Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Крыжановская, Ядерные оценки долгосрочной матрицы ковариаций случайного поля, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:26:42

Ядерные оценки долгосрочной матрицы ковариаций случайного поля

Н. Ю. Крыжановская

Многие статистические методы основаны на состоятельных оценках долгосрочной матрицы ковариаций. Они играют важную роль в моделях регрессии, обладающих свойствами автокорреляции и гетероскедастичности (см., например, [1]). Кроме того, такие оценки исследуются в работах, связанных с обобщенным методом моментов [2], тестами на коинтеграцию и единичный корень [3]. Целый ряд статей посвящен изучению ядерных оценок долгосрочных матриц ковариаций для последовательностей зависимых случайных векторов $\{X_t\}_{t=1}^\infty$ (см. [1]–[5]). А именно, для долгосрочной матрицы ковариаций

$$C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} X_i X_j^\top \quad (1)$$

(все элементы матрицы C предполагаются конечными) рассматриваются оценки вида

$$\hat{C}_n := \sum_{j=-n+1}^{n-1} k(j/\gamma_n) \hat{\Gamma}(j), \quad (2)$$

где $\hat{\Gamma}(j) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} X_t X_{t+j}^\top$ при $j \geq 0$, $\hat{\Gamma}(j) := \frac{1}{n} \sum_{t=1-j}^n X_t X_{t+j}^\top$ при $j < 0$, $k(x)$ – ядерная

функция, γ_n – так называемая ширина окна. Для поля $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$, состоящего из случайных векторов $X_j = (X_{j,1}, \dots, X_{j,t})^\top$, $\mathbb{E} X_j = 0$, аналогом (1) будет матрица

$$C := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^d} \sum_{i,j \in U_n} \mathbb{E} X_i X_j^\top, \quad U_n := [1, n]^d \cap \mathbb{Z}^d, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Целью данной работы является построение оценок типа (2) в многомерном случае ($d \geq 1$) и установление их слабой и сильной состоятельности.

В 80-е годы прошлого века активно исследовались оценки вида (2) с различными ядерными функциями. В [1] проводится сравнение свойств таких оценок и изучается вопрос оптимизации выбора последовательности $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. До появления работы Б. Хансена [4] для доказательства результатов о ядерных оценках матрицы ковариаций обычно использовали предположение о наличии конечного четвертого момента. В [4] состоятельность оценок установлена при условии конечности абсолютного момента порядка чуть большего двух. Кроме того, в [4] не требуется стационарность процесса. Если поле стационарное, то, как легко проверить, элементы матрицы $C = \{c_{a,b}\}_{a,b=1}^l$ имеют вид $c_{a,b} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \text{cov}(X_{0,a}, X_{j,b})$, $a, b = 1, \dots, l$. Для стационарных

полей существуют и другие оценки долгосрочной матрицы ковариаций [5; гл. 7].

Во многих работах результаты о ядерных оценках формулируются для α - и ϕ -перемешивающих последовательностей случайных векторов. Однако проверка условий, связанных с коэффициентами перемешивания, вызывает значительные трудности (см., например, [6], [7]). В настоящей работе рассматриваются (BL, θ) -зависимые случайные поля. Это понятие обобщает такие условия, как независимость, ассоциированность, положительная и отрицательная ассоциированность (см. [5]).

Итак, изучается поле (не обязательно стационарное) центрированных случайных векторов $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$. Пусть все элементы матрицы C (см. (3)) конечны. Будем говорить, что функция $k(\cdot)$ ядерная, если выполняются следующие условия: $k: \mathbb{R}^d \rightarrow [-1, 1]$; $k(0) = 1$; $k(x)$ непрерывна для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ и непрерывна

в нуле; $\int_{\mathbb{R}^d} |k(x)| dx < \infty$; $k(x) = k(y)$ при $\|x\| = \|y\|$, где $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ для $x = (x_1, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$. Рассмотрим последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что $\gamma_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\gamma_n^{1+2q} n^{-1} = O(1)$ для некоторого $q > 1/2$. Определим следующие статистики:

$$\hat{C}_n := \sum_{j \in V_n} k(j/\gamma_n) \hat{\Gamma}(j); \quad \hat{\Gamma}(j) := \frac{1}{n^d} \sum_{t \in W_j} X_t X_{t+j}^\top, \quad j \in V_n,$$

где $V_n := [-(n-1), n-1]^d \cap \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$; $W_j = W_j(n) := \{t \in U_n : t+j \in U_n\}$, $j \in V_n$. Эти статистики являются в некотором смысле обобщением статистик с локальным усреднением, рассматриваемых, например, в [8].

Случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$, принимающее значения в $\mathbb{R}^l$, называется (BL, θ) -зависимым, если существует монотонно стремящаяся к нулю при $m \rightarrow \infty$ положительная последовательность $\theta = \{\theta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ такая, что для любых конечных непересекающихся множеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ и любых ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g)(|I| \wedge |J|) \theta_{\text{dist}(I, J)},$$

где $\text{Lip}(f) = \sup_{u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{\|u - v\|_*}$, $\|u\|_* = \sum_{i=1}^{|I|} |u_i|$, $\text{dist}(I, J) = \min\{\|x - y\|, x \in I, y \in J\}$ и $|I|$ — мощность множества I .

Пусть $\|Y\|_p := \left(\sum_{a=1}^l \mathbb{E}|Y_a|^p \right)^{1/p}$ — норма случайного вектора $Y = (Y_1, \dots, Y_l)^\top$, $p > 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ — (BL, θ) -зависимое векторнозначное центрированное случайное поле, где последовательность θ такова, что $\theta_m = O(m^{-\lambda})$ и $d/\lambda \in (0, 1)$. Пусть $k(x)$ является ядерной функцией, а последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям, перечисленным выше, причем $q > 1/2 + d/\lambda$. Предположим, что $\sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \|X_j\|_p < \infty$ для некоторого $p > (4q + q^{-1} + 4)(2q - 2d/\lambda - 1)^{-1}$. Тогда $\hat{C}_n \rightarrow C$ по вероятности при $n \rightarrow \infty$.

При больших значениях q можно взять p достаточно близким к 2, иначе говоря, обойтись малым запасом абсолютных моментов поля X .

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и существует невозрастающая функция $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $|k(x)| \leq g(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^d$, и $\int_{\mathbb{R}^d} g(\|x\|) dx < \infty$. Тогда $\hat{C}_n \rightarrow C$ п. н. при $n \rightarrow \infty$.

Если к условиям теоремы 1 добавить предположение, что $k(x)$ имеет ограниченный носитель, то $\hat{C}_n \rightarrow C$ п. н. при $n \rightarrow \infty$. Это следует из теоремы 2, так как можно положить $g(z) = \mathbf{I}\{z \leq B\}$, где $\mathbf{I}\{G\}$ — индикатор события G , а B — такое число, что $k(x) = 0$ при x , для которых $\|x\| > B$.

Список литературы

- [1] D. W. K. Andrews, *Econometrica*, **59:3** (1991), 817–858. [2] L. P. Hansen, *Econometrica*, **50:4** (1982), 1029–1054. [3] P. C. B. Phillips, *Econometrica*, **55:2** (1987), 277–301. [4] B. E. Hansen, *Econometrica*, **60:4** (1992), 967–972. [5] A. Bulinski, A. Shashkin, *Limit theorems for associated random fields and related systems*, Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab., **10**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007. [6] D. W. K. Andrews, *J. Appl. Probab.*, **21:4** (1984), 930–934. [7] P. Ango Nze, P. Doukhan, *Econometric Theory*, **20:6** (2004), 995–1045. [8] A. Bulinski, N. Kryzhanovskaya, *Probab. Math. Statist.*, **26:2** (2006), 261–281.

Н. Ю. Крыжановская (N. Yu. Kryzhanovskaya)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: natakr@gmail.com

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

15.12.2008