть, что

$$\{A_{11}, \log A_{12}\} = \{A_{22}, \log A_{21}\} = -1, \quad (26)$$

следовательно, и на орбите $\mathcal{O}$ канонически-сопряженными будут пары переменных $(A_{11}, \log A_{12})$, а также $(A_{22} = -A_{11}, \log A_{21})$.

Для *овеществленного* случая $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\text{SU}(2) \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ эти утверждения имеют прозрачную геометрическую иллюстрацию.

Относительно введенного на $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ортонормированным является базис $i\sigma_k/2$, где σ_k , $k = 1, 2, 3$, – матрицы Паули.

Возьмем какой-нибудь элемент сопряженного пространства квадрата длины R^2 , например $|Ri\sigma_3/2\rangle$, и подействуем на него всевозможными элементами $\text{SU}(2) \sim \text{SO}(3)$, т.е. вращениями. Получится сфера, которую, как известно, можно параметризовать двумя углами – широтой $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и долготой $\varphi \in [0, 2\pi[$:

$$A = i\frac{R}{2} \begin{pmatrix} \sin \theta & e^{i\varphi} \cos \theta \\ e^{-i\varphi} \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2), \quad |A\rangle \in \mathfrak{su}^*(2).$$

Как мы видели, согласно общей теории, канонические координаты – это $p = A_{11}$ и $q = \log A_{12}$:

$$dp \wedge dq = i \frac{R}{2} \cos \theta d\theta \wedge (d \log \cos \theta + i d\varphi) = \frac{R}{2} \cos \theta d\varphi \wedge d\theta,$$

т. е. знакомый элемент площади сферы (с постоянным множителем $R/2$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Здесь уместно было бы сослаться на Архимеда. По-видимому, он был первым, кто открыл совпадение (форм) площади сферы и описанного вокруг нее цилиндра.

Действительно, пусть координата вдоль образующей есть $z = R \sin \theta$, угловая координата на направляющей окружности есть φ ; Архимед нашел, что

$$d\varphi \wedge dz = R \cos \theta d\varphi \wedge d\theta.$$

На орбите

$$dA_{11} = \left(i \frac{R}{2} \right) d \sin \theta, \quad d \log A_{12} = i d\varphi + d \text{ “функция } \theta \text{”},$$

значит,

$$2 dA_{11} \wedge d \log A_{12} = d\varphi \wedge dz = R \cos \theta d\varphi \wedge d\theta.$$

Таким образом, в привычном нам случае $\mathbb{R}^3$ иллюстрируемое общее утверждение о *симплектичности орбиты коприсоединенного представления алгебры Ли* является утверждением, что *сфера с 2-формой площади, наследованной из объемлющего $\mathbb{R}^3$, является симплектическим пространством.*

3.3. Пуассонова структура системы Шлезингера. Рассмотрим теперь $n + 1$ экземпляров пространства $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и их декартово произведение $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1}$. Очевидно, что это пуассоново пространство со скобкой

$$\{A_{ij}^{(m_1)}, A_{kl}^{(m_2)}\} = \delta_{m_1 m_2} (\delta_{il} A_{kj}^{(m_1)} - \delta_{jk} A_{il}^{(m_1)}) \quad (27)$$

– нулевой между различными декартовыми сомножителями и скобкой Ли–Пуассона внутри одного экземпляра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим теперь $a_{ik} := \langle A^{(i)}, A^{(k)} \rangle$ – это функция на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1}$; вычислим скобку между матричными элементами $A_{st}^{(r)}$ какой-нибудь $A^{(r)} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и a_{ik} .

Во-первых, очевидно, что если $i \neq r \neq k$, то $\{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\} = 0$. Если $i = k$, то $a_{kk} = \text{const}$ и $\{a_{kk}, A_{st}^{(r)}\} = 0$, так что единственный нетривиальный случай – это

$$\begin{aligned} \{a_{ir}, A_{st}^{(r)}\} &= \sum_{m_1, m_2} \{A_{m_1 m_2}^{(i)} A_{m_2 m_1}^{(r)}, A_{st}^{(r)}\} \\ &= \sum_{m_1, m_2} A_{m_1 m_2}^{(i)} (\delta_{m_2 t} A_{s m_1}^{(r)} - \delta_{s m_1} A_{m_2 t}^{(r)}) \\ &= \sum_{m_1, m_2} (A_{s m_1}^{(r)} A_{m_1 t}^{(i)} - A_{s m_2}^{(i)} A_{m_2 t}^{(r)}) = ([A^{(r)}, A^{(i)}])_{st}. \end{aligned} \quad (28)$$

Впоследствии нам потребуются также скобки

$$\{a_{ij}, a_{kl}\} = \{\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle, \langle A^{(k)}, A^{(l)} \rangle\},$$

вычислим заодно и их.

Если среди индексов i, j, k, l нет совпадающих, то $\{a_{ij}, a_{kl}\} = 0$, так как отличны от нуля только скобки Пуассона матричных элементов из одного декартова сомножителя $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Кроме того, легко проверить, что $\{a_{ij}, a_{kk}\} = 0$ для любых i, j, k , потому что $a_{kk}/2$ это квадрат собственного значения $A^{(k)}$ – функция Казимира скобки Ли–Пуассона, что следует из формулы (25):

$$\{A_{ij}, A_{12}A_{21} + A_{11}^2\} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

Из косой симметрии $\{\cdot, \cdot\}$ вытекает, что $\{a_{ij}, a_{ij}\} = 0$ для любых i, j ; остается случай

$$\{a_{ik}, a_{jk}\}, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

В силу равенства (28)

$$\{A_{em}^{(k)}, \langle A^{(k)}, A^{(j)} \rangle\} = -([A^{(k)}, A^{(j)}])_{em},$$

поэтому если i не совпадает ни с j , ни с k , то

$$\begin{aligned} \{a_{ik}, a_{kj}\} &= \sum_{e,m} A_{em}^{(i)} \{A_{em}^{(k)}, \langle A^{(k)}, A^{(j)} \rangle\} \\ &= -\langle A^{(i)}, [A^{(k)}, A^{(j)}] \rangle. \end{aligned}$$

Теперь, благодаря косой симметрии смешанного произведения $\langle [A, B], C \rangle$, можно снять ограничения на несовпадение индексов – в обеих частях будет нуль, так что всегда

$$\{a_{ik}, a_{kj}\} = \langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle =: f_{ijk}, \quad (29)$$

т. е. скобки от попарных скалярных произведений трех векторов антисимметричны относительно перестановки пары из этих векторов и не меняются при циклической перестановке.

Обозначим теперь

$$h := \sum_{i < j} a_{ij} d \log(\lambda_i - \lambda_j) =: \sum_{k=0}^n H_k d\lambda_k,$$

т. е.

$$H_k := \sum_{i \neq k} \frac{a_{ik}}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

Уравнения Гамильтона, соответствующие гамильтониану H_k в пространстве, снабженном скобкой Ли–Пуассона (27), будут такие (по индексам “ r ” и “ k ” в этих формулах суммирования нет!):

$$\frac{dA_{st}^{(r)}}{d\lambda_k} = -\{H_k, A_{st}^{(r)}\} = \sum_{i \neq k} \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_i} \{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\}.$$

Если $k \neq r$, то

$$\frac{dA_{st}^{(r)}}{d\lambda_k} = \sum_{i \neq k} \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_i} \{a_{ik}, A_{st}^{(r)}\} = \frac{-1}{\lambda_k - \lambda_r} \{a_{kr}, A_{st}^{(r)}\} = \frac{([A^{(k)}, A^{(r)}])_{st}}{\lambda_k - \lambda_r},$$

если же $k = r$, то

$$\frac{dA_{st}^{(r)}}{d\lambda_r} = \sum_{i \neq r} \frac{1}{\lambda_r - \lambda_i} \{a_{ir}, A_{st}^{(r)}\} = - \sum_{i \neq r} \frac{([A^{(r)}, A^{(i)}])_{st}}{\lambda_r - \lambda_i},$$

это совпадает с (15) – системой уравнений Шлезингера.

Мы доказали, что для любого $k \in 0, 1, \dots, n$ линия, являющаяся решением уравнений Шлезингера, совпадает с траекторией гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H_k = h(\partial_{\lambda_k}) = \sum_{i \neq k} \frac{a_{ik}}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

Вычислим $\{H_i, H_j\}$:

$$\begin{aligned} \{H_i, H_j\} &= \sum_{m_1, m_2} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{m_1}} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_{m_2}} \{a_{im_1}, a_{jm_2}\} \\ &= \sum_m \left(\frac{1}{\lambda_i - \lambda_m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_m} \{a_{im}, a_{mj}\} + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_m} \{a_{ij}, a_{jm}\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda_i - \lambda_m} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \{a_{im}, a_{ji}\} \right) \\ &= \sum_m \left(\frac{f_{ijm}}{(\lambda_m - \lambda_i)(\lambda_m - \lambda_j)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{imj}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_m)} + \frac{f_{mji}}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_m)} \right) \\ &= \sum_m \frac{f_{ijm}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_m)(\lambda_j - \lambda_m)} (\lambda_i - \lambda_j - (\lambda_i - \lambda_m) + \lambda_j - \lambda_m) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} H_j = \frac{\partial}{\partial \lambda_j} H_i = \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} a_{ij} \log(\lambda_i - \lambda_j),$$

условия интегрируемости (22) выполнены. Распределение, задаваемое формой

$$h = \sum_{i < j} \langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle d \log(\lambda_i - \lambda_j),$$

является интегрируемым и совпадает с распределением, задаваемым системой уравнений Шлезингера.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. На некотором подмногообразии пуассонова (скобка (27)) пространства $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1}$ система Шлезингера (15) задает слоение, определяемое там формой

$$h = \sum_{i < j} a_{ij} d \log(\lambda_i - \lambda_j).$$

4. Построение многообразия $M_{a,\bar{a}}$ – фазового пространства гамильтоновой системы Гарнье–Пенлеве VI

4.1. Орбиты коприсоединенного представления $SL(2, \mathbb{C})$. Результаты этого пункта – элементарные следствия явной формулы $\omega = dA_{11} \wedge d \log A_{12}$ для симплектической формы на орбите $SL(2, \mathbb{C})$ (см. замечание 8 на с. 74).

Рассмотрим произвольный *ненулевой* ковектор $\langle A | \in \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$ и симплектическое пространство $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{O} := \bigcup_{g \in SL(2, \mathbb{C})} \langle g^{-1} A g | \subset \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C}),$$

замечаемое этим ковектором при действии на него $SL(2, \mathbb{C})$.

Если A_1 и A_2 – какие-нибудь ненулевые векторы из $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, то их можно совместить элементом $g \in SL(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда совпадают их “квадраты длин” – произведения на себя:

$$\forall A_i \neq 0 \exists g \in SL(2, \mathbb{C}) : g^{-1} A_1 g = A_2 \Leftrightarrow \langle A_1, A_1 \rangle = \langle A_2, A_2 \rangle,$$

следовательно, пространство $\mathcal{O}$ характеризуется единственным параметром – комплексным числом $R^2 := \langle A, A \rangle \in \mathbb{C}$, так это пространство и будем обозначать – $\mathcal{O}_{R^2}$.

Пусть сначала $\langle A, A \rangle = R^2 \neq 0$, тогда $\mathcal{O}_{R^2}$ представляет собой множество всевозможных комплексных матриц с фиксированным определителем $-R^2/2$. Такие матрицы находятся во взаимнооднозначном соответствии с точками аффинной квадрики – гладкой алгебраической поверхности

$$X_1 X_2 + X_3^2 = \frac{R^2}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_{R^2}. \quad (30)$$

Симплектическая форма в координатах X_i задается равенствами

$$\begin{aligned} \omega_{R^2} &= dX_3 \wedge d \log X_1 = -dX_3 \wedge d \log X_2 \\ &= d \frac{\sqrt{R^2/2} + X_3}{X_1} \wedge dX_1 = d \frac{\sqrt{R^2/2} - X_3}{X_2} \wedge dX_2 \\ &= d \frac{X_2}{\sqrt{R^2/2} - X_3} \wedge dX_1 = d \frac{X_1}{\sqrt{R^2/2} + X_3} \wedge dX_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Эти равенства имеют место, поскольку

$$X_1 X_2 = \left(\sqrt{\frac{R^2}{2}} - X_3 \right) \left(\sqrt{\frac{R^2}{2}} + X_3 \right).$$

Кроме того, так как $R^2 \neq 0$, то всегда хотя бы одно из чисел $\sqrt{R^2/2} + X_3$ или $\sqrt{R^2/2} - X_3$ отлично от нуля, и соответствующее равенство задает там форму ω_{R^2} .

Мы видели, что в вещественном случае форма ω_{R^2} с точностью до множителя $R/2$ совпадает с формой площади, индуцированной на квадрике

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = z$$

объемлющим пространством $\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z)$.

Рассмотрим теперь случай $R^2 = 0$. Все вышесказанное относится и к этому случаю, за тем исключением, что нулевая матрица $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ не принадлежит орбите ненулевого элемента $\langle A | \neq 0$, $\det A = 0$, так что из конуса $X_1 X_2 + X_3^2 = 0$ нужно выкинуть одну точку – вершину $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Симплектическое пространство $\mathcal{O}_0$ представляет собой *гладкую часть* квадрики $X_1 X_2 + X_3^2 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Форма ω_0 в вещественном случае представляет собой форму площади не конуса, а цилиндра.

Действительно, снова введем вещественные (x, y, z) :

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad X_1 = x + iy, \quad X_2 = x - iy, \quad X_3 = iz,$$

и цилиндрические координаты (ρ, φ, z) :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad X_1 = x + iy = \rho e^{i\varphi}.$$

Уравнение конуса будет $\rho = z$, так что форма

$$\omega_0 = dX_3 \wedge d \log X_1 = d(iz) \wedge d(\log z + i\varphi) = -dz \wedge d\varphi$$

совпадает с формой площади цилиндра единичного радиуса.

Переменная z не принимает значения $z = 0$, которое соответствует вершине конуса, отсутствующей в орбите $\mathcal{O}_0$, однако из приведенных геометрических соображений видно, что если вместо одной точки – вершины “вклеить” окружность – сечение цилиндра плоскостью $z = 0$, то получившееся многообразие останется симплектическим, т. е. форма ω_0 будет гладкой, всюду отличной от нуля (формой площади всего цилиндра).

На неформальном языке такая вклейка означает допущение к рассмотрению линий

$$A(t) = \begin{pmatrix} X_3(t) & X_1(t) \\ X_2(t) & -X_3(t) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

проходящих через нуль, т. е. через $X_1(0) = X_2(0) = X_3(0) = 0$, но линии, имеющие разный предел $X_1 : X_2 : X_3$, в этой точке не будут пересекаться, они будут проходить через разные точки вклеенной “окружности” – проективной прямой $\mathbb{CP}^1$ в комплексном случае, или, иными словами, через разные точки проективизации орбиты $\mathcal{O}_0$.

Обозначим $\mathbf{P} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ проективизацию $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \setminus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Элементы $\mathbf{P} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (времененно) будем обозначать заглавными буквами с волной:

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ то } \tilde{A} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{P} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

где $x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3 \in \mathbb{CP}^2$.

Обозначим через $\mathbf{P} \mathcal{O}_{R^2}$ проективизацию орбиты какого-нибудь ненулевого $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; число $\langle A, A \rangle = R^2$ параметризует эти многообразия. Если $R^2 \neq 0$,

то $\mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}$ двумерно; если $R^2 = 0$, то $\mathbf{P}\mathcal{O}_0$ одномерно, изоморфно квадрике на $\mathbb{CP}^2$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{P}\mathcal{O}_0 \Leftrightarrow x_1x_2 + x_3^2 = 0, \quad x_1 : x_2 : x_3 \in \mathbb{CP}^2,$$

а также изоморфно $\mathbb{CP}^1 \ni x_1 : x_3 = -x_3 : x_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (геометрическое). Зададим симплектическое многообразие $(\mathcal{C}_{R^2}, \omega_{R^2})$ как пару, где $\mathcal{C}_{R^2}$ – подмногообразие $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}$, определяемое уравнениями

$$\left(\begin{pmatrix} X_3 & X_1 \\ X_2 & -X_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{C}_{R^2} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1X_2 + X_3^2 = \frac{R^2}{2} \\ \exists x_0 \in \mathbb{C} : X_i = x_0x_i \end{cases},$$

а форма ω_{R^2} имеет вид

$$\begin{aligned} \omega_{R^2} &= dX_3 \wedge d \log X_1 = -dX_3 \wedge d \log X_2 \\ &= d(x_3 : x_1) \wedge dX_1 = -d(x_3 : x_2) \wedge dX_2. \end{aligned}$$

Мы видим, что если $(X, \tilde{Y}) \in \mathcal{C}_{R^2}$ и $X \neq 0$, то вторая – проективная часть $\tilde{Y}$ не нужна, она восстанавливается по первой части X . При $R^2 \neq 0$ все $\mathcal{C}_{R^2}$ изоморфно орбите $\mathcal{O}_{R^2}$ – гладкой квадрике, в определении 1 при $R^2 \neq 0$ проективная часть оставлена для единообразия, чтобы не давать двух разных определений – для $R^2 \neq 0$ и $R^2 = 0$.

Пусть теперь $R^2 = 0$. Обозначим через π_c образ проекции $\mathcal{C}_{R^2}$ на первый декартов сомножитель (при $R^2 = 0$ это конус).

Прообраз нуля $\pi_c^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – гладкое подмногообразие в $\mathcal{C}_0 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_0$, изоморфное многообразию $\mathbf{P}\mathcal{O}_0$ – сфере Римана. Пару голоморфных координат, как мы знаем, можно выбрать так:

$$\begin{aligned} p, \quad p^* &= \frac{1}{p}, \quad \text{где } p = x_3 : x_1, \quad p^* = -x_3 : x_2, \\ \pi_c^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \bigcup_{x_1 : x_2 : x_3} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Все многообразие $\mathcal{C}_0$ можно покрыть двумя картами U и U^* , каждая из которых симплектически изоморфна $(\mathbb{C}^2, dp \wedge dq)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображения $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow U \subset \mathcal{C}_0$ и $\varphi^* : \mathbb{C}^2 \rightarrow U^* \subset \mathcal{C}_0$ так:

$$\begin{aligned} \varphi : (p, q) &\mapsto \left(\begin{pmatrix} pq & q \\ -p^2q & -pq \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix} \right) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_0, \\ \varphi^* : (p^*, q^*) &\mapsto \left(\begin{pmatrix} -p^*q^* & -p^{*2}q^* \\ q^* & p^*q^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p^* & -p^{*2} \\ 1 & p^* \end{pmatrix} \right) \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \times \mathbf{P}\mathcal{O}_{R^2}. \end{aligned}$$

Если $pp^* \neq 0$, то определены функции склейки $p^* = 1/p$, $q^* = -p^2q$. Очевидно, что $dp \wedge dq = dp^* \wedge dq^*$, так что многообразие $U \cup U^* = \mathcal{C}_0$, где

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{p,q} \left(\begin{pmatrix} pq & q \\ -p^2q & -pq \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 \\ p^2 & -p \end{pmatrix} \right), \\ U^* &= \bigcup_{p^*,q^*} \left(\begin{pmatrix} -p^*q^* & -p^{*2}q^* \\ q^* & p^*q^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -p^* & -p^{*2} \\ 1 & p^* \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

является симплектическим. Вне проективной прямой $(q = 0, p \in \mathbb{C}) \cup (q^* = 0, p^* \in \mathbb{C})$ многообразие $\mathcal{C}_0$ изоморфно орбите какого-нибудь изотропного ненулевого элемента, например σ_+ . Добавленная проективная прямая – *раздутие* вершины конуса; мы будем называть ее *раздутым* дивизором.

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ действует и на проективизации орбиты $\mathcal{O}_0$; в частности, на *раздутом* дивизоре она действует как группа дробно-линейных преобразований.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Такими же картами U, U^* можно покрыть и невырожденную квадрику $\mathcal{C}_{R^2}$, $R^2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} pq + \sqrt{R^2/2} & q \\ -p(pq + 2\sqrt{R^2/2}) & -(pq + \sqrt{R^2/2}) \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} -(p^*q^* + \sqrt{R^2/2}) & -p^*(p^*q^* + 2\sqrt{R^2/2}) \\ q^* & p^*q^* + \sqrt{R^2/2} \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

что позволяет дать определение $\mathcal{C}_{R^2}$ как абстрактного многообразия, покрытого двумя картами – $U \ni (p, q)$ и $U^* \ni (p^*, q^*)$ (так обычно и делается, см. [8]):

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (абстрактное). Зададим симплектическое многообразие $(\mathcal{C}_{R^2}, \omega_{R^2})$ атласом, состоящим из двух карт $\mathbb{C}^2$ с координатами (p, q) и (p^*, q^*) , функциями переклейки $p^* = 1/p$, $q^* = -p(pq + 2\sqrt{R^2/2})$ и симплектической формой $\omega_{R^2} = dp \wedge dq = dp^* \wedge dq^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Хотя в определении и участвует корень $\sqrt{R^2/2}$, результат склейки от выбора знака корня не зависит – многообразия, построенные по $+\sqrt{R^2/2}$ и $-\sqrt{R^2/2}$, изоморфны, это квадрика (30).

Далее многообразие $\mathcal{C}_{R^2}$ мы будем называть просто *квадрикой* (аффинной), *подразумеваемая* оговорка, что при $R^2 = 0$ вершина конуса раздута указанным выше образом.

4.2. Гамильтонова (симплектическая) редукция. Гладкие симплектические многообразия $\mathcal{C}_{R^2}$ играют важнейшую роль в наших построениях, именно из них мы будем строить фазовое пространство гамильтоновой системы уравнений изомонодромных деформаций (1), которая при $n = 3$ является системой Пенлеве VI.

Рассмотрим декартово произведение $n + 1$ экземпляра $(\mathcal{C}_{a_{ii}}, \omega_{a_{ii}})$, где

$$a_{ii} = \langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle = -2 \det A^{(i)} \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

– параметры нашей задачи (изомонодромной деформации уравнения (1)).

Прежде чем специальным образом обозначить это пространство, вспомним об оговорке, сделанной во введении (с. 59) – исключим одновременно-треугольные наборы $\Delta_{a_{i\bar{i}}}$; обозначим

$$\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} := (\mathcal{C}_{a_{00}} \times \mathcal{C}_{a_{11}} \times \cdots \times \mathcal{C}_{a_{nn}}) \setminus \Delta_{a_{i\bar{i}}}.$$

Пространство $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ – симплектическое (как декартово произведение симплектических пространств), с формой

$$\tilde{\omega} := \sum_{k=0}^n \omega_{a_{kk}} = \sum_{k=0}^n dA_{11}^{(k)} \wedge d \log A_{12}^{(k)}. \quad (33)$$

Выделим в $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ подмногообразие $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$:

$$\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} := \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \cap \left\{ \sum_{k=0}^n A^{(k)} = 0 \right\},$$

состоящее только из тех наборов матриц $A^{(k)}$, для которых $\sum A^{(k)} = 0$. Обозначим отображение включения через $\tilde{\pi}: \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \hookrightarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$. Ограничение формы $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ обозначим $\tilde{\omega} := \tilde{\pi}^* \tilde{\omega}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Многообразие $(\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}, \tilde{\omega})$ не симплектическое, хотя бы потому, что оно нечетномерно – на координаты четномерного (симплектического) многообразия $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ мы наложили три связи, потребовав равенства нулю трех компонент вектора $\sum A^{(k)}$.

Форма $\tilde{\omega}$, конечно, остается несингулярной и замкнутой, но иногда она обращается в нуль – те векторы из $T_{A^{(i)}} \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$, на которых $\tilde{\omega}$ была отлична от нуля, не принадлежат уже $T_{A^{(i)}} \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \subset T_{A^{(i)}} \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$.

На $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ и $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ покомпонентно действует группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Для $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ положим

$$g(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}) := (A_g^{(0)}, \dots, A_g^{(n)}),$$

где $A_g^{(i)} := g^{-1} A^{(i)} g$, – такое действие называется *диагональным*.

Нашей целью является факторизация $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ по этому действию:

$$M_{a_{i\bar{i}}} := \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} / \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (34)$$

что соответствует отождествлению всевозможных $\Psi(P; P_0, \dots, P_n)$, связанных калибровочными преобразованиями $\Psi(P; P_k) \sim \Phi(P_k) \Psi(P; P_k)$.

Факторизация многообразия, обладающего дополнительной структурой, по действию группы Ли – задача непростая (см. [32; добавление 5], [33], [34] и цитированную там литературу). Мы не будем излагать общую теорию, для этого нужно вводить слишком много не нужных в дальнейшем понятий, а приведем независимые доказательства всех утверждений – реализуем схему *гамильтоновой (пуассоновой) редукции* явно – дадим содержательную иллюстрацию общей теории.

Сначала докажем, что $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$, множество орбит действия $SL(2, \mathbb{C})$ на $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$, действительно является многообразием. Дадим несколько вспомогательных определений.

Для любого набора элементов $s_1, \dots, s_N$ назовем *расширенным* набор, содержащий как эти элементы, так и всевозможные их коммутаторы: $s_{\bar{k}}, s_{\bar{i}\bar{j}}$, здесь $s_{ij} := [s_i, s_j]$. Назовем *матрицей Грама набора* матрицу всевозможных скалярных произведений векторов этого набора.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Любые два набора $s_1, \dots, s_N$ и $s'_1, \dots, s'_N$, расширенные наборы которых полны (содержат базис $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$), можно совместить преобразованием из $SL(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда совпадают матрицы Грама их расширенных наборов, т. е.*

$$\langle s_i, s_j \rangle = \langle s'_i, s'_j \rangle, \quad \langle [s_i, s_j], s_k \rangle = \langle [s'_i, s'_j], s'_k \rangle \quad \forall i, j, k.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Наборы векторов, которые ни сами, ни дополненные коммутаторами не содержат базиса, могут быть *приведены к одинаково-треугольному виду* (например, верхнетреугольному), и именно эти наборы мы исключили из рассмотрения.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Квадрат смешанного произведения (ориентированного объема)

$$\langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle^2$$

является многочленом от попарных произведений $\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle$ – элементов матрицы Грама (см. формулу (47) ниже):

$$f_{ijk}^2 = \langle [A^{(i)}, A^{(j)}], A^{(k)} \rangle^2 = -2 \det \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad (35)$$

так что само значение f_{ijk} является только носителем знака – ориентации набора $A^{(i)}, A^{(j)}, A^{(k)}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Векторы $A, B, [A, B]$ образуют базис в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\langle [A, B], [A, B] \rangle \neq 0$, т. е. $[A, B]$ не изотропен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Величина $\langle [A, B], C \rangle$ – ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах A, B и C , равна нулю тогда и только тогда, когда A, B и C линейно зависимы. В нашем случае $C = [A, B]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Линейная зависимость тройки $A, B, [A, B]$ эквивалентна тому, что существует изотропный вектор, ортогональный как A , так и B , или, что то же, тому, что через A и B проходит изотропная плоскость.*

Следующий известный факт, ввиду его важности, мы сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Множество $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}} = \tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}/SL(2, \mathbb{C})$ является алгебраическим многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала все векторы $A^{(i)}$ не равны 0, т. е. ни одна вершина не находится на раздутом дивизоре.

Поскольку величины a_{ij} , f_{ijk} инвариантны относительно действия $SL(2, \mathbb{C})$ на $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$, они в то же время являются функциями и на $M_{a_{i\bar{i}}}$.

Так как все $A^{(i)}$ не лежат на одной изотропной плоскости, то обязательно найдутся не пропорциональные друг другу $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ такие, что проходящая через них плоскость не изотропна. В этом случае $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$, $[A^{(i_1)}, A^{(i_2)}]$ – базис и пока эти векторы линейно независимы, величины $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $f_{i_1 i_2 i}$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, фиксируют весь набор $A^{(i)}$ с точностью до действия $SL(2, \mathbb{C})$.

Величина $f_{i_1 i_2 i}$ с точностью до знака определяется значениями $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $a_{i_1 i_2}$ и параметрами a_{jj} (формула (35)).

Из элементарно-геометрических соображений понятно, что если

- (а) “длины” a_{ii} всех векторов $A^{(i)}$ (включая $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$) фиксированы,
- (б) заданы скалярные произведения $A^{(i)}$ на “базисные векторы $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}$ ”, т. е. $2(n-1)$ величин $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$, $i_1 \neq i \neq i_2$,
- (с) задан “угол” между $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$ – величина $a_{i_1 i_2}$,

то этот набор $2(n-1) + 1$ чисел фиксирует все векторы $A^{(j)}$ с точностью до отражения относительно плоскости, содержащей $A^{(i_1)}$ и $A^{(i_2)}$, т. е. с точностью до аргумента величины $f_{i_1 i_2 j} = \langle [A^{(i_1)}, A^{(i_2)}], A^{(j)} \rangle$ – знака корня из определителя в формуле (35). Добавим $n-1$ величину $f_{i_1 i_2 i}$, $i_1 \neq i \neq i_2$, и $n-1$ уравнение (35) на каждую; получившееся подмногообразие пространства $\mathbb{C}^{3(n-1)+1}$ параметризует наборы векторов $A^{(\bar{i})}$ с фиксированными скалярными произведениями на базисные векторы – задает набор $A^{(\bar{i})}$ с точностью до поворота в пространстве – точку $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}/SL(2, \mathbb{C})$. Чтобы получить точку $M_{a_{i\bar{i}}}$, осталось выделить из них те, у которых сумма всех матриц равна нулю.

Мы доказали, что $M_{a_{i\bar{i}}}$ – алгебраическое многообразие, изоморфное $2(n-2)$ -мерному подмногообразию $M_{a_{i\bar{i}}}^f$, выделяемому в $\mathbb{C}^{3n-2}$ $n+2$ алгебраическими уравнениями

$$\begin{cases} f_{i_1 i_2 i}^2 = -2 \det \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & a_{i_1 i} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & a_{i_2 i} \\ a_{ii_1} & a_{ii_2} & a_{ii} \end{vmatrix}, & i_1 \neq i \neq i_2, \\ \sum_{i=0}^n a_{i_1 i} = 0, & \sum_{i=0}^n a_{i_2 i} = 0, & \sum_{i=0}^n f_{i_1 i_2 i} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Пусть теперь среди $A^{(i)}$ есть нулевые – точки с раздутых дивизоров. Точке $(0, \tilde{A}^{(j_0)})$ с $\mathcal{O}_0$ взаимно однозначно соответствует изотропное направление в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Такие направления параметризуются точками проективной прямой – значением отношений

$$\langle \tilde{A}^{(j_0)}, A^{(i_1)} \rangle : \langle \tilde{A}^{(j_0)}, A^{(i_2)} \rangle : \langle \tilde{A}^{(j_0)}, [A^{(i_1)}, \tilde{A}^{(i_2)}] \rangle$$

при одном условии – $\tilde{A}^{(j_0)}$ должно быть с квадрики $\langle \tilde{A}^{(j_0)}, \tilde{A}^{(i_0)} \rangle = 0$.

На $2(n-2)$ -мерном многообразии коэффициентов $a_{i_1 i}$, $a_{i_2 i}$ ($f_{i_1 i_2 i}^2$ по ним определяется) подмногообразие $a_{i_1 j_0} = a_{i_2 j_0} = 0$ коразмерности 2 (мы зафиксировали две координаты) раздувается до коразмерности 1.

То, что результат будет гладким многообразием, мы увидим в п. 5.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. В случае Пенлеве $n = 3$ уравнения

$$a_{ii} = \text{const}, \quad \sum_{i=0}^n a_{ij} = 0 \quad \forall j \quad (37)$$

легко разрешаются относительно любых двух a_{ij} с единственным общим индексом, например a_{12} и a_{13} :

$$\begin{aligned} -a_{32} &= a_{12} + a_{13} + \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - a_{00}}{2}, \\ a_{0k} &= a_{ij} + \frac{a_{ii} + a_{jj} - a_{00} - a_{kk}}{2}, \end{aligned} \quad (38)$$

все индексы i, j, k различны и отличны от нуля.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. В случае Пенлеве многообразие $M_{a_{i\bar{i}}}$ бирационально изоморфно (а если все $a_{ii} \neq 0$, то и просто изоморфно) алгебраической поверхности $M_{a_{i\bar{i}}}^f$, выделяемой в $\mathbb{C}^4$ пересечением кубики и гиперплоскости:

$$\begin{aligned} f^2 &= -2 \det \begin{vmatrix} a_{11} & x & y \\ x & a_{22} & z \\ y & z & a_{33} \end{vmatrix}, \\ x + y + z &= \frac{a_{00} - a_{11} - a_{22} - a_{33}}{2} = \text{const}, \\ x &= a_{12}, \quad y = a_{13}, \quad z = a_{23}, \quad f = f_{123}. \end{aligned} \quad (39)$$

Если среди параметров имеются равные нулю: $a_{j_0 j_0} = 0$, то $M_{a_{i\bar{i}}}$ изоморфно $M_{a_{i\bar{i}}}^f$ с раздутыми точками, соответствующими $0 = a_{ij_0} = f$ для любого i .

Для завершения построения симплектического многообразия $(M_{a_{i\bar{i}}}, \omega)$ нужно построить форму $\omega \in \bigwedge^2 M_{a_{i\bar{i}}}$:

- доказать, что форма $\tilde{\omega}$ проектируется с $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ на $M_{a_{i\bar{i}}}$, или, иными словами, доказать, что $\tilde{\omega} \in \bigwedge^2 \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ является поднятием некоторой формы ω с $M_{a_{i\bar{i}}}$: $\tilde{\omega} = \tilde{\pi}^* \omega$;
- доказать отсутствие нулей у формы ω , а также ее несингулярность и замкнутость (два последних свойства очевидны, так как $\tilde{\omega}$ замкнута и несингулярна).

Пусть на многообразии M с координатами x^i действует группа Ли G . Обозначим $A \rightarrow A_g$, $A \in M$, $g \in G$, действие группы на точки многообразия, x_g^i — действие элемента группы $g \in G$ на координатные функции:

$$x_g^i = x_g^i(A) := x^i(A_g).$$

Пусть w_{ij} — коэффициенты разложения какой-нибудь 2-формы $\tilde{\omega}$ по базисным формам $dx^i \wedge dx^j$.

ЛЕММА 1. Если форма $\tilde{\omega} = \sum_{i,j} w_{ij} dx^i \wedge dx^j$ обладает свойством

$$\sum_{i,j} w_{ij}(A_{g(t)}) dx_{g(t)}^i \wedge dx_{g(t)}^j = \sum_{i,j} w_{ij}(A) dx^i \wedge dx^j \quad (40)$$

для любой однопараметрической подгруппы $G: g(t): \mathbb{R} \rightarrow G$, то

- 1) форма $\tilde{\omega}$ является G -инвариантной: $g^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ для любого $g \in G$;
- 2) $\tilde{\omega}(\xi_0, \xi) = 0$ для любого $\xi \in T_A M$ и любого вектора ξ_0 вида

$$\xi_0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_{g(t)},$$

где $A \in M$ – точка M (не зависит от параметра t !), $g(t)$ – произвольная кривая, проходящая при $t = 0$ через единицу: $g(0) = \text{id} \in G$.

Прежде чем доказывать утверждения леммы, поясним смысл равенства (40). Кривая $\mathbb{R} \rightarrow G$ порождает на M поток $A(t) = A_{g(t)}: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Дифференциал $dx_{g(t)}^i$ – это функция (форма) на $T^*(M \times \mathbb{R})$. При любом $t = t_0$ она имеет вид $dx_{g(t_0)}^i + \dot{x}_{g(t_0)}^i dt$, где $x_{g(t_0)}^i$ – функция на M , полученная сдвигом аргумента x^i , сдвигом элементом группы $g(t_0) \in G$, а $\dot{x}_{g(t_0)}^i$ – функция на M , равная скорости изменения значения x^i в точке $A(t_0)$ при движении A по своей траектории $\bigcup_t A(t)$.

Равенство (40) требует, в частности, чтобы соответствующая сумма не содержала членов с dt – обращалась бы в нуль на любой паре векторов вида (∂_t, ξ) , $\xi \in TM$, $\partial_t \in T\mathbb{R}$.

Вычисление покажет, что этого достаточно для зануления $\omega(\xi_0, \xi)$ на любом векторе ξ_0 , касательном к траектории $\bigcup_t A_{g(t)}$, вне зависимости от второго аргумента ξ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Зафиксируем какую-нибудь точку $A \in M$ и кривую $g(t)$; положим

$$\xi_0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_{g(t)} \in T_{A_{g(0)}} M.$$

Обозначим через $\dot{x}_{g(0)}^i$ координаты вектора ξ_0 :

$$\dot{x}_{g(0)}^i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x_{g(t)}^i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x^i(A_{g(t)}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} w_{ij}(A_{g(t)}) dx_{g(t)}^i \wedge dx_{g(t)}^j \Big|_{t=0} &= \sum_{i,j} w_{ij}(A_{g(0)}) \left(dx_{g(0)}^i \wedge dx_{g(0)}^j \right. \\ &\quad \left. + \dot{x}_{g(0)}^i dt \wedge dx_{g(0)}^j + \dot{x}_{g(0)}^j dx_{g(0)}^i \wedge dt \right). \end{aligned}$$

Из равенства (40) следует, во-первых, что

$$\sum_{i,j} w_{ij}(A_{g(0)}) dx_{g(0)}^i \wedge dx_{g(0)}^j = \sum_{i,j} w_{ij}(A) dx^i \wedge dx^j,$$

т. е. G -инвариантность формы $\tilde{\omega}$, и, кроме того, что

$$\begin{aligned} 0 &= dt \wedge \sum_{k,j} w_{kj}(A_{g(0)}) (\dot{x}_{g(0)}^k dx_{g(0)}^j - \dot{x}_{g(0)}^j dx_{g(0)}^k) \\ &= dt \wedge \tilde{\omega}(A_{g(0)})(\xi_0, \cdot) = dt \wedge i_{\xi_0} \tilde{\omega}(A_{g(0)}), \end{aligned}$$

т. е. значение $\tilde{\omega}(A_{g(0)})(\xi_0, \cdot)$ равно нулю вне зависимости от второго аргумента – от вектора, на котором вычисляется значение 1-формы $i_{\xi_0}\tilde{\omega}(A_{g(0)})$. Здесь $i_{\xi}\omega$ это 1-форма, внутреннее произведение ξ на 2-форму ω (см., например, [32]).

ТЕОРЕМА 4. *Форма $\tilde{\omega}$ проектируется с $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ на $M_{a_{i\bar{i}}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейное отображение – проекцию пространств $\tilde{\pi}: T_{A^{(\bar{k})}}\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \rightarrow T_{\tilde{\pi}^{-1}A^{(\bar{k})}}(\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$. Его ядром являются векторы, касательные к траекториям, полученным “вращением” постоянных наборов $A^{(\bar{k})}$:

$$\xi_0 \in \ker \tilde{\pi} \Leftrightarrow \exists g(t) : \xi_0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_{g(t)}^{(\bar{k})}, \quad g(0) = \mathrm{id} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Проверим равенство (40) для подгрупп T_{diag}^{μ} , $T_{\Delta\downarrow}^{\nu}$, $T_{\Delta\uparrow}^{\nu}$ диагональных, нижне- и верхнетреугольных матриц.

Так как

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=0}^n dA_{11}^{(i)} \wedge d \log A_{12}^{(i)},$$

то

$$T_{\mathrm{diag}}^{\mu} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\mu^2 \\ A_{21}\mu^{-2} & -A_{11} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\sum_{i=0}^n dA_{11}^{(i)} \wedge d \log \mu^{-2} A_{11}^{(i)} = \tilde{\omega} + \left(\sum_{i=0}^n dA_{11}^{(i)} \right) \wedge d \log \mu^2 = \tilde{\omega}. \quad (41)$$

Теперь $T_{\Delta\downarrow}^{\nu}$:

$$T_{\Delta\downarrow}^{\nu} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - \nu A_{12} & A_{12} \\ A_{21} + 2\nu A_{11} - \nu^2 A_{12} & -A_{11} + \nu A_{12} \end{pmatrix}.$$

Подставив, получим искомое

$$\sum_{i=0}^n d(A_{11}^{(i)} - \nu A_{12}^{(i)}) \wedge d \log A_{12}^{(i)} = \tilde{\omega} - \sum_{i=0}^n d\nu \wedge dA_{12}^{(i)} = \tilde{\omega}. \quad (42)$$

Вследствие равенства

$$dA_{11}^{(i)} \wedge d \log A_{12}^{(i)} = -dA_{11}^{(i)} \wedge d \log A_{21}^{(i)}$$

проверка для подгруппы $T_{\Delta\uparrow}^{\nu}$ аналогична.

Равенства (41), (42) верны для любой зависимости $\mu = \mu(t)$, $\nu = \nu(t)$, поскольку

$$\sum_i dA_{11}^{(i)} = \sum_i dA_{12}^{(i)} = \sum_i dA_{21}^{(i)} = 0.$$

Из леммы 1 следует, что $\tilde{\omega}(\xi_0, \xi) = 0$, если ξ – касательный вектор к одной из трех подгрупп $T_{\Delta\downarrow}^{\nu}$, T_{diag}^{μ} , $T_{\Delta\uparrow}^{\nu}$. Касательные к этим трем подгруппам образуют базис касательного пространства, следовательно, $\tilde{\omega}(\xi_0, \xi) = 0$ для любого ξ .

СЛЕДСТВИЕ 2. Значение суммы (33) не зависит от того, в каком базисе $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ вычисляются матричные элементы $A^{(k)}$, этот базис может, например, произвольно зависеть от самих $A^{(k)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Равенств (41), (42) показывают, почему пришлось переходить от $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ к $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$. Со всего пространства $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ форма $\tilde{\omega}$ на $M_{a_{i\bar{i}}}$ не опускается.

Отсутствие нулей у ω докажем позже (на с. 97), построив покрытие $M_{a_{i\bar{i}}}$ симплектическими картами.

Подведем итог. Мы построили симплектическое многообразие $M_{a_{i\bar{i}}}$. Вне точек раздутых дивизоров (считаем, что $\mathcal{C}_{a_{kk}} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$) его связь со стандартным пуассоновым пространством $\mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ проиллюстрируем диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1} & \hookleftarrow & \mathcal{C}_{a_{00}} \times \cdots \times \mathcal{C}_{a_{nn}} = \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = M_{a_{i\bar{i}}} \\ \{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{LP}} & \leftarrow & \{\cdot, \cdot\} \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \xrightarrow{\tilde{\pi}^*} & \tilde{\omega} & \xleftarrow{\tilde{\pi}^*} & \omega \in \wedge^2 T^* M_{a_{i\bar{i}}} \end{array}$$

Здесь символически обозначены: $\{\cdot, \cdot\}_{\mathrm{LP}}$ – скобка Ли–Пуассона на декартовой степени $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \simeq \mathfrak{sl}^*(2, \mathbb{C})$, $\{\cdot, \cdot\}$ – скобка Пуассона $\sum \Pi^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$, канонически соответствующая симплектической форме $\tilde{\omega} = \sum \Pi_{ij} dx^i \wedge dx^j$; это каноническое соответствие обозначено “ $\xleftrightarrow{\sim}$ ”.

Умножим теперь каждое из пространств цепочки

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})^{n+1} \hookleftarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \hookrightarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \longrightarrow M_{a_{i\bar{i}}}$$

декартово на Λ – рассмотрим расширенные фазовые пространства. Будем обозначать расширенные пространства той же буквой, но с индексом Λ :

$$\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}^\Lambda := \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \times \Lambda, \quad M_{a_{i\bar{i}}}^\Lambda := M_{a_{i\bar{i}}} \times \Lambda.$$

Все уравнения вида (1), являющиеся прообразом какой-нибудь точки $M_{a_{i\bar{i}}}$, имеют одинаковые монодромии, следовательно, действие калибровочной группы $\Psi(\lambda) \rightarrow \Phi_l \Psi(\lambda)$, $A^{(k)} \rightarrow \Phi_l^{-1} A^{(k)} \Phi_l$ монодромии не меняет, и условие постоянства набора данных монодромии корректно определено и на $M_{a_{i\bar{i}}}$, задает его (изомонодромное) слоение.

Листы слоения – образы листов слоения Шлезингера (15), а также любого другого, отличающегося выбором R , например как в (17). Таким образом, 2-форма $\Omega_{\mathrm{PVI}} := \omega - dh$ определяет интегрируемое распределение и на $M_{a_{i\bar{i}}}^\Lambda$:

$$\Omega_{\mathrm{PVI}} := \omega - dh = \omega - \sum_{i < j} da_{ij} \wedge d \log(\lambda_i - \lambda_j). \quad (43)$$

Мы больше не пишем π_M^* (формулы (19), (21)), которое лишь напоминало, что ω поднята с $M_{a_{i\bar{i}}}$ на $M_{a_{i\bar{i}}}^\Lambda$, считаем, что ω задана сразу на $M_{a_{i\bar{i}}}^\Lambda$.

Как зависят листы изомонодромного слоения от параметров λ_k ? Из самой постановки задачи изомонодромной деформации (см. с. 63) следует, что если

какая-нибудь деформация $\Psi(\lambda; \lambda_0, \dots, \lambda_n)$ изомонодромна, то и деформация $\Psi(\lambda'; \lambda'_0, \dots, \lambda'_n)$ изомонодромна, где

$$\lambda'_i := \frac{a_1 \lambda_i + a_2}{a_3 \lambda_i + a_4}, \quad a_k = a_k(\lambda_0, \dots, \lambda_n),$$

– произвольное движение сферы Римана $\mathbb{CP}^1 \ni \lambda_i$. Это так, потому что ни вычеты в полюсах $d_{\downarrow} \Psi \Psi^{-1}$, ни появляющиеся у $\Psi(\lambda)$ при эволюции по замкнутым циклам множители монодромии не зависят от параметризации λ сферы Римана. Таким образом, получаем следствие.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Интегральные поверхности уравнений изомонодромных деформаций (43) в пространстве $M_{a_{ii}}^{\Lambda}$ переходят друг в друга при произвольных дробно-линейных преобразованиях системы параметров λ_i :*

$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto (\lambda'_0, \dots, \lambda'_n), \quad \lambda'_i = \frac{a_1 \lambda_i + a_2}{a_3 \lambda_i + a_4},$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}), \quad a_k = a_k(\lambda_0, \dots, \lambda_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Система Шлезингера (15) не обладает этим свойством, она не инвариантна относительно инверсии.

Итак, уравнения, заданные формой (43), инвариантны как относительно одновременного сопряжения всех $A^{(i)}$ произвольной матрицей, так и относительно движений сферы Римана, на которой лежат параметры деформации уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Поскольку уравнение (43) не зависит от дробно-линейных преобразований, то можно зафиксировать какие-нибудь три значения λ_i , например положить

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{n-1} = 1, \quad \lambda_n = \infty;$$

тогда остальные значения λ_i , $i = 1, \dots, n-2$, будут независимыми комплексными параметрами – “временами”.

Другими словами, в качестве нетривиальных “времен” можно выбрать $n-2$ двойных отношения

$$\hat{t}_k := \mathcal{D}(\lambda_{n-1}, \lambda_k, \lambda_n, \lambda_0) = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Здесь и далее двойное отношение обозначено буквой $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) := \frac{(A - C)(B - D)}{(A - D)(B - C)}.$$

5. Построение рациональных координат Дарбу на $M_{a_{ii}}$

Пространство $M_{a_{ii}}$ определено как фактор $\tilde{M}_{a_{ii}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Геометрической основой доказательства того, что в результате факторизации получился “хороший” (гладкий, аналитический) объект – алгебраическое многообразие, было

следующее наблюдение: *два полных (т.е. содержащих базис) набора векторов переводятся друг в друга ортогональным преобразованием тогда и только тогда, когда совпадают их матрицы Грама (матрицы попарных скалярных произведений).*

В этом разделе будем эксплуатировать другую геометрическую идею.

Выделим среди всевозможных базисов линейного пространства (у нас это $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$) подкласс базисов, состоящий из какого-нибудь одного выделенного базиса и полученных из него действием всевозможных элементов какой-нибудь группы (в нашем случае – $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$), т.е. рассмотрим орбиту действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в многообразии базисов $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Назовем базисы этого подкласса *стандартными*.

Пусть каким-нибудь (однозначным, вполне определенным) образом по набору векторов (у нас – по набору матриц-вычетов $A^{(0)}, \dots, A^{(n)}$) удастся строить стандартный базис; иными словами, *пусть задано отображение* множества наборов $A^{(\bar{i})}$ в множество стандартных базисов (пространства $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$). Назовем такой, определенным образом построенный по набору $A^{(\bar{i})}$, стандартный базис *сопутствующим* (набору $A^{(\bar{i})}$). Координаты векторов набора $A^{(\bar{i})}$ в стандартном сопутствующем базисе являются функциями на факторпространстве $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, из них можно выбрать (составить) набор координатных функций многообразия $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$.

Пусть $\sigma^{(\bar{i})} = \sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$ – произвольный базис $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ и $\sigma_g^{(\bar{i})} = g^{-1}\sigma^{(1)}g, g^{-1}\sigma^{(2)}g, g^{-1}\sigma^{(3)}g$ – он же, “повернутый” элементом $g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; пусть

$$\mathrm{SL} \sigma^{(\bar{i})} := \bigcup_{g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})} \sigma_g^{(\bar{i})}$$

– орбита действия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\sigma^{(\bar{i})}$, и пусть построено отображение

$$\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \rightarrow \mathrm{SL} \sigma^{(\bar{i})} : A^{(\bar{i})} \mapsto \sigma^{(1)}(A^{(\bar{i})}), \sigma^{(2)}(A^{(\bar{i})}), \sigma^{(3)}(A^{(\bar{i})}),$$

коммутирующее с действием $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$\sigma^{(1)}(A_g^{(\bar{i})}), \sigma^{(2)}(A_g^{(\bar{i})}), \sigma^{(3)}(A_g^{(\bar{i})}) = \sigma_g^{(1)}(A^{(\bar{i})}), \sigma_g^{(2)}(A^{(\bar{i})}), \sigma_g^{(3)}(A^{(\bar{i})}).$$

Назовем это свойство $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -инвариантностью.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. *Координаты (матричные элементы) $A_{ij}^{(k)} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ в базисе $\sigma^{(\bar{i})}(A^{(\bar{i})})$, построенном $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -инвариантно, не зависят от действия $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$, они являются функциями на $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}} = \tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Примером построения такого базиса является процедура ортонормирования, когда первый базисный вектор выбирается единичным – сонаправленным с первым вектором набора, следующий базисный вектор – единичный вектор из полуплоскости, содержащей первый и второй векторы и т.д.

Утверждается, что два набора векторов в $\mathbb{R}^n$ можно перевести друг в друга ортогональным преобразованием (т.е. при факторизации по $O(n)$ такие наборы дадут одну точку) тогда и только тогда, когда в так построенных ортонормированных базисах векторы обоих наборов имеют одинаковые координаты.

Эти, общие для всех наборов, значения являются функциями на фактормногообразии, из них можно составить координатный набор. Мы, однако, будем использовать *другой* метод, основанный на свойствах коммутатора в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

5.1. Аналитическая геометрия в терминах $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем *стандартным* любой базис $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, получающийся из

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

действием $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, т. е. удовлетворяющий равенствам

$$\begin{aligned} \left\langle \sigma_3, \frac{\sigma_3}{2} \right\rangle &= \langle \sigma_+, \sigma_- \rangle = 1, \\ [\sigma_3, \sigma_{\pm}] &= \pm 2\sigma_{\pm}, \\ \langle \sigma_+, \sigma_+ \rangle &= \langle \sigma_-, \sigma_- \rangle = \langle \sigma_3, \sigma_+ \rangle = \langle \sigma_3, \sigma_- \rangle = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Такие условия “стандартности” базиса очевидным образом связаны с другим условием, однозначно фиксирующим поворот и ориентацию евклидова пространства, – ортонормированностью и правой ориентацией.

Определим *евклидово* скалярное произведение на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ формулой

$$\langle A, B \rangle_e := -2 \operatorname{tr} AB = -2 \langle A, B \rangle,$$

векторное же произведение оставим как и было – коммутатором $[AB] = AB - BA$. Легко видеть, что относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ и $[\cdot, \cdot]$ базис $\vec{e}_k := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sigma_k$, где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

является правым ортонормированным. Раскладывая по этому базису произвольные векторы $A, B, C \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, запишем основные формулы аналитической геометрии в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -версии:

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= B \langle A, C \rangle_e - C \langle A, B \rangle_e, \\ \langle A, [B, C] \rangle_e &= \det \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} := \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$A = \sum a_i \vec{e}_i, \quad B = \sum b_i \vec{e}_i, \quad C = \sum c_i \vec{e}_i.$$

Отсюда следует, что

$$\langle A, [B, C] \rangle_e^2 = \det \mathcal{G} \det \mathcal{G} = \det \mathcal{G} \mathcal{G}^T = \det \begin{vmatrix} \langle A, A \rangle_e & \langle A, B \rangle_e & \langle A, C \rangle_e \\ \langle B, A \rangle_e & \langle B, B \rangle_e & \langle B, C \rangle_e \\ \langle C, A \rangle_e & \langle C, B \rangle_e & \langle C, C \rangle_e \end{vmatrix}$$

– многочлен от элементов матрицы Грама набора A, B, C . Перепишем эти формулы, используя произведение Киллинга $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\frac{1}{2} \langle \cdot, \cdot \rangle_e$:

$$-\frac{1}{2} [A, [B, C]] = B \langle A, C \rangle - C \langle A, B \rangle. \quad (45)$$

Умножим скалярно на D и учтем, что при циклической перестановке строк определитель 3×3 не меняется, $\langle A, [B, C] \rangle = \langle C, [A, B] \rangle$:

$$-\frac{1}{2} \langle [A, B], [C, D] \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle, \quad (46)$$

$$-\frac{1}{2} \langle A, [B, C] \rangle^2 = \det \begin{vmatrix} \langle A, A \rangle & \langle A, B \rangle & \langle A, C \rangle \\ \langle B, A \rangle & \langle B, B \rangle & \langle B, C \rangle \\ \langle C, A \rangle & \langle C, B \rangle & \langle C, C \rangle \end{vmatrix}. \quad (47)$$

Аналогом формулы разложения по ортонормированному базису $\vec{e}_i$,

$$A = \sum_k \langle A, \vec{e}_k \rangle_e \vec{e}_k,$$

является следующая формула разложения по стандартному базису:

$$A = \sigma_3 \left\langle A, \frac{\sigma_3}{2} \right\rangle + \sigma_+ \langle A, \sigma_- \rangle + \sigma_- \langle A, \sigma_+ \rangle \quad (48)$$

– сразу видно, что обе части равенства имеют должные скалярные произведения на базисные векторы $\sigma_3, \sigma_+, \sigma_-$. Обозначим коэффициенты разложения по стандартному базису $\sigma_3, \sigma_+, \sigma_-$ через β, α, α' , а по ортонормированному $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ через x, y, z (временно):

$$x = \frac{\alpha' + \alpha}{i}, \quad y = \alpha' - \alpha, \quad z = 2 \frac{\beta}{i},$$

$$\beta = i \frac{z}{2}, \quad \alpha = i \frac{x + iy}{2}, \quad \alpha' = i \frac{x - iy}{2}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} A &= \beta_1 \sigma_3 + \alpha_1 \sigma_+ + \alpha'_1 \sigma_- = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3, \\ B &= \beta_2 \sigma_3 + \alpha_2 \sigma_+ + \alpha'_2 \sigma_- = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3, \\ C &= \beta_3 \sigma_3 + \alpha_3 \sigma_+ + \alpha'_3 \sigma_- = x_3 \vec{e}_1 + y_3 \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle A, [B, C] \rangle_e &= \det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{vmatrix} (\alpha_1 + \alpha'_1)/i & \alpha'_1 - \alpha_1 & 2\beta_1/i \\ (\alpha_2 + \alpha'_2)/i & \alpha'_2 - \alpha_2 & 2\beta_2/i \\ (\alpha_3 + \alpha'_3)/i & \alpha'_3 - \alpha_3 & 2\beta_3/i \end{vmatrix} = -4 \det \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 \end{vmatrix}, \\ \langle A, [B, C] \rangle &= 2 \det \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \alpha'_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \alpha'_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (49)$$

5.2. Отображение $Q_{\sqrt{2a_{i_0 i_0}}}$. Определим *важнейшее* для нас отображение набора $A^{(0)}, \dots, A^{(n)}$ в проективное пространство. Основой будет следующее утверждение теории алгебр Ли [35], [36], не имеющее прямого аналога в вещественной евклидовой геометрии.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого ненулевого $A^{(0)} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ величина*

$$\sqrt{2a_{00}} := \sqrt{2\langle A^{(0)}, A^{(0)} \rangle} = \sqrt{2 \operatorname{tr}(A^{(0)})^2} = \sqrt{-4 \det A^{(0)}}$$

является собственным числом линейного оператора $\operatorname{ad}_{A^{(0)}}$:

$$\operatorname{ad}_{A^{(0)}} = [A^{(0)}, \cdot]: \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}).$$

Соответствующее собственное подпространство одномерно, изотропно и ортогонально $A^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что любые два ненулевых элемента A и A' из $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ с одинаковыми “квадратами длин” $\langle A, A \rangle = \langle A', A' \rangle$, т. е. с одинаковыми собственными числами, можно совместить преобразованием из $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$. Это – утверждение теоремы о приведении к жордановой форме для матриц из $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Поскольку все утверждения $\operatorname{SL}(2, \mathbb{C})$ -инвариантны, то достаточно рассмотреть два случая:

$$\begin{aligned} \text{а) } a_{00} \neq 0, \quad A^{(0)} &= \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \sigma_3, \\ \text{б) } a_{00} = 0, \quad A^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_- . \end{aligned}$$

Если $a_{00} \neq 0$, то у $\operatorname{ad}_{A^{(0)}}$ собственных подпространства два, они натянуты на изотропные собственные векторы $\sigma_{\pm}$; соответствующие собственные числа равны $\pm\sqrt{2a_{00}}$:

$$\left[\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \sigma_3, \sigma_{\pm} \right] = \pm\sqrt{2a_{00}} \sigma_{\pm}.$$

Если $a_{00} = 0$, то σ_- – единственный собственный вектор, соответствующий 0, единственному собственному значению $\sqrt{2a_{00}} = 0$. Во всех случаях $\langle \sigma_3, \sigma_{\pm} \rangle = \langle \sigma_-, \sigma_- \rangle = 0$, т. е. собственные векторы ортогональны $A^{(0)}$ и изотропны. Теорема доказана.

Пусть $(A^{(i)}, \tilde{A}^{(i)}) \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ и $\sqrt{2a_{ii}}$ – какое-нибудь значение корня.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3. Обозначим через $\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})}$ какой-нибудь (любой, некоторый) собственный вектор оператора $\operatorname{ad}_{A^{(i)}}$, соответствующий собственному значению $\sqrt{2a_{ii}}$, если $a_{ii} \neq 0$, и собственный вектор оператора $\operatorname{ad}_{\tilde{A}^{(i)}}$, если $a_{ii} = 0$.

Если $a_{ii} = 0$ и $\tilde{A}^{(i)} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$, $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -p^2 : p$, то можно выбрать

$$\sigma^{(\sqrt{2a_{ii}})} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ -p^2 & -p \end{pmatrix}.$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 4. Через $(\sigma(\sqrt{2a_{ii}}))$ обозначим прямую с направляющим вектором $\sigma(\sqrt{2a_{ii}})$.

Итак, для любого значения $\sqrt{2a_{ii}} \in \mathbb{C}$ и любой точки $A^{(i)} \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ (вторую, проективную компоненту $\tilde{A}^{(i)}$ пары $(A^{(i)}, \tilde{A}^{(i)}) \in \mathcal{C}_{a_{ii}}$ здесь и далее мы не пишем – подразумеваем) однозначно определена изотропная прямая $(\sigma(\sqrt{2a_{ii}}))$; через $\sigma(\sqrt{2a_{ii}})$ обозначен какой-нибудь ее ненулевой (направляющий) вектор. Рассмотрим $\mathbb{CP}^n$ с однородными координатами $\alpha_0 : \alpha_1 : \dots : \alpha_n \in \mathbb{CP}^n$. Обозначим $L_Q^i \subset \mathbb{CP}^n$ пересечение гиперплоскостей $\sum_{k=0}^n \alpha_k = 0$ и $\alpha_i = 0$. Очевидно, что $L_Q^i \sim \mathbb{CP}^{n-2}$ – это $(n-2)$ -мерное проективное пространство.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 5. Обозначим $\tilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}} : \tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \rightarrow L_Q^j$ следующее отображение:

$$(A^{(0)}, \dots, A^{(n)}) \mapsto \langle A^{(0)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle : \langle A^{(1)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle : \dots : \langle A^{(n)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle,$$

т. е. положим $\alpha_k := \langle A^{(k)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9. *Определение $\tilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ корректно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, отметим, что в определении точки раздутых дивизоров могут рассматриваться вместе с обыкновенными, ненулевыми $A^{(i)}$ – направление $(\sigma(\sqrt{2a_{jj}}))$ определено корректно и в качестве $\sigma(\sqrt{2a_{jj}})$ можно взять любой ненулевой вектор с этого направления. Если же какая-нибудь вершина $A^{(i)}$ с раздутаго дивизора, то, конечно же, $\langle A^{(i)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle = 0$.

Во-вторых, среди $\langle A^{(i)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle$, $i \in \{0, \dots, n\}$, обязательно есть ненулевые, так как мы исключили из рассмотрения наборы $A^{(i)}$, состоящие из матриц, которые все могут быть приведены к одновременно-треугольному виду, иначе – ортогональные какому-нибудь одному изотропному вектору, в данном случае – вектору $\sigma(\sqrt{2a_{jj}})$ (по теореме 5 вектор $\sigma(\sqrt{2a_{jj}})$ изотропен). Таким образом, отображение $\tilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$, как отображение в $\mathbb{CP}^n$, определено корректно.

Покажем, что образ $\tilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ содержится в L_Q^j . Действительно, поскольку $\sum A^{(i)} = 0$, то и $\sum_i \langle A^{(i)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle = 0$; по теореме 5 $\langle A^{(j)}, \sigma(\sqrt{2a_{jj}}) \rangle = 0$. Утверждение доказано.

Отображение $\tilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}} : \tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \rightarrow L_Q^j$ инвариантно относительно действия группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$, так что $\tilde{Q}_{\sqrt{2a_{jj}}}$ может быть опущено на $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$, навстречу направлению, задаваемому $\tilde{\pi} : \tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \rightarrow M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$.

Это отображение мы и обозначим $Q_{\sqrt{2a_{jj}}} : M_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \rightarrow L_Q^j$.

5.3. Базис, сопутствующий $A^{(i)}, A^{(j)}, A^{(k)}$; условия его существования. Рассмотрим три вектора $A^{(0)}, A^{(n-1)}, A^{(n)}$ и зафиксируем какие-нибудь значения $\sqrt{2a_{00}}, \sqrt{2a_{n-1, n-1}}$.

Стандартный базис мы называем *сопутствующим* $A^{(0)}, A^{(n-1)}, A^{(n)}$ вдоль $(\sigma(-\sqrt{2a_{00}}))$ и $(\sigma(\sqrt{2a_{n-1, n-1}}))$, если

$$\sigma_- \in (\sigma(-\sqrt{2a_{00}})), \quad \sigma_+ \in (\sigma(\sqrt{2a_{n-1, n-1}})), \quad \langle \sigma_-, A^{(n)} \rangle = 1. \quad (50)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 10. *Стандартный базис, сопутствующий $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ вдоль $(\sigma(-\sqrt{2a_{00}}))$ и $(\sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}))$, существует и единствен тогда и только тогда, когда*

$$\text{а) } \langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), \sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}) \rangle \neq 0, \quad \text{б) } \langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), A^{(n)} \rangle \neq 0. \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условия а) и б) выполнены, то искомый базис (очевидно, единственный) дается явными формулами

$$\begin{aligned} \sigma_- &= \sigma(-\sqrt{2a_{00}}) \frac{1}{\langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), A^{(n)} \rangle}, \\ \sigma_+ &= \sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}) \frac{\langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), A^{(n)} \rangle}{\langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), \sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}) \rangle}, \\ \sigma_3 &= [\sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}), \sigma(-\sqrt{2a_{00}})] \frac{1}{\langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), \sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}) \rangle}. \end{aligned} \quad (52)$$

Если условие а) не выполнено, то σ_- и σ_+ линейно зависимы и $\sigma_{\pm,3}$ – не базис; нарушение условия б), т. е. равенство $\langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), A^{(n)} \rangle = 0$, противоречит (50). Утверждение доказано.

Обозначим часть $\tilde{M}_{a_{ii}}$, где выполнено (51), через $\tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1}n-1}, n)$; иногда для краткости будем писать $\tilde{\mathcal{U}}(\dots)$:

$$\tilde{\mathcal{U}}(\dots) := \{A^{(i)} \in \tilde{M}_{a_{ii}} : \langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), \sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}) \rangle \neq 0, \langle \sigma(-\sqrt{2a_{00}}), A^{(n)} \rangle \neq 0\}.$$

ТЕОРЕМА 6. *Для любого заданного набора значений $\sqrt{2a_{ii}}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$,*

$$\tilde{M}_{a_{ii}} = \bigcup_{\substack{i,j \\ 0 \neq i \neq j \neq 0}} \tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совпадение направлений $(\sigma(\sqrt{2a_{ii}}))$ и $(\sigma(\sqrt{2a_{jj}}))$ означает не только возможность приведения $A^{(j)}$ и $A^{(i)}$ к одинаково-треугольному (например верхнетреугольному) виду, но и некую согласованность, после такого приведения, аргументов (знаков) соответствующих диагональных элементов. Если же $A^{(j)}$ и $A^{(i)}$ просто верхнетреугольны, $A_{11}^{(i)} = \sqrt{a_{ii}/2}$, аргумент $A_{11}^{(j)}$ – любой, то $\sigma(\sqrt{2a_{ii}}) = \sigma_+$ и, конечно же, $\langle A^{(j)}, \sigma_+ \rangle = A_{21}^{(j)} = 0$. Следовательно,

$$(\sigma(\sqrt{2a_{ii}})) = (\sigma(\sqrt{2a_{jj}})) \Rightarrow \langle A^{(j)}, \sigma(\sqrt{2a_{ii}}) \rangle = 0.$$

Мы знаем, что все величины $\alpha_i := \langle A^{(i)}, \sigma(\sqrt{2a_{00}}) \rangle$ равны нулю быть не могут, а так как $\sum \alpha_i = 0$, то отличны от нуля минимум две из них.

Из этого следует, что для любого набора $A^{(\bar{i})}$ найдутся вершины $A^{(i)}$ и $A^{(j)}$ такие, что

$$\langle A^{(i)}, \sigma(\sqrt{2a_{00}}) \rangle \neq 0 \neq \langle A^{(j)}, \sigma(\sqrt{2a_{00}}) \rangle$$

и, значит, $A^{(\bar{i})}$ содержится в $\tilde{U}(\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j)$.

Формулы (52) задают отображение $A^{(\bar{k})} \rightarrow \sigma_{\pm,3}(A^{(\bar{k})})$, дающее базис, подпадающий под действие утверждения 8. Отображение это определено на

$$\tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1\ n-1}}, n) \subset \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}.$$

В соответствующем стандартном базисе матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{a_{00}/2} & 0 \\ q'_0 & -\sqrt{a_{00}/2} \end{pmatrix}, & A^{(i)} &= \begin{pmatrix} \beta_i & q_i \\ q'_i & -\beta_i \end{pmatrix}, \\ A^{(n-1)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{a_{n-1\ n-1}/2} & q_{n-1} \\ 0 & -\sqrt{a_{n-1\ n-1}/2} \end{pmatrix}, & A^{(n)} &= \begin{pmatrix} \beta_n & 1 \\ q'_n & -\beta_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (53)$$

На эти формулы можно смотреть как на *вложение* $\tilde{\mathcal{U}}(\dots)/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \subset M_{a_{i\bar{i}}}$ в $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$. Взяв набор $A^{(\bar{i})}$ с $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ и пользуясь формулами (52), мы получим базис $\sigma_{\pm}, \sigma_3$. Разложение по этому базису (формулы (24), (53)) даст некоторую точку из $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$. Поскольку результат будет одинаковым для всех наборов с одной орбиты (построение сопутствующего базиса $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -инвариантно), то это отображение $\tilde{\mathcal{U}}(\dots) \rightarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ можно рассматривать и как отображение $\tilde{\mathcal{U}}(\dots)/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$. Это именно *вложение*, т.е. инъекция, потому что одинаковые матричные элементы, пусть даже в разных базисах, имеют наборы *только* связанные преобразованием из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, с одной орбиты.

Уберем $A^{(0)}, A^{(n-1)}, A^{(n)}$ из набора $A^{(\bar{i})}$, т.е. спроектируем на произведение $n-2$ квадрат $\mathcal{C}_{a_{i\bar{i}}}$:

$$\tilde{M}_{a_{i\bar{i}} \setminus \{0\ n-1\ n\}} := \mathcal{C}_{a_{11}} \times \dots \times \mathcal{C}_{a_{n-2\ n-2}}.$$

Эта проекция инъективна. Используя равенства

$$\sum A^{(i)} = 0 \quad \text{и} \quad \det A^{(n)} = -\frac{a_{nn}}{2},$$

для каждой из отброшенных координат получаем формулу (отброшенные члены восстанавливаются):

$$\begin{aligned} -q_{n-1} &= q_{\Sigma} + 1, & q'_{n-1} &:= 0, & \beta_{n-1} &:= \sqrt{\frac{a_{n-1\ n-1}}{2}}, \\ -\beta_n &= \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{n-1\ n-1}}{2}} + \beta_{\Sigma}, \\ q'_n &= -\left(\beta_{\Sigma} + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{n-1\ n-1}}{2}}\right)^2 + \frac{a_{nn}}{2}, \\ -q'_0 &= q'_{\Sigma} - \left(\beta_{\Sigma} + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{n-1\ n-1}}{2}}\right)^2 + \frac{a_{nn}}{2}, \\ q_0 &:= 0, & \beta_0 &:= \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}, \end{aligned} \quad (54)$$

здесь

$$\beta_{\Sigma} := \sum_{i=1}^{n-2} \beta_i, \quad q_{\Sigma} := \sum_{i=1}^{n-2} q_i, \quad q'_{\Sigma} := \sum_{i=1}^{n-2} q'_i.$$

Обозначим композицию вложения (53) и удаления матриц $A^{(0)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n)}$ через $\pi_{\{0\,n-1\,n\}}$:

$$\pi_{\{0\,n-1\,n\}}: \tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1\,n-1}}, n)/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}} \setminus \{0\,n-1\,n\}}.$$

Нами доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11. *Отображение $\pi_{\{0\,n-1\,n\}}$ является биекцией.*

Вернемся к иллюстративному примеру с поверхностью вращения (с. 55). Аналог пространства $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$ – это XY -плоскость, аналог пространства $M_{a_{i\bar{i}}} = \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ одномерен, точками этого многообразия являются концентрические окружности.

Отображение $\tilde{\mathcal{U}}(\dots) \rightarrow \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$, состоящее в построении сопутствующего базиса и последующего разложения по нему набора $A^{(\bar{i})}$ (формулы (53)), аналогично отображению части плоскости XY (например кругового кольца) в какую-нибудь параметризующую кривую, один раз пересекающую все окружности этого кольца. Если отождествить окружность с той точкой параметризующей кривой, в которой они (окружность и кривая) пересекаются, получится вложение $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}/\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ в плоскость XY , образом которого является эта параметризующая кривая.

Развивая аналогию, укажем, что традиционная параметризация с помощью нормировки $\Psi(\infty_\lambda) = \text{const}$ (проекция решения системы Шлезингера) может быть уподоблена выбору в качестве параметризующей кривой какого-нибудь луча, выходящего из начала координат. Система (53) соответствует некоторой более экзотической кривой. Такими кривыми все множество окружностей покрывается не сразу (как лучом), а несколькими частями. Смысл этого на примере не виден. Состоит он в том, что *параметризующая кривая не самоцель*, она должна быть далее сама *параметризована* симплектическими (p, q) -картами (q – это искомая функция в уравнении Пенлеве VI). Луч покрывается такими картами плохо, так как (p, q) -карты для него слишком маленькие, а предложенная кривая (53) хорошо – ее накрывает всего пара карт, связанных инволютивным преобразованием $(p, q) \rightleftharpoons (1/p, -p(pq + \sqrt{2a_{00}}))$.

5.4. Симплектичность пространства $M_{a_{i\bar{i}}}$, построение сопутствующего базиса по данному набору $A^{(\bar{k})}$. Многообразие $\tilde{M}_{a_{i\bar{i}} \setminus \{0\,n-1\,n\}}$ симплектическое – как произведение симплектических многообразий, обозначим его 2-форму $\tilde{\omega}_{\{0\,n-1\,n\}}$.

ТЕОРЕМА 7. *Форма $\tilde{\omega}|_{\tilde{M} \subset \tilde{M}}$, являющаяся сужением симплектической формы $\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1\,n-1}}, n) \subset \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}} \subset \tilde{M}_{a_{i\bar{i}}}$, совпадает с поднятием $\tilde{\omega}_{\{0\,n-1\,n\}}$ на $\tilde{\mathcal{U}}(\dots)$:*

$$\tilde{\pi}^* \circ \pi_{\{0\,n-1\,n\}}^* \tilde{\omega}_{\{0\,n-1\,n\}} = \tilde{\omega}|_{\tilde{M} \subset \tilde{M}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужение $\tilde{\omega}$ на $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$ не зависит от выбора базиса $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ (утверждение 2), так что мы можем вычислять сумму $\sum_{i=0}^n \omega^{(i)}$ в сопутствующем вдоль $(\sigma(-\sqrt{2a_{00}}))$ и $(\sigma(\sqrt{2a_{n-1}n-1}))$ базисе, который существует для $A^{(\bar{i})} \in \tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1}n-1}, n)$.

В таком базисе $\omega^{(0)} = \omega^{(n-1)} = \omega^{(n)} = 0!$ Это следствие того, что $A^{(0)}, A^{(n-1)}, A^{(n)}$ лежат на одномерных подмногообразиях – на пересечениях квадратик $\mathcal{O}_{a_{ii}}$ ($i = 0, n-1, n$) и плоскостей $A_{12}^{(0)} = 0, A_{21}^{(n-1)} = 0, A_{12}^{(n)} = 1$, так что

$$\sum_{i=0}^n \omega^{(i)} = \sum_{i=1}^{n-2} \omega^{(i)}.$$

Обозначим

$$\mathcal{U}(\dots) := \tilde{\pi}(\tilde{\mathcal{U}}(\dots)) \subset M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}.$$

Определение $\tilde{\mathcal{U}}(\dots)$ является $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -инвариантным, так что

$$\tilde{\mathcal{U}}(\dots) = \tilde{\pi}^{-1}(\mathcal{U}(\dots))$$

и, значит,

$$M_{a_{\bar{i}\bar{i}}} = \bigcup_{\substack{i,j \\ 0 \neq i \neq j \neq 0}} \mathcal{U}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j).$$

Многообразие $\mathcal{U}(-\sqrt{2a_{ii}}; \sqrt{2a_{jj}}, k)$ – симплектическое пространство, оно изоморфно $\tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}} \setminus \{ijk\}}$ – декартову произведению $n-2$ квадратик $\prod_{m \notin \{i,j,k\}} \mathcal{C}_{a_{mm}}$, причем мы доказали, что изоморфизм $\pi_{\{ijk\}}$ симплектический и бирациональный. Таким образом, верна теорема (более абстрактное доказательство симплектичности $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$ см. в [7], [37]).

ТЕОРЕМА 8. Многообразие $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$ является симплектическим. Симплектическая форма ω на нем склеивается из форм на $\mathcal{U}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j) \simeq \tilde{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}} \setminus \{0ij\}}$, совпадающих на перекрытиях (почти везде).

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Набором локальных канонических координат на $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$ является любой набор $(p_i, q_i)_{i=1}^{n-2}$, где (p_i, q_i) – произвольная пара (локальных) симплектических координат на квадратике $\mathcal{O}_{a_{ii}}$.

ТЕОРЕМА 9. Координатные функции a_{ik}, f_{ijk} и функции β_i, q_i, q'_i – матричные элементы $A^{(i)}$ в сопутствующем базисе – связаны бирационально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону это очевидно. Используя представление (53) и формулы (54), можно вычислить $\mathrm{tr} A^{(i)} A^{(j)} = a_{ij}$ и $\mathrm{tr}[A^{(i)}, A^{(j)}] A^{(k)} = f_{ijk}$, они будут рациональными функциями (многочленами) от матричных элементов $\beta_i, q_i, q'_i, i = 1, \dots, n-2$.

Пусть теперь заданы a_{ik}, f_{ijk} . Обозначим

$$\sigma(\sqrt{2\langle A, A \rangle})(B \setminus A) := \langle A, A \rangle B - \langle A, B \rangle A + \sqrt{\langle A, A \rangle / 2} [A, B]. \quad (55)$$

Непосредственной подстановкой (используются формулы (45), (46)) легко проверяется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 12. Для любых $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ вектор $\sigma = \sigma^{\sqrt{2\langle A, A \rangle}}(B \setminus A)$ удовлетворяет равенству $[A, \sigma] = \sqrt{2\langle A, A \rangle} \sigma$.

Из условия одновременной нетреугольности следует, что среди $A^{(\bar{i})}$ всегда найдутся $A^{\bar{0}}$ и A^{n-1} такие, что

$$\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}(A^{(\bar{0})} \setminus A^{(0)}) \neq 0, \quad \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1}n-1})}(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}) \neq 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})} &= \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}(A^{(\bar{0})} \setminus A^{(0)}), \\ \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1}n-1})} &:= \sigma^{(\sqrt{2a_{n-1}n-1})}(A^{(\widehat{n-1})} \setminus A^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (56)$$

Для $A^{(\bar{i})} \in \tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{n-1}n-1}, n)$ векторы $\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}$ и $\sigma^{(\sqrt{2a_{n-1}n-1})}$ линейно независимы и формулы (52) для (56) дадут стандартный базис $\sigma_{\pm,3}$, сопутствующий $A^{(\bar{i})}$. Матричные элементы β_i, q_i, q'_i — это $\langle \sigma_3/2, A^{(\bar{i})} \rangle, \langle \sigma_-, A^{(\bar{i})} \rangle, \langle \sigma_+, A^{(\bar{i})} \rangle$; мы получили их рациональное представление через a_{ij} и f_{ijk} .

Закончим этот раздел доказательством одной красивой геометрической формулы. Пусть $n = 3$, т.е. имеются четыре вектора $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ постоянной длины и суммой нуль, т.е. (вообще говоря) не плоский ориентированный четырехугольник в пространстве, с зафиксированными “длинами сторон” (их квадратами) $a_{ii} := \langle A^{(i)}, A^{(i)} \rangle = \text{const}$. Построим стандартный базис $\sigma_-, \sigma_+, \sigma_3$, сопутствующий векторам $A^{(0)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ вдоль направлений $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(\sqrt{2a_{22}})})$, т.е. в этом базисе

$$A_{11}^{(0)} = +\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}, \quad A_{11}^{(2)} = +\sqrt{\frac{a_{22}}{2}}, \quad A_{12}^{(3)} = 1$$

(при выводе уравнения Пенлеве VI мы будем использовать именно такую нормировку, т.е. знак при $\sqrt{a_{00}/2}$). Вычислим ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(0)}$:

$$\begin{aligned} f_{120} &= \langle A^{(1)}, [A^{(2)}, A^{(0)}] \rangle = 2 \det \begin{vmatrix} \beta_1 & q_1 & q'_1 \\ \sqrt{a_{22}/2} & q_2 & 0 \\ \sqrt{a_{00}/2} & 0 & q'_0 \end{vmatrix} \\ &= 2q'_0 \left(\beta_1 q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \right) - \sqrt{2a_{00}} q_2 q'_1. \end{aligned}$$

Так как $M_{a_{ii}}$ при $n = 3$ двумерно, имеется ровно одна пара канонических переменных (p_1, q_1) , и форма $da_{01} \wedge da_{02}$ обязана быть пропорциональной $dp_1 \wedge dq_1$: $da_{01} \wedge da_{02} = V dp_1 \wedge dq_1$, причем коэффициент пропорциональности V не может иметь особенностей; вычислим его.

Учтем, что

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} = \text{const}, & \beta_2 &= \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} = \text{const}, & q_0 &= 0, & q'_2 &= 0; \\ a_{0i} &= 2\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \beta_i + q'_0 q_i, & q'_0 &= -q'_1 - q'_3, \\ q_2 &= -q_1 - 1, & -q'_1 &= p_1(\beta_1 + \sqrt{2a_{11}}), \\ -q'_3 &= \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}, & \beta_1 &= p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}},\end{aligned}$$

и подставим в $da_{01} \wedge da_{02}$:

$$\begin{aligned}da_{01} \wedge da_{02} &= d(\sqrt{2a_{00}} \beta_1 + q'_0 q_1) \wedge d(q'_0 q_2) \\ &= \sqrt{2a_{00}} d\beta_1 \wedge d(q'_0 q_2) + d(q'_0 q_1) \wedge d(q'_0 q_2) \\ &= q'_0 d(q'_0 - \sqrt{2a_{00}} \beta_1) \wedge dq_1 + \sqrt{2a_{00}} q_2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) d\beta_1 \wedge dp_1.\end{aligned}$$

Мы также использовали, что $dq_2 = -dq_1$ и $d\beta_1 \wedge dq'_3 = 0$, поэтому

$$d\beta_1 \wedge dq'_0 = -d\beta_1 \wedge dq'_1 = \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) d\beta_1 \wedge dp_1,$$

так что

$$\begin{aligned}V &= q'_0 \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_{q_1} (q'_0 - \sqrt{2a_{00}} \beta_1) - \sqrt{2a_{00}} q_2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) \frac{\partial}{\partial q_1} \Big|_{p_1} \beta_1 \\ &= q'_0 \left(2p_1 q_1 + 2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \left(2\left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) - \sqrt{2a_{00}}\right) q_1\right) \\ &\quad - \sqrt{2a_{00}} q_2 \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) p_1 \\ &= 2q'_0 \left(\beta_1 q_1 + p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1\right) \\ &\quad + \sqrt{2a_{00}} q_2 q'_1 = -2q'_0 \left(\beta_1 q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1\right) + \sqrt{2a_{00}} q_2 q'_1 = -f_{120}.\end{aligned}$$

Нами доказано следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 13. *Симплектическая форма ω имеет представление*

$$dp_1 \wedge dq_1 = \frac{da_{01} \wedge da_{02}}{f_{123}}. \quad (57)$$

Отметим, что справа стоит выражение из элементарной геометрии – скалярные произведения сторон четырехугольника (это a_{01} и a_{02}) и объем f_{123} его выпуклой оболочки (четыреугольник не плоский).

Равенство (57) можно рассматривать как геометрическое определение симплектической формы на пространстве тетраэдров (о симплектической геометрии пространства многоугольников см. [38]). Удивительно, что с нашим определением ω , как суммы заметаемых направлениями сторон телесных углов, форма $(da_{01} \wedge da_{02})/f_{123}$ связана столь сложным вычислением.

6. Система Гарнье, уравнение Пенлеве VI

Системой Гарнье [1] называется каноническая система уравнений изомонотропных деформаций (43), записанная в канонических переменных p_i, q_i , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} q_j &= \frac{\partial}{\partial p_j} H_i, & \frac{\partial}{\partial \lambda_i} p_j &= -\frac{\partial}{\partial q_j} H_i, & i, j &\in \{1, \dots, n-2\}, \\ H_i &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}, & i &= 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (58)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(p_{\overline{m}}, q_{\overline{m}})$ – многочлены (теорема 9); $\lambda_0, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ – различные константы, например, $\lambda_0 = 0, \lambda_{n-1} = 1, \lambda_n = \infty$ (в этом случае члены суммы, содержащие λ_n , отсутствуют, суммирование по k от 1 до $n-1$). Важнейший случай этой системы, случай Пенлеве VI, рассмотрим детально.

Шестое уравнение Пенлеве – это уравнение Эйлера–Лагранжа, соответствующее гамильтоновой системе (58) (простейший нетривиальный случай, $n = 3$; этот подход развивается в [39], [40]), записанной в канонических переменных p, q какого-нибудь из многообразий $\widetilde{M}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{ijk\}}$.

Если $n = 3$, то $n - 2 = 1$, т. е. имеется единственная пара канонических переменных, многообразие

$$M_{a_{\overline{ii}}} = \bigcup_{i,j:i \neq 0 \neq j} \widetilde{M}_{a_{\overline{ii}} \setminus \{0ij\}} = \bigcup_{k=1}^3 \widetilde{M}_{a_{kk}} \quad (59)$$

двумерно, расширенное фазовое пространство $M_{a_{\overline{ii}}}^\Lambda$ трехмерно.

Чтобы выписать само уравнение, нужно переписать гамильтониан

$$H = \sum a_{ij} \log(\lambda_i - \lambda_j),$$

заданный в координатах a_{ij} , через канонические координаты p, q и сделать по p преобразование Лежандра – исключить p из канонической системы уравнений. Ввиду важности уравнения P^{VI} приведем соответствующие вычисления. Начиная с этого момента, $n = 3$; набор $A^{(\bar{i})} = A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}$ будем называть тетраэдром, апеллируя к геометрической интуиции:

$$(\mathbb{R}^3, \dots \times \dots) \sim (\mathfrak{su}(2), [\cdot, \cdot]) \subset (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}), [\cdot, \cdot]).$$

Мы должны зафиксировать область $\mathcal{U}(\sqrt{2a_{ii}}; \sqrt{2a_{jj}}, k)$, т. е. индексы i, j, k и два значения корней из параметров.

Положим $i = 0, j = 2, k = 3$; если фиксировать $\mathcal{U}(\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$, то в сопутствующем стандартном базисе будет

$$A_{11}^{(0)} = -\sqrt{\frac{a_{00}}{2}}, \quad A_{11}^{(2)} = +\sqrt{\frac{a_{22}}{2}},$$

но этот знак минус у $A_{11}^{(0)}$ нарушит (с точки зрения автора) симметрию возникающих формул, так что мы зафиксируем область $\mathcal{U}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$ и будем

строить стандартный базис $(\sigma_-, \sigma_+, \sigma_3)$, сопутствующий $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ вдоль направлений⁴ $(\sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})})$ и $(\sigma^{(+\sqrt{2a_{22}})})$.

Стандартный сопутствующий базис σ_- , σ_+ , σ_3 определен так, что векторы $A^{(0)}$, $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ движутся по линиям – сечениям квадрик $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ плоскостями $\langle A^{(0)}, \sigma_- \rangle = 0$, $\langle A^{(2)}, \sigma_+ \rangle = 0$ и $\langle A^{(3)}, \sigma_- \rangle = 1$. Эти линии однозначно проектируются на соответствующие координатные оси, в результате каждая из матриц $A^{(0)}$, $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ определяется единственным своим матричным элементом:

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{a_{00}/2} & 0 \\ q'_0 & -\sqrt{a_{00}/2} \end{pmatrix}, & A^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{a_{22}/2} & q_2 \\ 0 & -\sqrt{a_{22}/2} \end{pmatrix}, \\ A^{(3)} &= \begin{pmatrix} \beta_3 & 1 \\ a_{33}/2 - \beta_3^2 & -\beta_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (60)$$

Вследствие равенства $\sum A^{(i)} = 0$, по вершине $A^{(1)}$ – точке квадрики $\mathcal{C}_{a_{11}}$ восстанавливается весь тетраэдр:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= -(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = -\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \beta_1 + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right), \\ q_2 &= -(q_0 + q_1 + q_3) = -(q_1 + 1), \\ q'_0 &= -(q'_1 + q'_2 + q'_3) = -\left(q'_1 + \frac{a_{33}}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} + \beta_1\right)^2\right). \end{aligned}$$

Заметим, что для всех (разных) точек $A^{(1)}$ с раздутаго дивизора (существующего, если $a_{11} = 0$) получатся одни и те же $A^{(0)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ – некоторый конкретный треугольник.

Обратно, для любого тетраэдра $A^{(\bar{i})}$ из $\tilde{\mathcal{U}}(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$ можно построить стандартный сопутствующий базис. Формулы

$$\beta_1 = -\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} + \beta_3\right), \quad q_1 = -(1 + q_2), \quad q'_1 = -\left(q'_0 + \frac{a_{33}}{2} - \beta_3^2\right)$$

показывают, что по значениям координат β_3 , q_2 , q'_0 точка $A^{(1)}$ восстанавливается однозначно.

Заметим, что так как $\beta_1^2 + q_1 q'_1 = a_{11}/2$, то величины β_3 , q_2 и q'_0 не являются независимыми:

$$\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} + \beta_3\right)^2 + (1 + q_2)\left(q'_0 + \frac{a_{33}}{2} - \beta_3^2\right) = \frac{a_{11}}{2}.$$

Скалярные произведения $a_{0i} = \langle A^{(0)}, A^{(i)} \rangle$ (остальные из них – посредством формул (38)) выражаются через матричные элементы β_i , q_i , q'_i следующим

⁴Конечно же, во всех формулах можно поменять $\sqrt{a_{ii}} \rightarrow -\sqrt{a_{ii}}$ для произвольного (или некоторых) i , в частности $\sqrt{a_{00}} \rightarrow -\sqrt{a_{00}}$.

образом (вычисляем след произведения матриц $A^{(0)}$ и $A^{(i)}$):

$$\begin{aligned} a_{0i} &= 2\beta_0\beta_i + q_0q'_i + q_iq'_0 = 2\beta_0\beta_i + q_iq'_0 \\ &= \sqrt{2a_{00}}\beta_i + q_i\left(q_2q'_1 + 2\beta_1\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right) + \frac{a_{00}}{2} + \frac{a_{22}}{2} + \frac{a_{11}}{2} - \frac{a_{33}}{2} + \sqrt{a_{00}a_{33}}\right). \end{aligned}$$

Мы учли, что $q'_0 = -(q'_1 + q'_2 + q'_3)$, $q'_2 = 0$ и $\beta_1^2 = a_{11}/2 - q_1q'_1$. Все матричные элементы – многочлены от координат q_1 и $p_1 = (\beta_1 - \sqrt{a_{11}/2})/q_1$:

$$\beta_1 = p_1q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}, \quad q'_1 = -p_1\left(p_1q_1 + 2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) = -p_1^2q_1 - 2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}p_1,$$

так что

$$\begin{aligned} a_{0i} &= -q_iq_1q_2p_1^2 + 2p_1q_i\left(q_1\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right) - q_2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) \\ &\quad + q_i\left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}\right) + \beta_i\sqrt{2a_{00}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Подставляя $\beta_1 = p_1q_1 + \sqrt{a_{11}/2}$, $\beta_2 = \sqrt{a_{22}/2}$, $\beta_3 = -\beta_1 - (\sqrt{a_{00}/2} + \sqrt{a_{22}/2})$, $\beta_0 = \sqrt{a_{00}/2}$, получаем

$$\begin{aligned} a_{01} &= -q_1q_1q_2p_1^2 + 2q_1p_1\left(q_1\sqrt{\frac{a_{22}}{2}} - q_2\left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}\right)\right) \\ &\quad + q_1\left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}\right) + \sqrt{a_{00}a_{11}}, \\ a_{02} &= -q_2q_1q_2p_1^2 + 2q_2p_1\left(q_1\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right) - q_2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) \\ &\quad + q_2\left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}\right) + \sqrt{a_{00}a_{22}}, \\ a_{03} &= -q_3q_1q_2p_1^2 + 2q_3p_1\left(q_1\sqrt{\frac{a_{22}}{2}} - q_2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}}\right) \\ &\quad + q_3\left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}}\right)^2 - \frac{a_{33}}{2}\right) \\ &\quad - \sqrt{a_{00}}(\sqrt{a_{00}} + \sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}}). \end{aligned}$$

Здесь $q_3 := 1$, $\sqrt{a_{ii}a_{jj}} := \sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}$.

Рассмотрим линейную комбинацию $\sum a_{0i}t_i$, где t_1, t_2, t_3 – какие-то комплексные параметры. Сразу видно, что сумма $\sum a_{0i}t_i$ будет иметь вид

$$p_1^2\mathcal{P}_3 + 2p_1\mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1,$$

где $\mathcal{P}_k$ – многочлен степени не выше “ k ” от переменной q_1 .

Если $t_1 \neq t_2$, то $\mathcal{P}_3$ действительно имеет третью степень по q_1 ; если же $t_1 = t_2$, то $\sum a_{0i}t_i$ линейно по q_1 :

$$(t_1 - t_3) \left(q_1 q_2 p_1^2 - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 - \frac{a_{33}}{2} + \sqrt{a_{00}}(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}}) \right) - a_{00}t_3.$$

Поскольку все скалярные произведения $\langle A^{(i)}, A^{(j)} \rangle$ выражаются линейно через a_{0k} и константы (формула (38)), то верна теорема, используемая К. Окамото и, по-видимому, известная еще классикам – Фуксу и Пенлеве.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $A' := \sum \nu'_i A^{(i)}$ и $A'' := \sum \nu''_i A^{(i)}$ – произвольные линейные комбинации радиус-векторов вершин $A^{(i)}$ с постоянными коэффициентами ν'_i и ν''_i ; тогда функция $\langle A', A'' \rangle: M_{a_{i\bar{i}}} \rightarrow \mathbb{C}$ полиномиальна по p_1, q_1 , причем по p_1 – квадратична:

$$\langle A', A'' \rangle = p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1, \quad (62)$$

здесь $\mathcal{P}_k$ – полиномы по q_1 степени не выше “ k ”; если степень $\mathcal{P}_3$ ниже трех, то $\mathcal{P}_2 = 0$, $\mathcal{P}_1 = \text{const}_{\nu'_i, \nu''_i}$.

Гамильтониан системы уравнений изомонодромных деформаций имеет именно такой вид – линейная комбинация a_{ij} ; выпишем отдельно важную для нас формулу (здесь опять t_1, t_2, t_3 – произвольные числа)

$$\begin{aligned} a_{0t} := t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03} = & - \left(\sum t_i q_i \right) q_1 q_2 p_1^2 \\ & + 2p_1 \left(-\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} q_2 \left(\sum t_i q_i \right) + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \left(\sum t_i q_i \right) + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} (t_2 - t_1) q_1 q_2 \right) \\ & + \left(\sum t_i q_i \right) \left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 - \frac{a_{33}}{2} \right) \\ & + \sqrt{a_{00}} (t_1 \sqrt{a_{11}} + t_2 \sqrt{a_{22}} - t_3 (\sqrt{a_{00}} + \sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})). \end{aligned} \quad (63)$$

6.1. Рациональная (традиционная, классическая) форма P^{VI} . В первых разделах было показано, что условие изомонодромности деформации уравнения (1) задается формой $\Omega_{P^{\text{VI}}}$:

$$\Omega_{P^{\text{VI}}} = \omega - \sum_{i < j} d \operatorname{tr} A^{(i)} A^{(j)} \wedge d \log(\lambda_i - \lambda_j).$$

Мы знаем, что любая линейная комбинация величин $a_{ij} = \operatorname{tr} A^{(i)} A^{(j)}$ зависит квадратично от p_1 и кубично от q_1 , где (p_1, q_1) – симплектические координаты на $M_{a_{i\bar{i}}}$ (в той части, где они определены), так что форма $\Omega_{P^{\text{VI}}}$ в координатах p_1, q_1 переписывается так:

$$dp_1 \wedge dq_1 - d(p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1) \wedge d\tau. \quad (64)$$

Здесь $\mathcal{P}_k$ – многочлен степени k от q_1 , а τ – какой-нибудь параметр, от которого зависят $\lambda_i = \lambda_i(\tau)$; напомним, что изомонодромное распределение интегрируемо, результат эволюции решения не зависит от траектории, соединяющей начальную и конечную точки в пространстве параметров λ_i . Обозначим точкой производную по τ .

ТЕОРЕМА 11. Функция $q_1 = q_1(\tau)$ – q -координата решения гамильтоновой системы (64) – удовлетворяет уравнению

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \log \mathcal{P}_3 \right) \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \log \mathcal{P}_3 \right) \dot{q}_1 + 2\mathcal{P}_3 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1 \right) \right). \quad (65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим полный квадрат:

$$p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_3 \left(p_1 + \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} \right)^2 + \mathcal{P}_1 - \frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3},$$

и введем новую переменную

$$P := p_1 + \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3}. \quad (66)$$

Форма примет вид

$$dP \wedge dq_1 - d \left(\mathcal{P}_3 P^2 + \mathcal{P}_1 - \frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} + R \right) \wedge d\tau.$$

Замена $p_1 \rightarrow P$ явно содержит τ , в гамильтониане появился новый член – это такая функция R , что $\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} \right) d\tau \wedge dq_1 = dR \wedge d\tau$, иначе

$$\left(dR + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} \right) dq_1 \right) \wedge d\tau = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial q_1} R = - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3}.$$

Функция $R = - \int \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} \right) dq$ – первообразная от (рациональной) функции $-\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3}$.

Обозначим

$$F = F(q_1, \tau) := \frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1 + \int dq_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3},$$

система (64) приобрела простой вид

$$dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau, \quad (67)$$

где $\mathcal{P}_3$ и F не зависят от P . Выпишем каноническую систему:

$$\dot{q}_1 = 2P \mathcal{P}_3, \quad \dot{P} = -P^2 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{P}_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} F.$$

Исключим P (это эквивалентно преобразованию Лежандра), переписав P и $\dot{P}$ через $\dot{q}_1$ и q_1 . Поскольку $2P = \dot{q}_1 / \mathcal{P}_3$, то

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -2 \left(\frac{d}{d\tau} \mathcal{P}_3 \right) \left(-\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1}{\mathcal{P}_3} \right) - 2\mathcal{P}_3 \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1}{\mathcal{P}_3} \right)^2 \frac{\partial}{\partial q_1} \mathcal{P}_3 - \frac{\partial}{\partial q_1} F \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \log \mathcal{P}_3 \right) \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \log \mathcal{P}_3 \right) \dot{q}_1 + 2\mathcal{P}_3 \frac{\partial}{\partial q_1} F. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 22. Теорема объясняет структуру традиционной записи уравнения Пенлеве VI – три слагаемых специфического вида в правой части.

Введем параметр t так, чтобы (65) приобрело привычный для специалистов вид (см. [1]).

Преобразуем сумму $\sum_{i < j} da_{ij} \wedge d \log(\lambda_i - \lambda_j)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} da_{ij} \wedge d \log(\lambda_i - \lambda_j) &= \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i \neq k}}^3 da_{0i} \wedge d \log[(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)] \\ &= d(t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03}) \wedge d\tau \\ &= d\left(a_{01} + \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} a_{03}\right) \wedge (t_1 - t_2) d\tau \\ &= d(a_{01} + t a_{03}) \wedge d\tau_{1-2}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже индексы i, j, k в одной формуле все различны и отличны от индекса 0, например, четная перестановка $\{1, 2, 3\}$. Мы обозначили:

а) логарифмическую производную величины $(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)$ по параметру τ (произвольному, пока еще не определенному) через t_i :

$$t_i := \frac{d \log[(\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)]}{d\tau};$$

б) величину $(t_3 - t_2)/(t_1 - t_2)$ через t :

$$t := \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{d \log[(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)/((\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1))]}{d \log[(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)/((\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1))]};$$

в) дифференциал $(t_1 - t_2) d\tau$, имеющий вычет +1 в точке $\lambda_0 = \lambda_1$, вычет -1 в точке $\lambda_0 = \lambda_2$ и не имеющий никаких других особенностей (тут $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ фиксированы, а λ_0 – переменная), через $d\tau_{1-2}$:

$$d\tau_{1-2} := d \log \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} = -d \log \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 14. Через двойное отношение точек λ_i дифференциал $d\tau_{1-2}$ выражается так:

$$d\tau_{1-2} = -\frac{dt}{t(t-1)}, \quad t = \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)} = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2).$$

Это является следствием двух красивых формул.

УТВЕРЖДЕНИЕ 15. Для любых величин s_1, s_2, s_3 таких, что $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, выполнено равенство

$$d \log \frac{s_1}{s_2} + d \log \frac{d \log(s_1/s_3)}{d \log(s_2/s_3)} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем переменную $x := s_1/s_2$. Тогда

$$\frac{s_1}{s_3} = -\frac{s_1}{s_1 + s_2} = -\frac{x}{x + 1}, \quad \frac{s_2}{s_3} = -\frac{1}{x + 1}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 16. Для любых $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) + (\lambda_0 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1) + (\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта сумма обращается в нуль, если положить $\lambda_i = \lambda_j$, значит, она делится на $\lambda_i - \lambda_j$ для любых i, j . В то же время все выражение квадратично по λ_j , а различных пар $\lambda_i - \lambda_j$ больше двух (шесть).

Утверждение 14 доказывается так.

В утверждении 15 положим $s_i = (\lambda_0 - \lambda_i)(\lambda_j - \lambda_k)$ и выразим t и $d\tau_{1-2}$ через $x = s_1/s_2$:

$$\begin{aligned} d\tau_{1-2} &= d \log x, \\ t &= \frac{d \log(s_3/s_2)}{d \log(s_1/s_2)} = \frac{d \log(1+x)}{d \log x} = \frac{x}{1+x} = -\frac{s_1}{s_3} \\ &= -\frac{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_0 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2), \\ t &= \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = \frac{t}{1-t} \Rightarrow d\tau_{1-2} = d \log \frac{t}{t-1} = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} \right) dt = -\frac{dt}{t(t-1)}. \end{aligned}$$

Вернемся к уравнению Пенлеве VI. Величина $a_{01} + ta_{03}$ выражается через p_1, q_1 с помощью (63). Если в качестве независимой переменной⁵ τ в формуле (64) выбрать

$$\tau := t = \frac{t_3 - t_2}{t_1 - t_2} = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2),$$

то получим

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} da_{ij} \wedge d \log(\lambda_i - \lambda_j) &= d(a_{01} + ta_{03}) \wedge \frac{-dt}{t(t-1)} \\ &= d \frac{-1}{t(t-1)} (t_1 a_{01} + t_2 a_{02} + t_3 a_{03}) \wedge dt = d(p_1^2 \mathcal{P}_3 + 2p_1 \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1) \wedge dt \\ &= d \frac{-1}{t(t-1)} \left(- \left(\sum t_i q_i \right) q_1 q_2 p_1^2 + 2p_1 \left(-\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} q_2 \left(\sum t_i q_i \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \left(\sum t_i q_i \right) + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} (t_2 - t_1) q_1 q_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum t_i q_i \right) \left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 - \frac{a_{33}}{2} \right) \right) \wedge dt, \end{aligned}$$

⁵В следующем разделе и τ и $\mathcal{P}_i$ будут другими.

и функции $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1$ из (64), участвующие в формулировке теоремы 11, получаются такими:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_3 &= -\frac{q_1 q_2 q_t}{t(t-1)}, \\ \mathcal{P}_2 &= \frac{q_1 q_2 q_t}{t(t-1)} \left(-\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} + \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_t} \right), \\ \mathcal{P}_1 &= \frac{q_t}{t(t-1)} \left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 - \frac{a_{33}}{2} \right) + \text{const}_t.\end{aligned}$$

Мы обозначили $q_t := -(q_1 + t) = -\sum q_i t_i$, так что $q_1 + q_t + t = q_1 + q_2 + 1 = 0$; величину const_t , не зависящую от q_1 (и от p_1 , конечно, тоже), больше писать не будем.

Функция

$$\begin{aligned}F &:= \frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1 + \int dq_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} \\ &= -\frac{q_1(q_1+1)(q_1+t)}{t(t-1)} \left(\frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} + \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_1+1} + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_1+t} \right)^2 \\ &\quad + \frac{q_1+t}{t(t-1)} \left(\left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 - \frac{a_{33}}{2} \right) + \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_1+t}\end{aligned}$$

имеет только простые полюсы на $\mathbb{C} \ni q_1$; вычислим вычеты:

$$\begin{aligned}\text{Res}_{|_{q_1=0}} F &= -\frac{a_{11}}{2} \frac{1}{t-1}, & \text{Res}_{|_{q_1=-1}} F &= \frac{a_{22}}{2} \frac{1}{t}, \\ \text{Res}_{|_{q_1=-t}} F &= -\frac{a_{00}}{2} + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}}, & \text{Res}_{|_{q_1=\infty}} F &= -\frac{a_{33}}{2} \frac{1}{t(t-1)},\end{aligned}$$

так что

$$F = \frac{1}{2t(t-1)} \left(-\frac{ta_{11}}{q_1} + \frac{(t-1)a_{22}}{q_1+1} - \frac{t(t-1)(a_{00} - \sqrt{2a_{00}})}{q_1+t} - a_{33}q_1 \right) + \text{const}'_t$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_1} \log \mathcal{P}_3 &= \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{q_1+t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \log \mathcal{P}_3 &= -\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+q_1} \right), \\ 2\mathcal{P}_3 \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}_3} - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\mathcal{P}_2^2}{\mathcal{P}_3} - \mathcal{P}_1 \right) \right) &= 2\mathcal{P}_3 \frac{\partial}{\partial q_1} F \\ &= -\frac{q_1(q_1+1)(q_1+t)}{t^2(t-1)^2} \left(a_{11} \frac{t}{q_1^2} - a_{22} \frac{t-1}{(q_1+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}}) \frac{t(t-1)}{(q_1+t)^2} - a_{33} \right).\end{aligned}$$

На функцию $q := -q_1$ мы получили (формула (65)) уравнение Пенлеве VI с параметрами $\alpha = a_{33}$, $\beta = a_{22}$, $\gamma = a_{11}$, $\delta = (\sqrt{a_{00}} - 1/\sqrt{2})^2$:

$$\ddot{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \dot{q}^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) \dot{q} + \frac{q(q-1)(q-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\alpha - \beta \frac{t}{q^2} + \gamma \frac{t-1}{(q-1)^2} + \left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{t(t-1)}{(q-t)^2} \right). \quad (68)$$

6.2. Эллиптическая форма P^{VI} . В этом пункте активно используются эллиптические функции, для ознакомления с предметом автор рекомендует книгу [41], сочетающую в себе свойства как учебника, так и справочника.

На протяжении *этого* пункта будем писать q_0 вместо q_t ; также в качестве независимой переменной τ будет выбрана другая функция $\tau = \tau(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, не $t = \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2)$, так что изменятся (исчезнет $t(t-1)$ в знаменателе) $\mathcal{P}_3$ и F .

Итак, отныне

$$\Omega_{P^{\text{VI}}} = dP \wedge dq_1 - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau_{1-2}, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} P &= p_1 + \frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} - \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} - \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_0}, & q_0 &:= q_t := -(q_1 + t), \\ \mathcal{P}_3 &= q_1 q_2 q_t, & d\tau_{1-2} &= -\frac{dt}{t(t-1)}, & t &= \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_0, \lambda_2), \\ F &= \frac{a_{11}}{2} + \frac{a_{11}}{2} (t-1) q_2 - \left(\frac{a_{00}}{2} - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \right) \frac{t(t-1)}{q_0} + \frac{a_{33}}{2} q_1. \end{aligned}$$

Обозначим через $Q_i \in L_Q^0$ корни q_i : $q_i(Q_i) = 0$; функция q_i обращается в нуль в точке Q_i (точка Q_3 – это та точка, где q_1 , q_2 и q_0 имеют полюс). Получим

$$\begin{aligned} F &= \frac{a_{11}}{2} \frac{q_1(Q_2)q_1(Q_0)}{q_1} - \frac{a_{22}}{2} \frac{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}{q_2} + \frac{a_{33}}{2} q_1 \\ &\quad - \left(\frac{a_{00}}{2} - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \right) \frac{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}{q_0}. \end{aligned}$$

Рассмотрим дробно-линейное преобразование χ_k , $k \in \{1, 2, 0\}$, сферы Римана L_Q^0 , переводящее точку Q_3 в Q_k и меняющее местами оставшиеся точки Q_i и Q_j .

УТВЕРЖДЕНИЕ 17. На функцию q_k преобразование χ_k действует следующим образом:

$$\chi_k^* q_k = \frac{q_k(Q_i)q_k(Q_j)}{q_k}, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рациональная функция $\chi_k^* q_k$ с единственной особенностью – простым полюсом принимает те же значения, что и $q_k(Q_i)q_k(Q_j)/q_k$, в четырех различных точках Q_l , $l \in \{0, 1, 2, 3\}$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Функция F следующим образом выражается через координату q_1 :

$$F = \frac{a_{11}}{2} \chi_1^* q_1 + \frac{a_{22}}{2} \chi_2^* q_1 + \frac{a_{33}}{2} q_1 + \left(\frac{a_{00}}{2} - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} \right) \chi_0^* q_1 + \text{const}_\tau, \quad (70)$$

где const_τ – постоянная, т. е. не зависит от точки L_Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим действие χ_k на q_1 :

$$\begin{aligned} \chi_2^* q_1 &= -\chi_2^*(q_2 + 1) = -\frac{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}{q_2} - 1 \implies -\frac{1}{q_2} = (\chi_2^* q_1 + 1) \frac{1}{q_2(Q_1)q_2(Q_0)}, \\ \chi_0^* q_1 &= -\chi_2^*(q_0 + t) = -\frac{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}{q_0} - t \implies -\frac{1}{q_0} = (\chi_0^* q_1 + t) \frac{1}{q_0(Q_1)q_0(Q_2)}. \end{aligned}$$

Постараемся избавиться от множителя $\mathcal{P}_3$ перед P^2 – перейти к таким переменным u, p, τ , чтобы зависимость гамильтониана от импульса стала чисто квадратичной:

$$\Omega_{\text{PVI}} = dp \wedge du - d\left(\frac{p^2}{2} - \mathcal{F}(u, \tau)\right) \wedge \frac{d\tau}{\text{const}} = 0. \quad (71)$$

Каноническая система в этом случае упростится:

$$\text{const} \frac{du}{d\tau} = p, \quad \text{const} \frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}(u, \tau),$$

и уравнение на u (уравнение Пенлеве VI) примет вид

$$(\text{const})^2 \frac{d^2}{d\tau^2} u = \mathcal{F}'(u, \tau), \quad \mathcal{F}' := \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\tau} \mathcal{F}(u, \tau). \quad (72)$$

Введем в (69) (временно) переменную $\tilde{P} := \sqrt{\mathcal{P}_3} P$. Она определена на двулистном накрытии сферы Римана $\overline{\mathbb{C}} \ni q_1$, разветвленном в нулях $\mathcal{P}_3$: $\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_0 = q_1(q_1 + 1)(q_1 + t)$ и в бесконечности, т. е. определена на торе, модулярный параметр которого зависит от независимой переменной t . Построим координату $\tilde{v}$, канонически сопряженную $\tilde{P}$ (т. е. $\tilde{P} d\tilde{v} = P dq_1$):

$$d\tilde{v} = \frac{dq_1}{\sqrt{q_1(q_1 + 1)(q_1 + t)}}.$$

Дифференциал $d\tilde{v}$ – голоморфный дифференциал на торе, сама же переменная $\tilde{v} := \int d\tilde{v}$ оказывается голоморфной координатой на универсальной накрывающей этого тора – на комплексной плоскости.

Прежде чем приступить к реализации этой схемы, заметим, что выбранный нами вид (71) формы Ω_{PVI} очень “жесткий” – он оставляет возможность только линейных относительно u замен переменных, однозначно связанных с заменой независимой переменной τ :

$$(u, d\tau) \rightarrow (\varkappa_1 u + \varkappa_0, c\varkappa_1^2 d\tau), \quad \varkappa_1 = \varkappa_1(\tau), \quad \varkappa_0 = \varkappa_0(\tau).$$

При данном преобразовании $\mathcal{F}'$ меняется линейно по u :

$$\mathcal{F}' \mapsto u\kappa_1 \frac{d^2}{d\tau^2} \left(\frac{1}{\kappa_1} \right) - \kappa_1 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\kappa_1^2} \frac{d\kappa_0}{d\tau} \right) + c^2 \kappa_1^3 \mathcal{F}'$$

(см. [42]). Если потребовать, чтобы $\mathcal{F}(u, \tau)$ при постоянном τ оставалась функцией на L_Q^0 (определялась тетраэдром $A^{(i)}$), т. е. была двояко-периодической функцией на торе, вся свобода изменения независимой переменной τ сведется к умножению на константу и модулярному преобразованию $\tau \rightarrow -1/\tau$. Потребуем, чтобы образ какой-нибудь фиксированной точки $\mathbb{C}_u$, например $u = 0$, совпал с одной из точек $Q_j \in L_Q^0$. В этом случае κ_0 должно быть вектором решетки периодов тора и при выборе переменных (u, τ) не останется ни одного функционального параметра.

Таким образом, предложенный вид (71) формы Ω_{PVI} , с точностью до дискретных симметрий и тривиальных (не зависящих от переменных u , p и τ) масштабных преобразований, определяет как зависимую переменную u , так и независимую переменную τ .

ТЕОРЕМА 12. *Функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(u, \tau)$ в (71) тогда и только тогда может быть опущена на L_Q^0 , когда один из периодов постоянен, т. е. существует контур интегрирования такой, что $\oint u = \text{const}$, а τ пропорционально второму примитивному периоду – меняется на верхней полуплоскости, на универсальной накрывающей $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} \ni t$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже мы докажем, что указанный выбор u и τ действительно дает $\mathcal{F}$, совпадающую с поднятием на $\mathbb{C}_u$ некоторой рациональной на L_Q^0 функции. Доказательство же необходимости (такого выбора) следует из приведенного выше рассуждения.

Пусть T_t – тор (погруженный в $\overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}}$), униформизованный двумя переменными $\sqrt{\mathcal{P}_3}$ и q_1 , связанными соотношением

$$(\sqrt{\mathcal{P}_3})^2 = q_1(q_1 + 1)(q_1 + t). \quad (73)$$

Пусть u – голоморфная переменная на его универсальной накрывающей $\mathbb{C}_u$.

Прообразы точек Q_j , $j \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$q_1(Q_1) = 0, \quad q_1(Q_2) = -1, \quad q_1(Q_3) = \infty, \quad q_1(Q_0) = -t$$

при накрывающем отображении $\pi_{uT}: \mathbb{C} \rightarrow T_t$ образуют решетку полупериодов на $\mathbb{C}_u$.

Выберем в качестве точки $u = 0$ (и обозначим $\omega_0 := 0$) один из узлов решетки, соответствующих Q_0 ; остальные полупериоды занумеруем в соответствии с обозначениями Вейерштрасса:

$$\omega_j := \text{const}(t) \int_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_j)} \frac{dq}{\sqrt{\mathcal{P}_3}},$$

так что $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$, $\text{Im}(\omega_3/\omega_1) > 0$.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\tau := \omega_3/\omega_1$ – отношение примитивных периодов, соответствующих Q_3 и Q_1 , тогда

$$\left(\int_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_1)} \frac{dq_1}{\sqrt{\mathcal{P}_3}} \right)^2 = 4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = 4\pi i \frac{d \log \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \lambda_3)}{d\tau}. \quad (74)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это – некоторое тождество, содержащее полные эллиптические интегралы. Оно следует из формул (81), (82) и (80), которые нам будет удобнее доказать позже, когда выразим q_1 , $\sqrt{\mathcal{P}_3}$ и $d\tau_{1-2}/d\tau$ через стандартные функции на торе.

Пусть переменная u на $\mathbb{C}_u$ выбрана так, что $2\omega_1 = 1$, т. е.

$$d|_{\tau=\text{const}} u = \frac{dq_1}{\sqrt{\mathcal{P}_3}} / \sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}}, \quad \text{или} \quad u = \int \frac{dq}{\sqrt{\mathcal{P}_3}} / \sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}}. \quad (75)$$

Интеграл в правой части явно зависит от τ . Эту зависимость охарактеризуем функцией $\phi = \phi(u, \tau)$:

$$\begin{aligned} \phi &:= -2\pi i \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{q_1=\text{const}} u, \quad du = \left. \frac{\partial u}{\partial q_1} \right|_{\tau} dq_1 + \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{q_1} d\tau, \\ dq_1 &= \left(\left. \frac{\partial q_1}{\partial u} \right|_{\tau} \right) \left(du + \frac{\phi}{2\pi i} d\tau \right). \end{aligned} \quad (76)$$

Вследствие нормировки (75)

$$\left. \frac{\partial q_1}{\partial u} \right|_{\tau} = \sqrt{\mathcal{P}_3} \sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}},$$

значит,

$$dq_1 = \sqrt{\mathcal{P}_3} \sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}} \left(du + \frac{\phi}{2\pi i} d\tau \right). \quad (77)$$

Подставим это выражение в (69) и обозначим $\hat{p} := P\sqrt{\mathcal{P}_3} \sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}}$:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{pvi}} &= d(P dq_1) - d(\mathcal{P}_3 P^2 - F) \wedge d\tau_{1-2} \\ &= d\left(\hat{P} \left(du + \frac{\phi}{2\pi i} d\tau \right) \right) - d\left(\frac{\hat{p}^2}{4\pi i d\tau_{1-2}/d\tau} - F \right) \wedge d\tau_{1-2} \\ &= d(\hat{p} du) + d(2\hat{p}\phi) \wedge \frac{d\tau}{4\pi i} - d\left(\hat{p}^2 - 4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} F \right) \wedge \frac{d\tau}{4\pi i} \\ &= d(\hat{p} du) - d\left((\hat{p} - \phi)^2 - \phi^2 - 4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} F \right) \wedge \frac{d\tau}{4\pi i} \\ &= dp \wedge du - d\left(\frac{p^2}{2} - 2\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} F \right) \wedge \frac{d\tau}{2\pi i} + d\phi \wedge du + d\phi^2 \wedge \frac{d\tau}{4\pi i}. \end{aligned} \quad (78)$$

Здесь мы обозначили

$$p := \hat{p} - \phi = P\sqrt{\mathcal{P}_3} \sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}} + 2\pi i \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{q_1} u.$$

Далее будем обозначать производную по u при постоянном τ штрихом; дифференцирование $\partial/\partial\tau$ всегда будет при постоянном u :

$$\dots' := \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{\tau=\text{const}} \dots, \quad \frac{\partial}{\partial\tau} \dots = \frac{\partial}{\partial\tau} \Big|_{u=\text{const}} \dots.$$

Отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}_u \ni u$ в сферу Римана L_Q^0 , находящуюся во взаимно однозначном соответствии со значениями функции q_1 , обозначим $\pi_u Q$.

При обозначении тэта-функций модулярный аргумент τ будем опускать; если u – первый аргумент тэта-функции не указан, то он равен нулю:

$$\theta_k(u) := \theta_k(u|\tau), \quad \theta_k := \theta_k(0|\tau), \quad \theta'_k := \frac{\partial}{\partial u} \theta_k(u|\tau) \Big|_{u=0}.$$

Связь нумерации полупериодов Вейерштрасса и индексов в тэта-функциях:

$$0 = \theta_{k+1} \left(\frac{\omega_k}{2\omega_1} \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \pmod{4}, \quad \omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Все тэта-функции удовлетворяют уравнению теплопроводности

$$4\pi i \frac{\partial}{\partial\tau} \theta_k(u|\tau) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} \theta_k(u|\tau).$$

Разделив обе части на $\theta_k(u|\tau)$, получим версию этого уравнения для логарифма тэта-функции:

$$4\pi i \frac{\partial}{\partial\tau} \log \theta_k(u) = \log'' \theta_k(u) + (\log' \theta_k(u))^2. \quad (79)$$

Вычислим $d\tau_{1-2}/d\tau$. По определению, $d\tau_{1-2} = d \log \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \lambda_3)$. Двойное отношение не зависит от того, какая именно голоморфная переменная на $\mathbb{CP}^1$ используется для его вычисления – любые две координаты связаны дробно-линейным преобразованием, от которого двойное отношение не зависит. Из соображений удобства выберем $\hat{q} = \theta_1^2(u)/\theta_0^2(u)$, тогда

$$d\tau_{1-2} = d \log \mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0, \lambda_3) = d \log \mathcal{D}(\hat{q}(Q_1), \hat{q}(Q_2), \hat{q}(Q_0), \hat{q}(Q_3)),$$

где $\hat{q}(Q_j) := \theta_1^2(\omega_j)/\theta_0^2(\omega_j)$. Поскольку $\theta_0^2(\omega_3) = \theta_1^2(\omega_0) = 0$, то

$$\begin{aligned} d\tau_{1-2} &= d \log \frac{\theta_1^2(1/2)\theta_0^2((1+\tau)/2)}{\theta_1^2((1+\tau)/2)\theta_0^2(1/2)} \\ &= d \log \frac{\theta_2^4}{\theta_3^4} = \frac{1}{\pi i} \left(4\pi i \frac{\partial}{\partial\tau} \log \frac{\theta_2}{\theta_3} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой (79). Учитывая, что $\log' \theta_2 = \log' \theta_3 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} &= \frac{1}{\pi i} \frac{\log'' \theta_2(u)}{\theta_3(u)} \Big|_{u=0} = \frac{(2K)^2}{\pi i} \frac{d^2}{dv^2} \log \text{sn}(v+K) \Big|_{v=0} \\ &= \frac{4K^2}{\pi i} \frac{d}{dv} \Big|_{v=0} \frac{\text{cn}(v+K) \text{dn}(v+K)}{\text{sn}(v+K)} = \frac{4K^2}{\pi i} \frac{d}{dv} \Big|_{v=0} (-k'^2) \frac{\text{sn } v \text{ dn } v}{\text{dn}^2 v \text{ cn } v} \\ &= \frac{\pi^2 \theta_3^4}{\pi i} \frac{\theta_0^4}{\theta_3^4} (-1) \frac{\text{cn } v \text{ dn } v}{\text{dn } v \text{ cn } v} \Big|_{v=0} = i\pi \theta_0^4. \end{aligned}$$

Итак, значение $d\tau_{1-2}/d\tau$ вычислено, положим

$$\sqrt{4\pi i \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau}} := 2\pi i \theta_0^2. \quad (80)$$

Рассмотрим автоморфизм $\sigma_{\omega_k}: \mathbb{C}_u \rightarrow \mathbb{C}_u$, состоящий в сдвиге на полупериод $\omega_k: \sigma_{\omega_k}(u) = u + \omega_k$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

При этом преобразовании полупериоды переходят друг в друга и ни один не остается на месте; кроме того, точки, симметричные относительно инволюции $u \rightarrow -u$, переходят опять в симметричные же точки, следовательно, эта инволюция опускается на L_Q^0 .

Легко понять, что

$$(\pi_{uQ}^*)^{-1} \sigma_{(\omega_k - \omega_3)} = \chi_k,$$

где обозначено $\sigma_{(\omega_k - \omega_3)}(u) := u + \omega_k - \omega_3$.

Из этого следует, что в формуле (70) для F при различных $a_{ii}/2$ стоит одна и та же функция переменной u , например $\pi_{uQ}^* q_1$, сдвинутая на различные полупериоды ω_j . Вычислим $\pi_{uQ}^* q_1$ – выразим ее через стандартные эллиптические функции.

Тор T_t , заданный уравнением (73), двулистно накрывает L_Q^0 ; точки L_Q^0 находятся в биективном соответствии со значениями функции $q_1: L_Q^0 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$:

$$\pi_{TQ}: T_t \rightarrow L_Q^0.$$

Это накрытие разветвлено над точками Q_k , $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. На T_t определены: функции q_i (поднятия соответствующих функций на L_Q^0), функция $\sqrt{\mathcal{P}_3}$, проекция $(q_1, \sqrt{\mathcal{P}_3}) \rightarrow q_1$ и инволюция $u \rightarrow -u$, переставляющая листы накрытия $(q_1, \sqrt{\mathcal{P}_3}) \rightleftharpoons (q_1, -\sqrt{\mathcal{P}_3})$. Плоскость $\mathbb{C}_u$ является универсальной накрывающей тора T_t :

$$\pi_{uT}: \mathbb{C}_u \rightarrow T_t.$$

Это отображение является бесконечнолистным неразветвленным накрытием.

Композиция этих двух накрывающих отображений –

$$\pi_{uT}: \mathbb{C}_u \rightarrow T_t \quad \text{и} \quad \pi_{TQ}: T_t \rightarrow L_Q^0$$

обозначена была нами через π_{uQ} :

$$\pi_{uQ}: \mathbb{C}_u \rightarrow L_Q^0, \quad \pi_{uQ} = \pi_{TQ} \circ \pi_{uT}.$$

Отображение π_{uQ} – бесконечнолистное накрытие сферы Римана L_Q^0 , разветвленное в узлах решетки $\bigcup_{n,m \in \mathbb{Z}} (n + m\tau)/2$. Точки $Q_k \in L_Q^0$ являются образами узлов этой решетки. Мы занумеровали полупериоды ω_k так, что

$$\pi_{uQ} \omega_k = Q_k.$$

Поднятие функции $q_k: L_Q^0 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}_u$ – это двояко-периодическая функция с единственной особенностью – полюсом в ω_3 (это прообраз точки Q_3) и нулем в ω_k , $k \in \{0, 1, 2\}$. Полюс в ω_3 и нуль в ω_k – двойные, потому что π_{TQ} , а следовательно, и π_{uQ} имеет ветвление второго порядка над $Q_k \in L_Q^0$. Эллиптическая

инволюция $u \rightarrow -u$, переставляющая листы накрытия π_{TQ} , тривиально действует на L_Q^0 , следовательно, для любого $k \in \{0, 1, 2\}$ $\pi_{uQ}^* q_k: \mathbb{C}_u \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ – четная функция переменной u .

Поскольку значения функции q_1 во всех точках Q_j известны, то имеющейся информации достаточно для построения $\pi_{uQ}^* q_1$ с помощью стандартных функций на $\mathbb{C}_u$ (эллиптических и тэта-функций).

УТВЕРЖДЕНИЕ 18. *Имеет место представление*

$$\begin{aligned} \pi_{uQ}^* q_1 &= - \left(\frac{\theta_0((1+\tau)/2) \theta_2(u)}{\theta_2((1+\tau)/2) \theta_0(u)} \right)^2 \\ &= \frac{\theta_2^2 \theta_2^2(u)}{\theta_0^2 \theta_0^2(u)} = \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2(v, k) = - \frac{1}{e_1 - e_2} (\wp(u - \omega_3) - e_2), \end{aligned} \quad (81)$$

где

$$\begin{aligned} v &= 2Ku, \quad 2K := \pi \theta_3^2, \quad k = \frac{\theta_2^2}{\theta_3^2}, \quad k' = \frac{\theta_0^2}{\theta_3^2}, \\ e_k &:= \wp(\omega_k), \quad \theta_k := \theta_k(0 | \tau), \quad \tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта и только эта функция с периодами $2\omega_1 = 1$, $2\omega_3 = \tau$, четная по u , имеет нуль в ω_1 , полюс в ω_3 и значение -1 в $\omega_2 = -(1+\tau)/2$.

Далее не будем писать символ π_{uQ}^* перед q_1 , подразумевая его: $q_1 = q_1(u, \tau)$.

Сравнивая значения в полупериодах функции q_1 , выраженной через тэта-функции и в обозначениях Якоби и Вейерштрасса, получим

$$t = -q_1(Q_0) = - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2(0) = - \frac{\theta_2^4}{\theta_0^4} = - \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

В точке Q_3 функция q_1 имеет полюс. Сравним асимптотики. Положим $v = v_1 + iK'$, $v_1 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2(v, k) = \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2(v_1 + iK') = - \frac{1}{k'^2} \frac{\operatorname{dn}^2(v_1)}{\operatorname{sn}^2(v_1)} = - \frac{1}{k'^2 v_1^2} (1 + \mathbf{O}(v_1^2)), \\ \wp(u_1) - e_2 &= \frac{1}{u_1^2} (1 + \mathbf{O}(u_1)), \quad u_1 \rightarrow 0, \quad u_1 := u - \omega_3 = \frac{v_1}{2K}. \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$e_1 - e_2 = 4K^2 k'^2 = \pi^2 \frac{\theta_3^4 \theta_0^4}{\theta_3^4} = \pi^2 \theta_0^4.$$

Выразим оставшиеся функции q_2 и q_0 :

$$\begin{aligned} q_2 &= -(1 + q_1) = - \left(1 + \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 v \right) = \frac{-1}{k'^2} \operatorname{dn}^2 v, \\ q_0 &= -(t + q_1) = - \left(- \frac{k^2}{k'^2} + \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2 v \right) = \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{sn}^2 v. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{P}_3 = q_1 q_2 q_0 = -\frac{k^4}{k'^6} \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 v \operatorname{dn}^2 v.$$

Выберем знак корня:

$$\sqrt{\mathcal{P}_3} = +i \frac{k^2}{k'^3} \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v.$$

Поскольку (при постоянном τ)

$$dq_1 = -2 \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn} v \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v dv, \quad v(Q_0) = 0, \quad v(Q_1) = 2K = \pi \theta_3^2,$$

то

$$\int_{q_1(Q_0)}^{q_1(Q_1)} \frac{dq_1}{\sqrt{\mathcal{P}_3}} = -\frac{2k^2 k'^3}{ik'^2 k^2} \int_0^{2K} dv = 2ik' \cdot 2K = 2\pi i \theta_0^2. \quad (82)$$

Подставив значение $d\tau_{1-2}/d\tau$ в формулу (70), где вместо $\chi_k^* q_1$ поставлена сдвинутая на полупериод ω_k функция q_1 (формула (81)), получим

$$2\pi i F \frac{d\tau_{1-2}}{d\tau} = \sum_{j=1}^3 a_{jj} \wp(u - \omega_j) + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}}) \wp(u).$$

Итак, уравнение Пенлеве VI принимает вид

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} = \sum_{j=1}^3 a_{jj} \wp(u - \omega_j) + (a_{00} - \sqrt{2a_{00}}) \wp(u) + \tilde{\phi},$$

где

$$\tilde{\phi} := d\phi \wedge du + d\phi^2 \wedge d\tau / (4\pi i)$$

(см. формулу (78)). Заметим, что этот член возник из-за явной зависимости от τ замены $q_1 \rightarrow u$ (формула (76)). Последующую выкладку можно рассматривать как иллюстрацию сложности “мира модулярных функций” по сравнению с “миром рациональных функций” – аналогичное вычисление, связанное с явной зависимостью замены от t , но в рациональных функциях, уместается в одну строчку:

$$0 = d \log q_t \wedge dq_t \implies \frac{dq_t}{q_t} \wedge dq_1 + \frac{dq_t}{q_t} \wedge dt = 0.$$

ТЕОРЕМА 14. *Нормированный на единицу (т.е. $\oint du = 1$) абелев интеграл (1-го рода) $u \in \mathbb{C}$ зависит от модуля тора τ следующим образом:*

$$\phi := -2\pi i \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{q_1} u = \log' \theta_1(u | \tau). \quad (83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При постоянном значении q_1

$$0 = d \log q_1 = \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{\tau} \log q_1 du \Big|_{q_1} + \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_u \log q_1 d\tau \Big|_{q_1},$$

следовательно,

$$\phi = 2\pi i \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_u \log q_1 \left(\left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_\tau \log q_1 \right)^{-1}.$$

Функция q_1 имеет представление (81):

$$q_1 = \frac{\theta_2^2}{\theta_0^2} \frac{\theta_2^2(u)}{\theta_0^2(u)} = \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}^2(v, k),$$

так что доказательство теоремы сводится к проверке тождества, содержащего тэта-функции. Применим (79). Учитывая, что $\theta'_0 = \theta'_2 = 0$ и

$$\left. \frac{d}{du} \right|_\tau \log q_1 = 2 \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)},$$

получим

$$2\phi = 4\pi i \frac{\frac{\partial}{\partial \tau} \log \frac{\theta_2 \theta_2(u)}{\theta_0 \theta_0(u)}}{\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\theta_2 \theta_2(u)}{\theta_0 \theta_0(u)}} = \frac{\log'' \frac{\theta_2}{\theta_0}}{\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}} + \log' \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} + \log' \theta_2(u) \theta_0(u)$$

$$\text{и, поскольку } \log' \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} = \log' \frac{\theta_1(u) \theta_3(u)}{\theta_0(u) \theta_2(u)},$$

$$2\phi = 2 \log' \theta_1(u) + \frac{\log'' \frac{\theta_2}{\theta_0} + \left(\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} \right) \left(\log' \frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)} \right)}{\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)}}.$$

Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Функции

$$\log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} \quad \text{и} \quad \log' \frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)}$$

имеют полюсы и нули в полупериодах тора, причем там, где у одной из них нуль, у другой – полюс, так что их произведение от u не зависит – функция только τ . Вычислим эту функцию

$$\begin{aligned} \log' \frac{\theta_2(u)}{\theta_0(u)} \log' \frac{\theta_3(u)}{\theta_1(u)} &= -(2K)^2 \left(\frac{d}{dv} \log \operatorname{cn} v \right) \frac{d}{dv} \log \operatorname{cn}(v + K) \\ &= -4K^2 \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v} \frac{\operatorname{sn}(v + K) \operatorname{dn}(v + K)}{\operatorname{cn}(v + K)} = 4K^2, \end{aligned}$$

в то же время

$$\log'' \frac{\theta_2}{\theta_0} = (2K)^2 \frac{d^2}{dv^2} \log \operatorname{cn} v \Big|_{v=0} = -4K^2 \frac{d}{dv} \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v} \Big|_{v=0} = -4K^2,$$

теорема доказана.

Продифференцируем (79) по u . Поскольку $\phi = \log' \theta_1(u)$, получим

$$d\phi \wedge du + d\phi^2 \wedge \frac{d\tau}{4\pi i} = -d \log'' \theta_1(u) \wedge \frac{d\tau}{4\pi i}.$$

Именно при *таком* выборе переменных u и τ разность

$$4\pi i \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \frac{\partial \phi^2}{\partial u}$$

оказалась эллиптической функцией $-4\pi i \log'' \theta_1(u)$. Так как $\log'' \theta_1(u)$ и $-\wp(u)$ имеют одинаковые периоды и особенности, то они отличаются на константу, и окончательный вид формы Ω_{PVI} получается таким:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PVI}} &= dp \wedge du - d \left(\frac{p^2}{2} - \mathcal{F}(u, \tau) \right) \wedge \frac{d\tau}{2\pi i}, \\ \mathcal{F}(u, \tau) &= \sum_{j=1}^3 a_{jj} \wp(u - \omega_j) + \left(\sqrt{a_{00}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \wp(u), \\ p &= iP \frac{\theta_3^2 \theta_2^2}{\theta_0^4} \frac{\theta_1(u) \theta_2(u) \theta_3(u)}{\theta_0^3(u)} 2\pi i \theta_0^2 - \log' \theta_1(u) \\ &= -2\pi P \frac{\theta_3^2 \theta_2^2}{\theta_0^2} \frac{\theta_1(u) \theta_2(u) \theta_3(u)}{\theta_0^3(u)} - \log' \theta_1(u) \\ &= - \left(p_1 + \frac{\sqrt{a_{11}/2}}{q_1} - \frac{\sqrt{a_{22}/2}}{q_2} - \frac{\sqrt{a_{00}/2}}{q_t} \right) \\ &\quad \times 2\pi \frac{\theta_3^2 \theta_2^2}{\theta_0^2} \frac{\theta_1(u) \theta_2(u) \theta_3(u)}{\theta_0^3(u)} - \log' \theta_1(u), \\ u &= \frac{1}{2\pi i \theta_0^2} \int_{-t}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{q(q+1)(q+1)}}. \end{aligned} \tag{84}$$

Уравнение Пенлеве VI принимает вид

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} u = \sum_{j=1}^3 a_{jj} \wp'(u - \omega_j) + \left(\sqrt{a_{00}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \wp'(u), \tag{85}$$

где функция $\wp'$ строится по решетке периодов $2\omega_1 = 1$, $2\omega_3 = \tau$.

7. Поверхность начальных данных PVI (поверхность Окамoto) и определяющее многообразие

7.1. Симплектическая склейка квадрик – связь между координатами, построенными с помощью разных сопутствующих базисов. В п. 5.3 многообразие тетраэдров $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$ было покрыто тремя (см. формулу (59)) областями-окрестностями $U(\dots)$, каждая из которых симплектически изоморфна аффинной квадрике $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Эквивалентной, правда менее симметричной, является следующая переформулировка процедуры построения $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$.

Рассмотрим одну из квадрик, например $\mathcal{C}_{a_{11}}$, и “приклеим” к ней остальные $\mathcal{C}_{a_{22}}$ и $\mathcal{C}_{a_{33}}$, т. е. отождествим некоторые точки $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i = 2, 3$. Выделим в $\mathcal{C}_{a_{11}}$ и $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ открытые множества (окрестности) $V_{1,i} \subset \mathcal{C}_{a_{11}}$ и $V_{i,1} \subset \mathcal{C}_{a_{ii}}$ и зададим симплектические изоморфизмы

$$\psi_{1i}: V_{1,i} \xrightarrow{\sim} V_{i,1}, \quad i = 2, 3.$$

Это позволит определить $M_{a_{i\bar{i}}}$ как абстрактное многообразие – симплектические карты ϕ_i и ϕ_i^* квадрики $\mathcal{C}_{a_{ii}}$ (см. определение 2 на с. 80) в композиции с ψ_{1i} дадут функции переклейки многообразия $M_{a_{ii}}$:

$$\mathbb{C}_{p_1 q_1}^2 \supset \phi_1^{-1}(V_{1,i} \cap U) \xrightarrow{\phi_1} V_{1,i} \cap U \xrightarrow{\psi_{1i}} V_{i,1} \cap U \xrightarrow{\phi_i^{-1}} \mathbb{C}_{p_i q_i}^2.$$

Эта схема показывает, как действует функция переклейки $\phi_i^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1$, отображающая друг в друга некоторые области в $\mathbb{C}^2$. Аналогичным образом строятся и остальные:

$$(\phi_i^*)^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1, \quad \phi_i^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1^*, \quad (\phi_i^*)^{-1} \circ \psi_{1i} \circ \phi_1^*.$$

Заметим, что мы работаем с алгебраическими окрестностями, т. е. “очень большими” – дополнение в $M_{a_{i\bar{i}}}$ к любой из областей $U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{ii}}, j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, *меньшей размерности*, чем размерность самого $M_{a_{i\bar{i}}}$. Любая такая область покрывает всю *поверхность* $M_{a_{i\bar{i}}}$ за исключением нескольких *линий* на ней.

Приведенные в предыдущем разделе формулы явным образом устанавливают изоморфизм между $U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$ и $\mathcal{C}_{a_{11}}$, т. е. всем $M_{a_{i\bar{i}}}$ за вычетом трех линий: на точках (наборах $A^{(\bar{i})}$) одной из них $\sigma_- = \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})}$ является для $\text{ad}_{A^{(2)}}$ собственным вектором с собственным числом $\sqrt{2a_{22}}$, а две остальные – это компоненты $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}^{-1}(\langle A^{(3)}, \sigma^{(-\sqrt{2a_{00}})} \rangle = 0)$.

Развиваемая *сейчас* точка зрения (на построение $M_{a_{i\bar{i}}}$) состоит в том, что мы с помощью отображений $\psi_{1,2}$ и $\psi_{1,3}$, приклеиваем к $\mathcal{C}_{a_{11}}$ эти линии (дивизоры).

Нам это нужно для того, чтобы аналогичным образом приклеить (теперь уже ко всему $M_{a_{i\bar{i}}}$) еще один дивизор, назовем его $\mathcal{D}^t$, точкам которого уже не будут соответствовать никакие тетраэдры (наборы $A^{(\bar{i})}$, или уравнения вида (1)). Забегая вперед, скажем, что точкам этого дивизора будут соответствовать специальным образом уходящие на бесконечность наборы $A^{(\bar{i})}: A_{jk}^{(i)} \rightarrow \infty$. Словосочетание “специальным образом” тут означает, что на матричные коэффициенты $A_{jk}^{(i)}$ будут наложены некоторые зависящие от t ограничения.

Эти ограничения (связи) будут такими, что через соответствующие координатные функции $(p(t), q(t))$, $p = p(A^{(\bar{i})})$, $q = q(A^{(\bar{i})})$, сингулярные при $t = t_0$, решения $(p_{t_0}^{\text{sing}}(t), q_{t_0}^{\text{sing}}(t))$ системы Пенлеве VI будут выражаться гладким образом. Другими словами, новая, “руками” построенная, область будет нужна для описания сингулярных при $t = t_0$ решений системы Пенлеве VI.

7.1.1. Склеивка $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$. Выясним, как к $\mathcal{C}_{a_{11}}$ приклеивается $\mathcal{C}_{a_{33}}$, параметризующая слой $\langle A^{(3)}, \sigma^{-\sqrt{2a_{00}}} \rangle = 0$ отображения $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}$, где q_1 и q_2 имеют полюсы.

Пусть X_i – координаты на $\mathcal{C}_{R_x^2}$, Y_i – координаты на $\mathcal{C}_{R_y^2}$:

$$\mathcal{C}_{R_x^2}: \quad X_1X_2 + X_3^2 = \frac{R_x^2}{2}, \quad \mathcal{C}_{R_y^2}: \quad Y_1Y_2 + Y_3^2 = \frac{R_y^2}{2}. \quad (86)$$

Если, скажем, $R_x^2 \neq 0$, то задание (X_1, X_2, X_3) эквивалентно заданию точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$; если же $R_x^2 = 0$, то при $X_1 = X_2 = X_3 = 0$ нужно еще задать $x_1 : x_2 : x_3 \in \mathbb{CP}^2$ с коники $x_1x_2 + x_3^2 = 0$. отождествим точку $(X_1, X_2, X_3) \in \mathcal{C}_{R_x^2}$ с точкой $(Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathcal{C}_{R_y^2}$, если

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{Y_1}, \\ X_3 &= -Y_3 - C, \quad C \in \mathbb{C}, \\ X_2 &= \frac{R_x^2/2 - X_3^2}{X_1} = Y_1 \left(\frac{R_x^2}{2} - (Y_3 + C)^2 \right), \end{aligned} \quad (87)$$

т. е. одной точке будущего многообразия $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$ будут соответствовать точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$, связанные (87).

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Преобразование (87) бирационально и инволютивно – обратное получается заменой $X \rightleftharpoons Y$.

В канонических переменных (p, q) и (p^*, q^*) склейка (87) записывается так:

$$q_x = \frac{1}{q_y}, \quad p_x = -q_y \left(p_y q_y + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} + \sqrt{\frac{R_y^2}{2}} + C \right). \quad (88)$$

Мы снабдили p и q соответствующим квадратичным индексом. Последнее равенство – следствие того, что

$$\begin{aligned} X_3 &= p_x q_x + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} = - \left(p_x^* q_x^* + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} \right) \\ &= -(Y_3 + C) = - \left(p_y q_y + \sqrt{\frac{R_y^2}{2}} + C \right) = p_y^* q_y^* + \sqrt{\frac{R_y^2}{2}} - C. \end{aligned}$$

Очевидно, что $dp_x \wedge dq_x = dp_y \wedge dq_y$ – склейка симплектическая. Многообразие $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2}$ можно трактовать как одну из квадрик, например $\mathcal{C}_{R_x^2}$, с двумя приклеенными на бесконечности по X_1 линиями (простыми дивизорами):

- 1) если $R_y \neq 0$, то это $Y_1 = 0$, $Y_3 = \pm \sqrt{R_y^2/2}$, $Y_2 \in \mathbb{C}$;
- 2) если $R_y = 0$, то это $Y_1 = Y_3 = 0$, $Y_2 \in \mathbb{C}$ и

$$Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0, \quad y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -p^2 : p = (p^*)^2 : -1 : p^*.$$

К точке $Y_1 = 0$, $Y_3 = \pm\sqrt{R_y^2/2}$, $Y_2 = \text{const} \neq 0$ добавленного дивизора стремится точка $(X_1(S), X_2(S), X_3(S))$, $S \rightarrow 0$, квадрики $\mathcal{C}_{R_x^2}$ такая, что

$$\begin{aligned} X_1(S) &= \frac{1}{S} \frac{Y_2}{2\sqrt{R_y^2/2} - S} \rightarrow \infty, \\ X_2(S) &= \frac{S}{Y_2} \left(2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} - S \right) \left(\frac{R_x^2}{2} - \left(\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} - S \pm C \right)^2 \right) \rightarrow 0, \\ X_3(S) &= \mp \left(\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} - S \pm C \right) \rightarrow \mp \sqrt{\frac{R_y^2}{2}}. \end{aligned}$$

Именно такой получится зависимость $X_i(S)$, если положить

$$Y_3 = \pm \left(\sqrt{\frac{R_x^2}{2}} - S \right).$$

В этом случае

$$0 = Y_1 Y_2 + Y_3^2 - \frac{R_y^2}{2} = Y_1 Y_2 - 2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} S + S^2$$

и, значит,

$$Y_1 = \frac{S}{Y_2} \left(2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} - S \right) \rightarrow 0.$$

Если же $R_y = 0$ и линии, соответствующие $+\sqrt{R_y^2/2}$ и $-\sqrt{R_y^2/2}$, совпадают, то к точке $Y_1 = Y_2 = Y_3 = 0$, $y_1 : y_2 : y_3 = 1 : -p^2 : p$, второго добавленного дивизора (раздутой вершины конуса) стремится $(X_1(S), X_2(S), X_3(S))$:

$$\begin{aligned} X_1(S) &= \frac{1}{S} \rightarrow \infty, \\ X_2(S) &= S \left(\frac{R_x^2}{2} - (pS + C)^2 \right) \rightarrow 0, \\ X_3(S) &= -pS - C \rightarrow -C. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Имеется естественное отображение

$$\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_C^Q \mathcal{C}_{R_y^2} \rightarrow \mathbb{CP}^1 : (X_1, X_2, X_3) \rightarrow (X_1 : 1) = (1 : Y_1) \longleftarrow (Y_1, Y_2, Y_3).$$

Общим слоем его являются параболы, лежащие на $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$:

$$\begin{aligned} \bigcup_{X_2 \in \mathbb{C}} X_1 X_2 + X_3^2 &= \frac{R_x^2}{2}, & X_1 &= \text{const} \in \mathbb{C}, \\ \bigcup_{Y_2 \in \mathbb{C}} Y_1 Y_2 + Y_3^2 &= \frac{R_y^2}{2}, & Y_1 &= \text{const} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

На особенных слоях $X_3^2 = R_x^2/2$ и $Y_3^2 = R_y^2/2$ параболы вырождаются в пары прямых:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0, & X_3 &= \pm \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}, & X_2 &\in \mathbb{C}, \\ Y_1 &= 0, & Y_3 &= \pm \sqrt{\frac{R_y^2}{2}}, & Y_2 &\in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

7.1.2. Склейка $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$. Пусть $t \in \mathbb{C}$ – некоторый параметр. Очевидно, что если склеить точки квадрик (86), сдвинув их q -координаты на постоянную величину “ t ”, а p -координаты оставить неизменными: $q_x = q_y + t$, $p_x = p_y$, то такая склейка будет симплектической: $dp_x \wedge dq_x = dp_y \wedge dq_y$. Из соображений симметрии, однако, нам будет удобнее перенести все переменные в одну часть равенства (поменяв знаки), что, конечно же, не изменит сути происходящего. отождествим точки $\mathcal{C}_{R_x^2}$ и $\mathcal{C}_{R_y^2}$, чьи координаты удовлетворяют равенствам

$$X_1 + Y_1 + t = 0, \quad \frac{X_3 - \sqrt{R_x^2/2}}{X_1} + \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1} = 0,$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} X_3 &= p_x X_1 + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} = -p_y X_1 + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} = p_y(Y_1 + t) + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}, \\ X_2 &= -p_x \left(X_3 + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} \right) = p_y \left(p_y(Y_1 + t) + 2\sqrt{\frac{R_x^2}{2}} \right). \end{aligned}$$

Получаем закон склейки

$$p_x + p_y = 0, \quad q_x + q_y + t = 0, \quad (89)$$

или

$$\begin{aligned} X_1 &= -(Y_1 + t), \\ X_2 &= \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1} \left(\frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1} (Y_1 + t) + 2\sqrt{\frac{R_x^2}{2}} \right), \\ X_3 &= \frac{Y_3 - \sqrt{R_y^2/2}}{Y_1} (Y_1 + t) + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}. \end{aligned} \quad (90)$$

Это преобразование инволютивно – обратное получится заменой букв $X \rightleftharpoons Y$.

Отметим, что линии, получившиеся из раздутых вершин, если таковые существуют, склеиваются регулярным образом (биективно), потому что в окрестностях таких линий координатами являются (p, q) -координаты, а они преобразуются регулярно (биективно):

$$q_x = -q_y - t, \quad p_x = -p_y.$$

Геометрически склейка (90) означает, что сечения обеих квадрик, т. е. параболы

$$\begin{aligned} X_2 \text{ const}_x + X_3^2 &= \frac{R_x^2}{2}, & X_1 &= \text{const}_x, \\ Y_2 \text{ const}_y + Y_3^2 &= \frac{R_y^2}{2}, & Y_1 &= \text{const}_y = -\text{const}_x - t \end{aligned}$$

отождествляются между собой. Там, где $X_1 Y_1 \neq 0$, многообразие $\mathcal{C}_{R_x^2} \uplus_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$ покрыто обеими квадриками. Над значением $X_1 = 0$ “висят” особые слои – это $X_3 = \pm \sqrt{R_x^2/2}$, $X_2 \in \mathbb{C}^2$, либо $X_3 = 0$, $X_2 \in \mathbb{C}$ и $X_1 = X_2 = X_3 = 0$,

$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -p^2 : p$, $x_1 : x_3 \in \mathbb{CP}^1$. Одна из этих линий “приклеена” к $\mathcal{C}_{R_y^2}$ – это $X_3 = \sqrt{R_x^2/2} \neq 0$:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -t, \\ Y_2 &= \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} \left(\frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} (X_1 + t) + 2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} \right) \\ &= \frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}} \left(\frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}} t + 2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} \right), \\ Y_3 &= \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} (X_1 + t) + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}} = \frac{-X_2}{2\sqrt{R_x^2/2}} t + \sqrt{\frac{R_x^2}{2}}, \end{aligned}$$

либо (если $R_x = 0$) – раздутая вершина конуса:

$$\begin{aligned} Y_1 &= -t - X_1, \\ Y_2 &= p \left(p(X_1 + t) + 2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} \right) = p \left(pt + 2\sqrt{\frac{R_y^2}{2}} \right), \\ Y_3 &= p(X_1 + t) = pt, \end{aligned}$$

а другая ($X_3 = -\sqrt{R_x^2/2}$, $X_1 = 0$, $X_2 \in \mathbb{C}$) “не приклеена” – покрыта только одной квадратикой $\mathcal{C}_{R_x^2}$.

Подытожим.

У $\mathcal{C}_{R_x^2} \cup_t^T \mathcal{C}_{R_y^2}$ над точкой $X_1 = 0$ всегда находится один раздутый дивизор – прямая, параметризованная значениями $X_2 \in \mathbb{C}$, или $\mathbb{CP}^1$, параметризованная $x_1 : x_3$.

Ее точки не принадлежат $\mathcal{C}_{R_y^2}$, потому что на ней

$$\begin{aligned} Y_2 &= \frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} \left(\frac{-X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} (X_1 + t) + 2\sqrt{\frac{R_x^2}{2}} \right) \\ &\sim t \left(\frac{X_2}{X_3 + \sqrt{R_x^2/2}} \right)^2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

для всех $X_2 \neq 0$, $X_3 \mapsto -\sqrt{R_x^2/2}$ независимо от значений R_x, R_y .

Аналогично и над $Y_1 = 0$ всегда существует прямая (иногда – проективная), добавленная к $\mathcal{C}_{R_x^2}$.

7.2. Поверхность Окамото. Определяющее многообразие. Система Пенлеве VI задана как поле направлений в $M_{a_{i\bar{i}}} \times \Lambda$. Искомое направление – направление вырождения формы

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PVI}} &= dp_1 \wedge dq_1 - d \left(q_1 q_2 q_t p_1^2 + 2p_1 \left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} q_2 q_t - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 q_t - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} q_1 q_2 \right) \right. \\ &\quad \left. + q_t \left(\frac{a_{33}}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 \right) \right) \wedge d\tau_{1-2} \\ &:= dp_1 \wedge dq_1 - dH_{1/3} \wedge d\tau_{1-2}. \end{aligned} \tag{91}$$

Это – определение (обозначение) гамильтониана $H_{1/3}$. Индекс “1/3” символизирует, что q -координата в этом представлении (карте) равна нулю в Q_1 и бесконечности в Q_3 : $q = q_1(Q_1) = 0$, $q_1(Q_3) = \infty$.

Формула (91) задает векторное поле в той части $M_{a_{i\bar{i}}}$, в которой p_1 и q_1 являются координатами.

В разделе 4 (определения 1 и 2) были введены большие координатные окрестности – аффинные квадрики $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, $i = 1, 2, 3$. В частности, были построены координаты

$$X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, X_3^{(i)}: \quad X_1^{(i)} X_2^{(i)} + (X_3^{(i)})^2 = \frac{a_{ii}}{2}.$$

Здесь верхний индекс в скобках показывает, на какой именно квадрике это координаты; занумерованы они так, что $X_1^{(i)} = 0$ там, где $q_i = 0$. Положим $i = 1$. Эти координаты покрывают прообраз окрестности точки $q_1 = 0$ отображения $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}: M_{a_{i\bar{i}}} \rightarrow L_Q^0 \sim \mathbb{CP}^1$ – все $M_{a_{i\bar{i}}}$ кроме слоя $Q_{-\sqrt{2a_{00}}}$ над Q_3 и одной из двух компонент слоя над Q_2 . Запишем гамильтониан $H_{1/3}$ в координатах $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}$. Несмотря на то, что q_1, p_1 выражаются через $X_i^{(1)}$ лишь рационально (имеется $X_1^{(1)}$ в знаменателе), гамильтониан $H_{1/3}(p_1, q_1)$ обязан быть многочленом от $X_i^{(1)}$ – это линейная комбинация функций a_{ij} , не имеющих особенностей на всем $M_{a_{i\bar{i}}}$, в частности на $U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3)$, на всей области определения q_1, p_1

$$\begin{aligned} q_1 &= X^{(1)}, \quad p_1 = \left(X_3^{(1)} - \frac{1}{X_1^{(1)}} \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right), \\ X_3^{(1)} &= p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}}, \quad X_2^{(1)} = -p_1 \left(p_1 q_1 + 2 \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right), \\ H_{1/3} &= q_2 q_t \left(p_1 \left(p_1 q_1 + 2 \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) \right) - 2 p_1 q_1 \left(\sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_t + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} q_2 \right) \\ &\quad - (q_1 + t) \left(\frac{a_{33}}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 \right) \\ &= -(X_1^{(1)} + 1)(X_1^{(1)} + t)X_2^{(1)} \\ &\quad + 2 \left(X_3^{(1)} - \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) \left(\sqrt{\frac{a_{22}}{2}} (X_1^{(1)} + t) + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} (X_1^{(1)} + 1) \right) \\ &\quad - (X_1^{(1)} + t) \left(\frac{a_{33}}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Обратим внимание на симметрию выражения (91) относительно замены индекса у переменной $q_{\dots}$. Сделаем замену $q_1 \rightarrow q_t$: $q_t = -(q_1 + t)$. Если ввести переменную $p_t := -p_1$, канонически сопряженную q_t , т. е.

$$dp_1 \wedge dq_1 = (dp_t \wedge dq_t)|_{t=\text{const}},$$

то форма Ω_{PVI} сохранит вид

$$\Omega_{\text{PVI}} = dp_t \wedge dq_t - d(p_t^2 \mathcal{P}_3 + 2p_t \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_1) \wedge d\tau_{1-2},$$

где $\mathcal{P}_i$ – опять многочлен степени “ i ” по q_t . Вследствие явной зависимости замены $q_1 \rightarrow q_t$ от t :

$$q_1 + q_t + t = 0, \quad p_1 + p_t = 0, \quad (93)$$

к гамильтониану $H_{1/3}$ добавится нетривиальное слагаемое.

Зависимость замены от времени имеет специальный *аддитивный* вид, т. е. “старое q ” + “новое q ” + “функция времени” = 0, поэтому возникающий в гамильтониане член будет линеен по импульсу – войдет в $\mathcal{P}_2$, действительно,

$$dp_1 \wedge dq_1 = dp_t \wedge d(q_t + t) = dp_t \wedge dq_t - d\left(\frac{dt}{d\tau_{1-2}}\right) p_t \wedge d\tau_{1-2}.$$

Отметим, что именно этот член дает добавку к параметру δ уравнения Пенлеве VI (остальные три параметра это просто a_{ii} , см. с. 103). Вычислим $\mathcal{P}_2$. Поскольку $dt/d\tau_{1-2} = -t(t-1)$, $q_1 = q_1(Q_t) - q_t$, $q_2 = q_2(Q_t) + q_t$ (так как $q_1(Q_t) = -t$, $q_2(Q_t) = t-1$) и

$$q_1 q_2 = q_1(Q_t) q_2(Q_t) + q_t (q_1(Q_t) - q_2(Q_t) - q_t) = -t(t-1) - q_t(q_t + 2t - 1),$$

то

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2 &= 2p_1 \left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} q_2 q_t - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 q_t - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} q_1 q_2 \right) + p_t \frac{dt}{d\tau_{1-2}} \\ &= 2q_1 q_2 p_t \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad - 2p_t q_t \left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 + \frac{q_t}{2} + \frac{1}{2} (q_2(Q_t) - q_1(Q_t)) \right). \end{aligned}$$

Обозначим через $H_{t/3}$ гамильтониан в переменных p_t, q_t :

$$\Omega_{\text{PVI}} = dp_t \wedge dq_t - dH_{t/3} \wedge d\tau_{1-2}.$$

Аналогично (92) получим, что гамильтониан $H_{t/3}$ – многочлен от координат $X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, X_3^{(t)}$ на квадрике $\mathcal{C}_{a'_{00}}$:

$$X_1^{(t)} X_2^{(t)} + (X_3^{(t)})^2 = \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} - \frac{1}{2} \right)^2 := \frac{a'_{00}}{2}, \quad a'_{00} := \left(\sqrt{a_{00}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2,$$

где $X_i^{(t)}$ связаны с координатами q_t, p_t стандартным образом:

$$X_1^{(t)} = q_t, \quad X_2^{(t)} = -p_t \left(p_t q_t + 2\sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} \right), \quad X_3^{(t)} = p_t q_t + \sqrt{\frac{a'_{00}}{2}}.$$

Через $\sqrt{a'_{00}/2}$ обозначено одно из значений квадратного корня из $a'_{00}/2$:

$$\sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} := \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Для гамильтониана $H_{t/3}$ получаем выражение

$$\begin{aligned}
 H_{t/3} &= q_1 q_2 \left(p_t \left(p_t q_t + 2 \sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} \right) \right) \\
 &\quad - 2 p_t q_t \left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} q_2 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 + \frac{q_t}{2} + \frac{q_2(Q_t) - q_1(Q_t)}{2} \right) \\
 &\quad + q_t \left(\frac{a_{33}}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 \right) \\
 &= (X_1^{(t)} + t)(X_1^{(t)} + t - 1)X_2^{(t)} \\
 &\quad - 2 \left(X_3^{(t)} - \sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} \right) \left(\left(\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} + \frac{1}{2} \right) X_1^{(t)} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} (t - 1) + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} t + t - \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + X_1^{(t)} \left(\frac{a_{33}}{2} - \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 \right). \tag{94}
 \end{aligned}$$

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство.

УТВЕРЖДЕНИЕ 19. Точки квадрик $\mathcal{C}'_{a'_{00}}$ и $\mathcal{C}_{a_{11}}$ отождествляются посредством равенств (93), т.е. это – симплектическая склейка $\mathcal{C}_{a_{11}} \uplus_t^T \mathcal{C}'_{a'_{00}}$.

Как мы знаем, при этой склейке к квадрике $\mathcal{C}_{a_{11}}$ (к поверхности $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$) над параболой “ $q_1 = -t = \text{const}$ ” добавляется дивизор – линия $p_1 = \infty$, $p_1^* = 1/p_1 = 0$, попасть в точки которой можно, уходя на бесконечность

$$p_1 \rightarrow \infty, \quad q_1 \rightarrow -t \quad \text{по } \mathcal{C}_{a_{11}} \sim U(-\sqrt{2a_{00}}; \sqrt{2a_{22}}, 3) \subset M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}$$

специальным образом, а именно, так, чтобы величина $q_t^* := -p_1(p_1(q_1 + t) + 2\sqrt{a'_{00}/2})$ оставалась конечной. Обозначим этот дивизор $\mathcal{D}^t$.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. Добавленный дивизор $\mathcal{D}^t$ соответствует вырождающимся наборам $A^{(\bar{i})}$ – обращающимся в бесконечность в момент t решениям Пенлеве VI.

Определим многообразие $\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ – естественную область определения системы Пенлеве VI (расширенное фазовое пространство), добавив к $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T = M_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \times T$ линии $\mathcal{D}^t$ – над каждой $t \in T$ приклеим к $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ свою линию $\mathcal{D}^t$.

Построенное таким образом комплексно-трехмерное алгебраическое многообразие $\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ называется *определяющим многообразием уравнения Пенлеве VI*.

Объяснением к этому названию является теорема 15, которую мы докажем ниже.

На $\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ естественным образом определено отображение

$$Q_{-\sqrt{2a_{00}}}^{\mathcal{M}}: \mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T \rightarrow L_Q^{(0)} \sim \mathbb{CP}^1.$$

Пересечение его слоя $(Q_{-\sqrt{2a_{00}}}^{\mathcal{M}})^{-1}(0: q_1: q_2: q_3)$ и симплектического листа $t = t_0 = \text{const}$ в $\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ – это по построению комплексно-двумерное многообразие $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}} \uplus_{t_0}^T \mathcal{C}'_{a'_{00}}$; оно называется *поверхностью начальных данных уравнения Пенлеве VI*, или *поверхностью Окамото* (см. [16], [8]). Обозначим ее $M_{a_{\bar{i}\bar{i}}, t}$.

Рассмотрим квадрику $\mathcal{C}_{R_0^2}$ и набор квадрик $\mathcal{C}_{R_i^2}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, которые мы приклеим к $\mathcal{C}_{R_0^2}$ симплектическими склейками $\natural_{t_i}^T$ или $\natural_{C_i}^Q$ с какими-нибудь t_i , $C_i \in \mathbb{C}$. Обозначим получившееся, очевидно симплектическое, многообразие

$$\mathcal{C}_{R_0^2}(\natural^{(1)}\mathcal{C}_{R_1^2})(\natural^{(2)}\mathcal{C}_{R_2^2}) \cdots (\natural^{(3)}\mathcal{C}_{R_3^2}),$$

где $\natural^{(i)}$ – это или $\natural_{t_i}^T$, или $\natural_{C_i}^Q$. Скобки $(\natural^{(i)}\mathcal{C}_{R_i^2})$ показывают, как $\mathcal{C}_{R_i^2}$ приклеиваются именно к $\mathcal{C}_{R_0^2}$. Конечно же, все остальные квадрики $\mathcal{C}_{R_i^2}$ и $\mathcal{C}_{R_j^2}$ тоже окажутся симплектически склеены друг с другом, но как именно – нам сейчас не важно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 20. *Поверхность Окамото $M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}$ – симплектический лист системы Пенлеве VI может быть определен и так:*

$$M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t} := \mathcal{C}_{a_{11}}(\natural_1^T\mathcal{C}_{a_{22}})\left(\natural_{\sqrt{a_{00}/2}+\sqrt{a_{22}/2}}^Q\mathcal{C}_{a_{33}}\right)(\natural_t^T\mathcal{C}_{a'_{00}}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 26. Операции склейки $\natural_t^T$ и $\natural_C^Q$ квадрик определены нами в некоторых конкретных координатах $X_1^{(i)}$, $X_2^{(i)}$, $X_3^{(i)}$; мы указали способ построения таких координат (через построение стандартного сопутствующего базиса) на квадриках $\mathcal{C}_{a_{ii}}$, соответствующих вершинам $A^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, а также на $\mathcal{C}_{a'_{00}}$, соответствующей растущим решениям.

ЗАМЕЧАНИЕ 27. Каждая из квадрик $\mathcal{C}_{a_{11}}$, $\mathcal{C}_{a_{22}}$, $\mathcal{C}_{a_{33}}$, $\mathcal{C}_{a'_{00}}$ покрывается парой стандартных симплектических карт U_i и U_i^* с координатами (p, q) и (p^*, q^*) , связанных между собой преобразованиями

$$p^* = \frac{1}{p}, \quad q^* = -p\left(pq + 2\sqrt{\frac{a'_{ii}}{2}}\right); \quad a'_{ii} := a_{ii}, \quad i = 1, 2, 3,$$

а между разными квадриками – преобразованиями склеек (88), (89). Таким образом получается традиционное определение (см. [16], [8]) многообразия начальных данных как абстрактного многообразия, определенного через функции переклейки.

Многообразие $\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ определяется как несвязное объединение всех $M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}$

$$\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T = \bigsqcup_{t \in T} M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}.$$

На $\mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T$ определена функция

$$t: \mathcal{M}_{a_{\bar{i}\bar{i}}}^T \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Прообразом точки t является симплектический лист системы Пенлеве VI – поверхность Окамото $M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}$. Гамильтоново поле направлений системы Пенлеве VI задает симплектические изоморфизмы (это мы доказывать не будем) между $M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}$ при разных t ; при таком изоморфизме q -координата точки $(p(t), q(t))$, соответствующей какой-нибудь фиксированной точке (q_0, p_0) на листе $t = t_0$, удовлетворяет уравнению Пенлеве VI.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем поле направлений на (алгебраическом) многообразии $\mathcal{M}$ алгебраическим, если координаты прямых в касательном к $\mathcal{M}$ расслоении $T\mathcal{M}$, задающих это поле, алгебраически связаны с алгебраическими координатами на $T\mathcal{M}$.

На нечетномерном многообразии M алгебраическое поле направлений может быть задано алгебраической внешней 2-формой $\Omega \subset \wedge^2 T^*M$ – замкнутой и максимально не вырожденной. Заметим, что форма Ω обязана быть вырожденной (это – следствие нечетномерности M), но мы требуем вырожденности по линейному подпространству в TM минимально возможной размерности (см. [32]) – по одномерному подпространству, т.е. по направлению. Чрезвычайно интересной представляется следующая теорема (см. [16], [8], [6]), которая позволяет свести некоторые (формально – все) вопросы исследования уравнения Пенлеве VI к исследованию алгебраического многообразия $\mathcal{M}_{a_{i\bar{i}}}^T$.

ТЕОРЕМА 15. *Поле направлений Пенлеве VI является единственным гладким алгебраическим полем направлений на $\mathcal{M}_{a_{i\bar{i}}}^T$.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сформулируем (и докажем) несколько вспомогательных утверждений.

Прежде всего докажем, что $\mathcal{M}_{a_{i\bar{i}}}^T$ содержит проективную кривую, т.е. существует гладкое непостоянное отображение некоторой компактной римановой поверхности в $\mathcal{M}_{a_{i\bar{i}}}^T$. Для этого рассмотрим функцию a_{0t} (она же – гамильтониан $-H_{1/3}$):

$$a_{0t} = -(a_{01} + ta_{03}).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 21. *В той части $M_{a_{i\bar{i}},t}$, где координатами являются p_t^* и q_t^* :*

$$\begin{aligned} p_t^* &:= \frac{1}{p_t} = -\frac{1}{p_1}, \\ q_t^* &:= -p_t \left(p_t q_t + 2\sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} \right) = \frac{1}{p_1} \left(\frac{q_1 + t}{p_1} + 2\sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} \right), \\ q_t &= -p_t^* \left(p_t^* q_t^* + 2\sqrt{\frac{a'_{00}}{2}} \right), \end{aligned}$$

функция a_{0t} как функция переменной p_t^* (считая $q_t^* = \text{const}$) имеет вдоль линии ($p_t^* = 0, q_t^* \in \mathbb{C}$) полюс (только) первого порядка с ненулевым вычетом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразим a_{0t} через p_t^* и q_t^* , заменив p_1 и q_1 (формула (63)) на p_t^* и q_t^* :

$$\begin{aligned} -a_{0t} &= \sqrt{2a_{00}} (1-t)\beta_1 + q_t \left(\frac{1}{p_t^*} \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 + \frac{a_{33}}{2} \right) - \sqrt{2a_{00}} t \left(\sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right), \end{aligned} \quad (95)$$

где

$$\beta_1 = p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} = \frac{t}{p_t^*} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} - \sqrt{2a'_{00}} - p_t^* q_t^*.$$

Так как $q_t = -p_t^*(p_t^*q_t^* + \sqrt{2a'_{00}})$ имеет корень первого порядка (по p_t^*), а β_1 – полюс первого порядка, то видно, что у a_{0t} действительно полюс только первого порядка, считаем вычет:

$$\sqrt{2a_{00}}(1-t)t - \sqrt{2a'_{00}}(t-t^2) = t(t-1)(\sqrt{2a'_{00}} - \sqrt{2a_{00}}) = -t(t-1).$$

Утверждение доказано, итак

$$a_{0t} = \frac{t(t-1)}{p_t^*} + \mathcal{P}(q_t^*, p_t^*),$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен.

УТВЕРЖДЕНИЕ 22. *Функция $f = f_{123} = \langle [A^{(1)}, A^{(2)}], A^{(3)} \rangle$ тоже имеет полюс на линии $p^* = 0$. Это полюс третьего порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через β_i , q_i , q'_i функция f записывается как определитель (49):

$$f = q'_0 \left(q_2 \beta_1 - \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} q_1 \right) - \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} q_2 q'_1 = q_2 \beta_1 q'_0 + \mathcal{P},$$

где $\mathcal{P}$ – многочлен от p_1 , q_1 , квадратичный по p_1 ;

$$\begin{aligned} q'_1 &= -p_1 \left(p_1 q_1 + 2\sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right), \\ q'_3 &= \frac{a_{33}}{2} - \left(p_1 q_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2, \\ q'_0 &= -(q'_1 + q'_3), \end{aligned}$$

где q'_i , $i = 0, 1, 3$, квадратичны по p_1 . Вычислим главный член:

$$\begin{aligned} q_2 \beta_1 q'_0 &= (1 + q_1) \beta_1 \left(\frac{1}{p_t^*} \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{11}}{2}} \right) - \left(\beta_1 + \sqrt{\frac{a_{00}}{2}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{2}} \right)^2 + \frac{a_{33}}{2} \right) \\ &= (1 + q_1) \frac{t}{p_t^*} \left(\frac{1}{p_t^*} \frac{t}{p_t^*} - \left(\frac{t}{p_t^*} \right)^2 \right) (1 + p_t^* \tilde{\mathcal{P}}) = \frac{q_2}{(p_t^*)^3} t^2 (t-1) (1 + p_t^* \tilde{\mathcal{P}}), \end{aligned}$$

где $\tilde{\mathcal{P}}$ – многочлен от q_1 (или, что то же, – от q_t) и p_t^* .

Так как

$$q_2 = -(q_1 + 1) = t - 1 + q_t = t - 1 - p_t^*(p_t^*q_t^* + \sqrt{2a'_{00}}),$$

то f действительно имеет вид

$$f = \frac{t^2(t-1)^2}{(p_t^*)^3} + \frac{1}{(p_t^*)^2} \tilde{\mathcal{P}}(p_t^*, q_t^*), \quad \tilde{\mathcal{P}}(\cdot, \cdot) - \text{многочлен.}$$

Таким образом, у f – полюс третьего порядка.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любого значения $q_t^* = c \in \mathbb{C}$ существуют такие $f_1 = f_1(c)$ и $f_2 = f_2(c)$, что функция

$$\phi_c(p_t^*, q_t^*) := f - \frac{1}{t(t-1)} a_{0t}^3 + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} \quad (96)$$

не имеет особенностей в точке $p_t^* = 0$, $q_t^* = c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, вычет у a_{0t} ненулевой и можно подобрать такие f_2 и f_1 , что ϕ_c не будет иметь особенностей в этой точке.

Докажем, что на $M_{a_{ii}, t}$ не существует функций, отличных от константы. Для этого рассмотрим какое-нибудь $c \in \mathbb{C}$ и риманову поверхность $\mathcal{R}_c$:

$$f - \frac{1}{t(t-1)} a_{0t}^3 + f_2(c) a_{0t}^2 + f_1(c) a_{0t} = \phi_c|_{p_t^*=0, q_t^*=c} (p_t^*, q_t^*) = \text{const},$$

где $a_{0t} = -(a_{01} + t a_{03})$. Компактифицируем ее: $\overline{\mathcal{R}}_c := \mathcal{R}_c \cup \{\infty\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 23 (ЛЕММА). Множество $\{\infty\}$, добавленное к $\mathcal{R}_c$ при компактификации, состоит из единственной точки, которая лежит на дивизоре $\mathcal{D}^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Рассмотрим $\overline{M^f}_{a_{ii}}$ — компактификацию $M^f_{a_{ii}}$, состоящую из $M^f_{a_{ii}}$ и добавленного на бесконечности дивизора $\{\infty\}_{M^f}$. Сечение поверхности $M^f_{a_{ii}}$ (формула (39))

$$f^2 = -2 \det \begin{vmatrix} a_{11} & x & y \\ x & a_{22} & z \\ y & z & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x + y + z = \frac{a_{00} - a_{11} - a_{22} - a_{33}}{2},$$

плоскостью

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \quad c_1 : c_2 : c_3 \subset \mathbb{CP}^2,$$

$c_1 + c_2 + c_3 = 0$, — это эллиптическая поверхность $f^2 = \mathcal{P}_3(x)$ с единственной точкой (точкой ветвления) на бесконечности. Таким образом, каждому направлению $a_{01} : a_{02} : a_{03}$, $a_{0i} \rightarrow \infty$ будет соответствовать единственная точка дивизора $\{\infty\}_{M^f}$. Поскольку $f^2 = -2a_{01}a_{02}a_{03} + \mathbf{O}(a_{0i})$, то вне направления $a_{01} : a_{02} : a_{03} = t_1 : t_2 : t_3$ разность

$$f - \frac{1}{t(t-1)} a_{0t}^3 + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t}$$

стремится к бесконечности и, следовательно, $\overline{\mathcal{R}}_c$ пересекает $\{\infty\}_{M^f}$ в единственной точке — там, где

$$f \sim \frac{t^2(t-1)^2}{(p_t^*)^3}, \quad a_{01} \sim -\frac{t^2(t-1)}{(p_t^*)^2}, \quad a_{02} \sim \frac{t(t-1)^2}{(p_t^*)^2}, \quad a_{03} \sim \frac{t(t-1)^2}{(p_t^*)^2}.$$

По построению $\phi_c(p_t, q_t^*)$ имеет там конечное значение, следовательно, риманова поверхность $\mathcal{R}_c$ — линия уровня функции $\phi_c(p_t, q_t^*)$ при каждом $c \in \mathbb{C}$ проходит через точку дивизора $\mathcal{D}^t$, лемма доказана.

Таким образом, компактная риманова поверхность $\overline{R}_C$ целиком содержится в $M_{a_{\overline{ii}},t}$ – единственная ее точка, не содержащаяся в $M_{a_{\overline{ii}}}$, попала на $\mathcal{D}^t$. На любой компактной римановой поверхности нет непостоянных функций, следовательно, $\mathcal{R}_c$ является *линией уровня* любой функции, определенной на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ при любом значении c .

Все функции на $M_{a_{\overline{ii}}}$ – многочлены от a_{0i} и f , следовательно, H – функция на $M_{a_{\overline{ii}},t}$ имеет представление

$$H = \mathcal{P}(a_{i0}) + f \mathcal{P}'(a_{i0}),$$

где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ – какие-то многочлены от a_{0i} . Функция H должна быть постоянной на линии

$$f - \frac{1}{t(t-1)} a_{0t}^3 + f_2(c) a_{0t}^2 + f_1(c) a_{0t} = \phi_c(0, c),$$

т. е. $H(a_{0i}, f) = H_c = \text{const}$, если (f, a_{0i}) с $\mathcal{R}_c$, откуда следует, что многочлен $H - H_c$ делится на многочлен

$$\mathcal{P}_{\phi_c} := f - \frac{a_{0t}^3}{t(t-1)} + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} - \phi_c(0, c),$$

т. е.

$$H = \left(f - \frac{a_{0t}^3}{t(t-1)} + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t} - \phi_c(0, c) \right) H' + H_c,$$

где H' – многочлен от f , a_{0i} , уже меньшей чем H степени, к которому можно применить те же рассуждения, так что

$$H = \mathcal{P}(\phi_c(p_t^*, q_t^*))$$

– многочлен (одной переменной) от $f - a_{0t}^2/(t(t-1)) + f_2 a_{0t}^2 + f_1 a_{0t}$. Подставив (95) в (96), убедимся, что $f_{1,2} = f_{1,2}(c)$ – нетривиальные функции $c \in \mathbb{C}$, так что $\phi_c(p_t^*, q_t^*)$ на дивизоре $p_t^* = 0$, $q_t^* \in \mathbb{C}$ имеет конечное значение *только* в точке $q_t^* = c$; в остальных же точках дивизора (где $q_t^* \neq c$) функция $\phi_c(p_t^*, q_t^*)$ имеет полюс, значит, $\mathcal{P} = H = \text{const}$.

Докажем теперь сформулированную выше теорему 15.

Предположим противное, т. е. что имеется еще одно поле направлений на $\mathcal{M}_{a_{\overline{ii}}}^T$; обозначим задающую его 2-форму $\tilde{\Omega}$:

$$\tilde{\Omega} \in \bigwedge^2 T^*(\mathcal{M}_{a_{\overline{ii}}}^T), \quad \tilde{\Omega}|_{M_{a_{\overline{ii}}}} = w.$$

Составим разность $\Omega_{\text{pvi}} - \tilde{\Omega}$ – это 2-форма, обращающаяся в нуль на любой паре касательных к $M_{a_{\overline{ii}}}$ векторов; значит, в каждой из карт U_i , U_i^* (карты U_i и U_i^* определены в замечании 10, с. 80):

$$\Omega_{\text{pvi}} - \tilde{\Omega} = dH_i \wedge dt,$$

причем в перекрытиях этих

$$0 = dH_i \wedge dt - dH_j \wedge dt = d(H_i - H_j) \wedge dt,$$

следовательно, $H_i - H_j = C_{ij}(t)$, зафиксируем какое-нибудь t .

Многообразие $M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}$ покрыто окрестностями, где заданы функции, отличающиеся на константы; все окрестности пересекаются. Выберем одну из них – там задана, например, H_1 . Приравняем ей другие, добавив к H_j константу $c_{1j} = c_{1j}(t)$.

Мы получили глобально на $M_{a_{\bar{i}\bar{i}},t}$ заданную функцию. Она обязана быть константой.

8. Заключение

В заключение хочу выразить благодарность всем, кто содействовал появлению данного текста.

Прежде всего это Л. А. Бордаг – за сочувствие и поддержку, без нее автор просто не имел бы возможности сделать эту работу. Очень благодарен С. Ю. Славянову. Беседы с ним помогли осознать проблему; отдельное ему спасибо за регулярную материальную (не финансовую!) поддержку и помощь – советы, редактирование рукописи.

В вопросах алгебраической геометрии помощниками и наставниками были Г. Ю. Панина (Шахбазян), И. А. Панин и А. Л. Смирнов. В понимании теории гамильтоновых систем на алгебрах Ли большую помощь оказал М. А. Семенов-Тянь-Шанский. Благодарен И. М. Кричеверу за рецензирование рукописи и ряд важных замечаний.

К сожалению, работа продолжалась столь долго, что некоторым уже не суждено прочесть эти строки – я имею в виду А. А. Болибруха и А. Н. Тюрина, чье участие и помощь были неоценимы.

И наконец последнее – за годы работы над этой темой были сотни бесед с десятками людей, так что автор надеется на прощение со стороны невольно обиженных – всех упомянуть невозможно, где-то нужно было поставить точку.

Список литературы

- [1] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, “From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions”, *Aspects Math.*, **E16**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991.
- [2] K. Okamoto, “Studies in the Painlevé equations. I. Sixth Painlevé equation P_{VI} ”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146**:1 (1986), 337–381.
- [3] А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас, *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2005; англ. пер.: A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Yu. Novokshenov, *Painlevé transcendents. The Riemann–Hilbert approach*, *Math. Surveys Monogr.*, **128**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [4] S. Yu. Slavyanov, W. Lay, “Special functions. A unified theory based on singularities”, *Oxford Math. Monogr.*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000; пер. с англ.: С. Ю. Славянов, В. Лэй, *Специальные функции: Единая теория, основанная на анализе особенностей*, Невский Диалект, СПб., 2002.
- [5] Yu. I. Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbf{P}^2$ ”, *Geometry of differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 131–151.

- [6] D. Arinkin, S. Lysenko, “Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbf{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$ ”, *Math. Res. Lett.*, **4**:2–3 (1997), 181–190.
- [7] N. Hitchin, “Geometrical aspects of Schlesinger’s equation”, *J. Geom. Phys.*, **23**:3–4 (1997), 287–300.
- [8] T. Shioda, K. Takano, “On some Hamiltonian structures of Painlevé systems. I”, *Funkcial. Ekvac.*, **40**:2 (1997), 271–291.
- [9] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I. General theory and τ -function”, *Phys. D*, **2**:2 (1981), 306–352.
- [10] M. Jimbo, T. Miwa, “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II”, *Phys. D*, **2**:3, 407–448; “Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. III”, *Phys. D*, **4**:1 (1981), 26–46.
- [11] A. V. Kitaev, D. A. Korotkin, “On solutions of the Schlesinger equations in terms of Θ -functions”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1998, №17, 877–905.
- [12] B. Dubrovin, M. Mazzocco, “Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations”, *Comm. Math. Phys.*, **271**:2 (2007), 287–373; [arXiv:math/0311261v4](#), 2003.
- [13] А. А. Болибрух, 21-я проблема Гильберта для фуксовых линейных систем, Тр. МИАН, **206**, Наука, М., 1994; англ. пер.: А. А. Bolibrukh, *Hilbert’s twenty-first problem for linear Fuchsian systems*, Proc. Steklov Inst. Math., **5**, 1995.
- [14] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000.
- [15] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия: Методы и приложения*, Наука, М., 1979; англ. пер.: B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern geometry – methods and applications. Part I: The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*, Grad. Texts in Math., **93**, Springer-Verlag, New York, 1984; *Modern geometry – methods and applications. Part II: The geometry and topology of manifolds*, Grad. Texts in Math., **104**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [16] K. Okamoto, “Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé”, *Japan. J. Math. (N. S.)*, **5** (1979), 1–79.
- [17] H. Flashka, D. W. McLaughlin, “Canonically conjugate variables for the Korteweg–de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions”, *Progr. Theoret. Phys.*, **55**:2 (1976), 438–456.
- [18] А. П. Веселов, С. П. Новиков, “О скобках Пуассона, согласованных с алгебраической геометрией и динамикой Кортвега–де Фриза на множестве конечных потенциалов”, *Докл. АН СССР*, **266**:3 (1982), 533–537; англ. пер.: S. P. Novikov, A. P. Veselov, “On Poisson brackets compatible with algebraic geometry and Korteweg–de Vries dynamics on the set of finite-zone potentials”, *Soviet Math. Dokl.*, **26** (1982), 357–362.
- [19] I. M. Krichever, D. H. Phong, “Symplectic forms in the theory of solitons”, *Surveys in differential geometry: integral systems*, Surv. Differ. Geom., **4**, Int. Press, Boston, MA, 1998, 239–313.
- [20] I. Krichever, “Vector bundles and Lax equations on algebraic curves”, *Comm. Math. Phys.*, **229**:2 (2002), 229–269.
- [21] И. М. Кривевер, “Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon”, *Докл. АН СССР*, **253**:2 (1980), 288–292; англ. пер.: I. M. Krichever, “An analogue of the d’Alembert formula for the equations of a principal chiral field and the sine-Gordon equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **22**:1 (1980), 79–84.

- [22] D. V. Anosov, A. A. Bolibruch, “The Riemann–Hilbert problem”, *Aspects Math.*, **E22**, Vieweg, Braunschweig, 1994.
- [23] A. A. Bolibruch, “On isomonodromic deformations of Fuchsian systems”, *J. Dynam. Control Systems*, **3**:4 (1997), 589–604.
- [24] М. В. Бабич, “О координатах на фазовых пространствах системы уравнений Шлезингера и системы уравнений Гарнье–Пенлеве 6”, *Докл. РАН*, **412**:4 (2007), 439–443; англ. пер.: M. V. Babich, “About coordinates on the phase spaces of the Schlesinger system and the Garnier–Painlevé 6 system”, *Doklady Math.*, **75**:1 (2007), 71–75.
- [25] М. В. Бабич, *Уравнения Шлезингера и уравнения Гарнье–Пенлеве 6, геометрия перехода*, Препринт № 06.2006, ПОМИ, Спб., 2006.
- [26] M. V. Babich, *About coordinates on the phase-spaces of Schlesinger system ($n + 1$ matrices, $sl(2, C)$ -case) and Garnier–Painlevé 6 system*, [arXiv: math/0605544](https://arxiv.org/abs/math/0605544), 2006.
- [27] И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии. Т. 1. Алгебраические многообразия в проективном пространстве*, Наука, М., 1988; англ. пер.: I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. I: Varieties in projective space*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [28] L. Fuchs, “Über Differenzialgleichungen, deren Integrale feste Verzweigungspunkte ezitzen”, *Sitzungsber. Konigl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, **32** (1884), 699–710.
- [29] A. H. M. Levelt, “Hypergeometric functions. I”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **64**, **23** (1961), 361–372; “Hypergeometric functions. II”, 373–385; “Hypergeometric functions. III”, 386–396; “Hypergeometric functions. IV”, 397–403.
- [30] B. Dubrovin, “Geometry of 2D topological field theories”, *Integrable systems and quantum groups* (Montecatini Terme, 1993), *Lecture Notes in Math.*, **1620**, Springer, Berlin, 1996, 120–348.
- [31] L. Schlesinger, “Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten”, *J. Reine Math.*, **141** (1912), 96–145.
- [32] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989; англ. пер.: V. I. Arnol’d, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second edition, *Grad. Texts in Math.*, **60**, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [33] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход*, Современная математика, Ин-т компьютер. исслед., М.–Ижевск, 2003.
- [34] J. Marsden, A. Weinstein, “Reduction of symplectic manifold with symmetry”, *Rep. Math. Phys.*, **5**:1 (1974), 121–130.
- [35] В. В. Трофимов, *Введение в геометрию многообразий с симметриями*, Изд-во МГУ, М., 1989; англ. пер.: V. V. Trofimov, *Introduction to geometry of manifolds with symmetry*, *Math. Appl.*, **270**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [36] М. М. Постников, *Группы Ли и алгебры Ли*, Лекции по геометрии, семестр V, Наука, М., 1982; англ. пер.: M. Postnikov, *Lie groups and algebras*, *Lectures in geometry. Semester V*, Mir, Moscow, 1986.
- [37] M. Audin, “Lectures on gauge theory and integrable systems”, *Gauge theory and symplectic geometry* (Montreal, PQ, 1995), *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, **488**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 1–48.
- [38] M. Kapovich, M. J. Millson, “The symplectic geometry of polygons in Euclidean space”, *J. Differential Geom.*, **44**:3 (1996), 479–513.
- [39] С. Ю. Славянов, “Изомонодромные деформации уравнений класса Гойна и уравнения Пенлеве”, *ТМФ*, **123**:3 (2000), 395–406; англ. пер.: S. Yu. Slavyanov, “Isomonodromic deformations of Heun and Painlevé equations”, *Theoret. and Math. Phys.*, **123**:3 (2000), 744–753.

- [40] С. Ю. Славянов, Ф. Р. Вукайлович, “Изомонодромные деформации и ‘антиквантование’ для простейших ОДУ”, *ТМФ*, **150**:1 (2007), 143–151; англ. пер.: S. Yu. Slavyanov, F. R. Vukajlović, “Isomonodromic deformations and ‘antiquantization’ for the simplest ordinary differential equations”, *Theoret. and Math. Phys.*, **150**:1 (2007), 123–131.
- [41] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, 2-е изд., Физико-математическая библиотека инженера, **2**, Наука, М., 1970; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Elements of the theory of elliptic functions*, Transl. Math. Monogr., **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
- [42] M. V. Babich, L. A. Bordag, “Projective differential geometrical structure of the Painlevé equations”, *J. Differential Equations*, **157**:2 (1999), 452–485.

М. В. Бабич (M. V. Babich)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: mbabich@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию

20.10.2008