Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Дремов, Вычисление двух пар Белого степени 8,
УМН, 2009, том 64, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:46:46

Вычисление двух пар Белого степени 8

В. А. Дремов

1. Определения. Пусть X – полная гладкая неприводимая комплексная алгебраическая кривая. Рациональная функция $\beta: X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ называется *функцией Белого*, если она имеет не более 3 критических значений. *Парой Белого* называется пара (X, β) , состоящая из кривой и функции Белого на ней. Пара Белого называется *чистой*, если критические значения β лежат в множестве $\{0, 1, \infty\}$ и все прообразы в $\beta^{-1}(1)$ двукратны (т.е. $\beta - 1$ имеет лишь в точности двукратные нули). *Степенью* пары Белого будем называть степень функции Белого. Чистой паре Белого (X, β) соответствует граф $\Gamma = \beta^{-1}([0, 1])$, вложенный в поверхность X . Прообразы 0 – вершины Γ , прообразы 1 лежат на ребрах Γ , количество ребер Γ равно $(\deg \beta)/2$. Топологией своего графа и его вложения в ориентированную поверхность пара Белого определяется однозначно с точностью до изоморфизма [1]. Далее 2-вычетом мероморфного квадратичного дифференциала Ω в точке P называется коэффициент $\text{Qres}_P[\Omega] = c_{-2}$ при мономе $x^{-2}(dx)^2$ в разложении в ряд $\Omega = \sum_k c_k x^k dx^2$ по локальной координате x , для которой $x(P) = 0$.

2. Введение. Если чистая пара Белого имеет степень 8, то соответствующая кривая имеет род не более 2. В настоящее время существует полный список [2] чистых пар Белого степени не выше 8. Случай четырех различных пар Белого рода 2 был исследован в работе [3]. Вычисления для рода 0 проведены стандартными средствами. Для рода 1 были разработаны специальные методы. Метод, использованный для двух графов, изображенных на рис. 1, описан в данной статье.

Рис. 1. В каждом из изображающих рисунки многоугольников противоположные стороны попарно склеены

3. Схема вычислений. Составляем систему уравнений для квадратичных дифференциалов вида $\text{MP}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{df^2}{f(1-f)}$. Из системы находим квадратичные дифференциалы $\text{MP}(\beta)$ и $\text{MP}(\beta^{-1})$, после чего искомая функция β может быть найдена из тождества $\beta \text{MP}(\beta^{-1}) = -\text{MP}(\beta)$. Квадратичные дифференциалы вида $\text{MP}(f)$ рассматривались и ранее (см., например, [4]). Они тесно связаны с пространством модулей кривых. Эта связь выходит за рамки данных рассуждений, поэтому упомянем о ней лишь кратко.

Отступление. Дифференциалы, построенные по рисункам, естественно соответствуют центрам клеток одного из стандартных разбиений оснащенного пространства модулей. А именно, существует конструкция, позволяющая по рисунку D и положительным действительным числам на его ребрах построить кривую X_1 и квадратичный дифференциал Ω на этой кривой. В частном случае, когда все числа равны 1, мы получим по этой конструкции пару (X_1, Ω) , соответствующую паре Белого (X_2, β) следующим образом: $X_2 = \phi(X_1)$, $\Omega = \text{MP}(\beta(\phi))$, где ϕ – изоморфизм.

Мы рассматриваем следующую систему уравнений на квадратичные дифференциалы g , h и константы пропорциональности c_0 , c_1 , c_2 :

$$\begin{aligned}\beta &= c_0 g/h; \\ (g) &= 3A_1 + A_2 - 2C_1 - 2C_2, & g &= c_1 \Omega(\beta); \\ (h) &= -2A_1 - 2A_2 + 5C_1 - C_2, & h &= c_2 \Omega(\beta^{-1}); \\ \text{Qres}_{C_1}[g] &= 49 \text{Qres}_{C_2}[g], & 9 \text{Qres}_{A_1}[h] &= 25 \text{Qres}_{A_2}[h].\end{aligned}$$

Ответ получаем с коэффициентами из поля степени 4 над $\mathbb{Q}$, но, сделав бирациональную замену координат, можно перейти к полю $\mathbb{Q}[\sqrt{105}]$. Численно изобразив вид рисунка по паре Белого, мы определяем соответствие между топологией рисунков и парами Белого на плоских комплексных кривых. Получаем следующий результат.

4. Основной результат. Рассмотрим кривую X рода 1, уравнение аффинной части которой имеет вид

$$y^2 = f(x),$$

где f – многочлен степени 3. Функцию β на ней запишем в виде

$$\beta = \frac{n_0 - n_1 + 1}{2} + y \sqrt{\frac{(n_0 - n_1)^2 - 2(n_0 + n_1) + 1}{4f}}$$

(в терминах $\beta = P(x) + yQ(x)$ можно записать $n_0 = P^2 - fQ^2$, $n_1 = (P - 1)^2 - fQ^2$).

Введем для упрощения формул обозначение $\gamma = \pm 45\sqrt{105}$. Тогда

$$\begin{aligned}n_0(x) &= \frac{7^3(39\gamma + 17983)}{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^3} \frac{(x+5)^3(x-3)^5}{64x - 105 + \gamma}, \\ n_1(x) &= \frac{7^3(39\gamma + 17983)}{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^3} \frac{(x^4 - 30x^2 + 40x + (135\gamma - 60825)/14)^2}{64x - 105 + \gamma}, \\ f(x) &= 420x^3 - (119 + 9\gamma)x^2 + 14(1515 - \gamma)x + 420(420 - \gamma).\end{aligned}$$

В этих обозначениях формулируется результат:

ТЕОРЕМА. Рисунок 1(a) соответствуют положительное значение

$$\gamma = +45\sqrt{105} > 0,$$

значение j -инварианта, целая часть которого равна 1315, и пара Белого $(y^2 = f(x), \beta(x, y))$, определенная выше.

Рисунок 1(b) соответствуют отрицательное значение

$$\gamma = -45\sqrt{105} < 0,$$

значение j -инварианта, целая часть которого равна 20, и пара Белого $(y^2 = f(x), \beta(x, y))$, определенная выше.

Список литературы

- [1] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Low-dimensional topology, II*, Encyclopaedia Math. Sci., **141**, Springer-Verlag, Berlin, 2004. [2] Н. М. Адрианов, Н. Я. Амбург, В. А. Дремов, Ю. Ю. Кочетков, Е. М. Крейнс, Ю. А. Левицкая, В. Ф. Насретдинова, Г. Б. Шабат, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:6 (2007), 35–112. [3] Н. М. Адрианов, Г. Б. Шабат, *УМН*, **60**:6 (2005), 229–230; англ. пер.: N. M. Adrianov, G. B. Shabat, *Russian Math. Surveys*, **60**:6 (2005), 1237–1239. [4] M. Mulase, M. Penkava, *Asian J. Math.*, **2**:4 (1998), 875–920.

В. А. Дремов (V. A. Dremov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: dremov@mccme.ru

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией

07.12.2008