Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Ортогональные разложения прямых сумм и тензорных произведений алгебр, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 2, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:48:08

Ортогональные разложения прямых сумм и тензорных произведений алгебр

Д. Н. Иванов

Ортогональное разложение алгебры в сумму d -мерных коммутативных подалгебр называется d -разложением. В настоящей статье приводятся конструкции d -разложений для примарных d в тензорном произведении и некоторых прямых суммах алгебр, допускающих d -разложения. Приведенные результаты обобщают полученные ранее для $d = 2$ [1].

Напомним основные определения. Термин “алгебра” будет обозначать ассоциативную конечномерную над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Через $\text{Tr}_{\mathbf{A}}$ будем обозначать след регулярного представления алгебры $\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Семейство $\mathcal{D} = \{A_i, i = 1, \dots, r\}$ неединичных собственных подалгебр алгебры $\mathbf{A}$ образует ее *ортогональное разложение* (ОР), если все подалгебры A_i полупросты, содержат единичный элемент $1_{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ и выполняется условие ортогональности: алгебра $\mathbf{A}$ является прямой суммой попарно ортогональных относительно формы следа $\text{Tr}_{\mathbf{A}} xy$ подпространств $\mathbf{A} = \langle 1_{\mathbf{A}} \rangle \oplus A_1^{\circ} \oplus \dots \oplus A_r^{\circ}$, где $A_i^{\circ} = \{x \in A_i \mid \text{Tr}_{\mathbf{A}} x = 0\}$.

Если все подалгебры ОР $\mathcal{D}$ коммутативны, то $\mathcal{D}$ называется *коммутативным*. Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре $\mathbf{B}$, то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа $\mathbf{B}$* (или просто *ОР типа $\mathbf{B}$*). Через kM_n будем обозначать прямую сумму k экземпляров алгебры матриц $M_n(\mathbb{C}) = M_n$. Однородное ОР типа $dM_1 \cong \mathbb{C}^d$ называется d -разложением.

Отметим, что понятие однородного коммутативного ОР обобщает ряд известных понятий. Так, матрицы Адамара порядка n эквивалентны 2-разложениям алгебры nM_1 , конечные аффинные плоскости порядка n эквивалентны n -разложениям алгебры n^2M_1 , аффинные 2-схемы эквивалентны однородным ОР коммутативных алгебр, ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_{n-1} в сумму картановских подалгебр эквивалентны n -разложениям алгебры M_n [1].

В [2] сформулирована следующая гипотеза, обобщающая известные гипотезы о порядках конечных плоскостей, о параметрах аффинных 2-схем и о простых алгебрах Ли типа A_n , допускающих ортогональные разложения в сумму картановских подалгебр.

ГИПОТЕЗА 1. Если алгебра $\mathbf{A}$ допускает d -разложение, то d есть степень простого числа. При этом если $d > 2$, то $\dim \mathbf{A}$ является степенью d .

Приведем некоторые факты о d -разложениях.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть подалгебры $\{A_1, \dots, A_r\}$ образуют d -разложение алгебры $\mathbf{A}$, $\dim \mathbf{A} = n$. Пусть $\text{Pr}(A_s) = \{e_{1s}, \dots, e_{ds}\}$ – примитивные идемпотенты подалгебры A_s , $s = \overline{1, r}$. Тогда:

- 1) $\text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{1s} = \dots = \text{Tr}_{\mathbf{A}} e_{ds} = n/d$ для любого $s = \overline{1, r}$, в частности, n кратно d ;
- 2) элементы $1_{\mathbf{A}}, e_{js}, j = \overline{1, d-1}, s = \overline{1, r}$, образуют базис в $\mathbf{A}$, в частности, $r = (n-1)/(d-1)$.

Следующая теорема является основной.

ТЕОРЕМА 2. Пусть d – степень простого числа. Тогда:

- 1) если алгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ допускают d -разложение, то их тензорное произведение (над полем $\mathbb{C}$) $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ также допускает d -разложение;
- 2) если алгебры $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_{d^k}$ имеют одинаковую размерность и допускают d -разложение, то их прямая сумма $\mathbf{C}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{C}_{d^k}$ также допускает d -разложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\dim \mathbf{A} = n$, $\dim \mathbf{B} = m$, $r_1 = (n-1)/(d-1)$, $r_2 = (m-1)/(d-1)$ и семейства подалгебр $\mathcal{D}_1 = \{A_i, i = \overline{1, r_1}\}$, $\mathcal{D}_2 = \{B_j, j = \overline{1, r_2}\}$ образуют d -разложения алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Для каждой пары подалгебр A_i, B_j определим $d-1$ подалгебру в $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ следующим образом. Пусть $\text{Pr}(A_i) = \{e_{i1}, \dots, e_{id}\}$, $\text{Pr}(B_j) = \{f_{j1}, \dots, f_{jd}\}$. В силу примарности d множество из d^2 попарно ортогональных идемпотентов $e_{is} \otimes f_{jt}$, $s, t = \overline{1, d}$, можно рассматривать как множество точек некоторой аффинной плоскости π порядка d . Каждую прямую плоскости π отождествим с суммой идемпотентов, инцидентных этой прямой. Тогда каждый класс параллельных прямых порождает полупростую коммутативную подалгебру в $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, содержащую $\mathbf{1}_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}}$ и имеющую размерность d . Без ограничения общности можно считать, что суммы $e_{is} \otimes \mathbf{1}_B = e_{is} \otimes f_{j1} + \dots + e_{is} \otimes f_{jd}$, $\mathbf{1}_A \otimes f_{jt} = e_{i1} \otimes f_{jt} + \dots + e_{id} \otimes f_{jt}$, $s, t = \overline{1, d}$, являются прямыми плоскости π . Эти прямые образуют два класса параллельных, которые порождают подалгебры $A_i \otimes \mathbf{1}_B$ и $\mathbf{1}_A \otimes B_j$. Подалгебры, порождаемые оставшимися $d-1$ классами параллельных прямых, обозначим L_{ij}^k , $k = \overline{1, d-1}$. Легко проверить, что ортогональные дополнения к $\mathbf{1}_{\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}}$ в каждой из подалгебр семейства $\mathcal{D} = \{A_i \otimes \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_A \otimes B_j, L_{ij}^k, i = \overline{1, r_1}, j = \overline{1, r_2}, k = \overline{1, d-1}\}$ попарно ортогональны между собой. Кроме того, количество указанных подалгебр равно $r_1 + r_2 + (d-1)r_1r_2 = (nm-1)/(d-1) = (\dim \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} - 1)/(d-1)$, откуда следует, что для них выполняется условие ортогональности. Значит, семейство $\mathcal{D}$ образует d -разложение алгебры $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

2) Достаточно доказать утверждение в случае $k = 1$. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{C}_d$, $\dim \mathbf{C}_i = n$, $r = (n-1)/(d-1)$ и алгебра $\mathbf{C}_i$ допускает d -разложение $\mathcal{D}_i = \{C_{ij}, j = \overline{1, r}\}$, $i = \overline{1, d}$. Для каждого $j = \overline{1, r}$ определим семейство подалгебр следующим образом. Пусть $\text{Pr}(C_{ij}) = \{e_{is}, s = \overline{1, d}\}$, $i = \overline{1, d}$. Отождествим алгебры $\mathbf{C}_i$ с их каноническими образами в $\mathbf{C}$. В силу примарности d множество из d^2 попарно ортогональных идемпотентов e_{is} , $i, s = \overline{1, d}$, можно рассматривать как точки некоторой аффинной плоскости π порядка d . Как и раньше, каждую прямую плоскости π отождествим с суммой идемпотентов, инцидентных этой прямой, при этом каждый класс параллельных прямых будет порождать полупростую коммутативную подалгебру в $\mathbf{C}$, содержащую $\mathbf{1}_\mathbf{C}$ и имеющую размерность d . Без ограничения общности можно считать, что суммы $\mathbf{1}_{\mathbf{C}_i} = e_{i1} + \dots + e_{id}$, $i = \overline{1, d}$, являются прямыми плоскости π . Они порождают подалгебру $E = \{\mathbf{1}_{\mathbf{C}_1}, \dots, \mathbf{1}_{\mathbf{C}_d}\}$. Подалгебры, порождаемые оставшимися d классами параллельных прямых, обозначим через L_{jt} , $t = \overline{1, d}$. Легко проверить, что ортогональные дополнения к $\mathbf{1}_\mathbf{C}$ в каждой из подалгебр семейства $\mathcal{D} = \{E, L_{jt}, j = \overline{1, r}, t = \overline{1, d}\}$ попарно ортогональны. Кроме того, количество указанных подалгебр равно $1 + dr = 1 + d(n-1)/(d-1) = (nd-1)/(d-1) = (\dim \mathbf{C} - 1)/(d-1)$, откуда следует, что для них выполняется условие ортогональности. Значит, семейство $\mathcal{D}$ образует d -разложение алгебры $\mathbf{C}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если гипотеза 1 справедлива, то ограничение на d в теореме 2 можно убрать. 2. В случае $d = 2$ теорема 2 в п. 2) допускает усиление: количество слагаемых 2^k можно заменить на произвольное n такое, что существует матрица Адамара порядка n [3]. 3. Как показано в [1], алгебра $3M_2$ не допускает 2-разложений, несмотря на то, что алгебры M_2 и $2M_2$ допускают 2-разложения. Этот пример указывает на существенность условий о равенстве размерностей и о количестве слагаемых в теореме 2, п. 2).

Список литературы

- [1] Д. Н. Иванов, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 83–102. [2] Д. Н. Иванов, *УМН*, **60**:2 (2005), 163–164. [3] Д. Н. Иванов, *УМН*, **58**:4 (2003), 147–148.

Д. Н. Иванов (D. N. Ivanov)
Тверской государственный университет
E-mail: dni@tvcom.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
07.12.2008