Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Гордиенко, Корамерности функциональных тождеств, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 141–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:42:10

Коразмерности функциональных тождеств

А. С. Гордиенко

В середине 1980-х годов были сформулированы гипотезы С. А. Амицура и А. Регева об асимптотическом поведении коразмерностей тождеств. В случае обычных тождеств гипотеза Амицура была доказана в 1999 г. М. В. Зайцевым и А. Джамбруно [1] для всех ассоциативных алгебр над полями характеристики 0. В 2008 г. вышла работа А. Регева и А. Берела [2], в которой для обычных коразмерностей широкого класса алгебр доказывается гипотеза Регева. Наряду с обычными тождествами, в теории колец находят применение и функциональные тождества [3]. В связи с этим возникает вопрос о справедливости указанных гипотез для функциональных коразмерностей.

Пусть A – ассоциативная алгебра над полем F произвольной характеристики. Выражение $f = \sum_{i=1}^n (G_i^i(\bar{x}_n)x_i a_i + b_i x_i H_i^i(\bar{x}_n))$ называется *полилинейным функциональным многочленом* степени n с коэффициентами в алгебре A . Здесь $G_i, H_i: A^{\otimes(n-1)} \rightarrow A$ – произвольные F -линейные отображения, для таких отображений Q мы используем сокращение $Q^i(\bar{x}_n) = Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$; $a_i, b_i \in A \cup \{1\}$; $1 \leq i \leq n$; $n \geq 2$. Если $f(p_1, \dots, p_n) = 0$ для всех $p_1, \dots, p_n \in A$, то говорят, что f – *функциональное тождество* алгебры A . Понятно, что множество $\text{FId}_n(A)$ полилинейных функциональных тождеств степени n является линейным подпространством в пространстве $FP_n(A)$ всех полилинейных функциональных многочленов степени n . Коразмерности $fc_n(A) = \dim \frac{FP_n(A)}{\text{FId}_n(A)}$ функциональных тождеств называются *функциональными коразмерностями* алгебры A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A^2 = \langle ab \mid a, b \in A \rangle_F$. Если $A^2 = 0$, то $fc_n(A) = 0$. Если $A^2 \neq 0$ и $\dim A = \infty$, то $fc_n(A) = \infty$ для всех $n \geq 2$. Если $A^2 \neq 0$ и $\dim A < \infty$, то $(\dim A)^{n-1} \leq fc_n(A) \leq \dim(A^2) \cdot (\dim A)^n$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\dim A < \infty$, то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{fc_n(A)} = \dim A \in \mathbb{Z}_+$, т. е. для $fc_n(A)$ выполняется гипотеза С. А. Амицура.

ТЕОРЕМА 2. Если $\dim A < \infty$ и существует такой элемент $a \in A$, что $A^2 = Aa + aA + AaA$, то $fc_n(A) \sim \dim(A^2) \cdot (\dim A)^n$ при $n \rightarrow \infty$.

СЛЕДСТВИЕ. Если алгебра A содержит единицу, то $fc_n(A) \sim (\dim A)^{n+1}$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для $fc_n(A)$ справедлива гипотеза А. Регева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $A^2 = 0$, то $FP_n(A) = \text{FId}_n(A)$ и $fc_n(A) = 0$. Поэтому считаем, что $A^2 \neq 0$. Тогда существуют такие $a, b \in A$, что $ab \neq 0$. Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ существуют линейно независимые элементы $e_j \in A$, $1 \leq j \leq m$. Обозначим через Λ множество наборов $k = (k_1, \dots, k_{n-1})$, в которых $1 \leq k_\ell \leq m$ при $1 \leq \ell \leq n-1$. Для каждого $k \in \Lambda$ определим полилинейное отображение G_k так, что

$$G_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-1}}) = \begin{cases} a, & \text{если } i_\ell = k_\ell \text{ для всех } \ell, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функциональные многочлены $f_k = G_k^n(\bar{x}_n)x_n$, $k \in \Lambda$, линейно независимы по модулю тождеств. Действительно, если $\sum_{k \in \Lambda} \alpha_k f_k \equiv 0$ для некоторых $\alpha_k \in F$, то, зафиксировав $t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \Lambda$ и подставив $x_1 = e_{t_1}, \dots, x_{n-1} = e_{t_{n-1}}, x_n = b$,

мы получим, что все f_k , за исключением f_t , обратятся в 0. Отсюда $\alpha_t = 0$. Таким образом, $f_{c_n}(A) \geq |\Lambda| = m^{n-1}$. Поэтому если $\dim A < \infty$, то $f_{c_n}(A) \geq (\dim A)^{n-1}$. Если же $\dim A = \infty$, то $f_{c_n}(A) = \infty$.

Пусть $\dim A < \infty$. Заметим, что всякий функциональный многочлен можно рассматривать как полилинейное отображение от n аргументов, принимающее значения в пространстве A^2 . Таким образом, определено естественное линейное отображение $\pi: FP_n(A) \rightarrow \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)$, где $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)$ – пространство всех полилинейных отображений из A в A^2 от n аргументов. Понятно, что $\ker \pi = \text{FId}_n(A)$. Отсюда следует, что существует вложение $\frac{FP_n(A)}{\text{FId}_n(A)} \subseteq \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)$. Поэтому

$$f_{c_n}(A) \leq \dim \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2) = \dim(A^2) \cdot (\dim A)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Дополним a до некоторого базиса $e_1, \dots, e_{m-1}$, $a = e_m$ алгебры A . Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ – двойственный базис в A^* , т.е. $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. По условию в A^2 можно выбрать базис $w_1, \dots, w_q$, состоящий из элементов вида $e_k a e_\ell$, $e_k a$, $a e_\ell$. Определим отображения $H_t(x)$ вида $e_k x e_\ell$, $e_k x$, $x e_\ell$ так, чтобы $H_t(a) = w_t$ для всех $1 \leq t \leq q$. В силу равенства $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2) = (A^*)^{\otimes n} \otimes A^2$ отображения $\varphi_{j_1}(x_1) \cdots \varphi_{j_n}(x_n) w_t$, где $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, m\}$, $1 \leq t \leq q$, образуют базис в $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)$. Введем на наборах $(j_1, \dots, j_n, t)$ лексикографическое упорядочение. Тогда, например, $H_t(x)$ как элемент пространства $\text{Hom}_F(A; A^2)$ будет суммой $\varphi_m(x) w_t$ и младших членов $\varphi_i(x) w_j$, $i < m$. Пусть $M_1 \subseteq \text{Hom}_F(A; A^2)$ – линейная оболочка отображений вида $e_k x e_\ell$, $e_k x$, $x e_\ell$. Тогда подпространство $M = \frac{FP_n(A)}{\text{FId}_n(A)}$ является линейной оболочкой отображений $\varphi_{j_1}(x_1) \cdots \varphi_{j_{i-1}}(x_{i-1}) \varphi_{j_{i+1}}(x_{i+1}) \cdots \varphi_{j_n}(x_n) H(x_i)$, где $1 \leq i \leq n$, а $H \in M_1$. Рассмотрим факторпространство $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)/M$. Если в наборе $(j_1, \dots, j_n, t)$ для некоторого i выполняется равенство $j_i = m$, то соответствующий элемент $f = \varphi_{j_1}(x_1) \cdots \varphi_{j_n}(x_n) w_t$ можно проредуцировать по модулю M к линейной комбинации базисных элементов пространства $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)$, которым соответствуют меньшие наборы. Для этого достаточно вычесть $g = \varphi_{j_1}(x_1) \cdots \varphi_{j_{i-1}}(x_{i-1}) \times \varphi_{j_{i+1}}(x_{i+1}) \cdots \varphi_{j_n}(x_n) H_t(x_i) \in M$, так как f будет для g в выбранном упорядочении старшим членом. Производя редукции, мы получим, что $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)/M$ является линейной оболочкой образов элементов, которым соответствуют наборы $(j_1, \dots, j_n, t)$, где $j_i \neq m$ для всех i . Следовательно, $\dim \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)/M \leq \dim(A^2) \cdot (\dim A - 1)^n$ и

$$\begin{aligned} f_{c_n}(A) &= \dim M = \dim \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2) - \dim \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)/M \\ &\geq \dim(A^2) \cdot (\dim A)^n - \dim(A^2) \cdot (\dim A - 1)^n. \end{aligned}$$

Используя верхнюю оценку из теоремы 1 и устремляя n к ∞ , получаем требуемую асимптотику.

Список литературы

- [1] M. V. Zaicev, A. Giambruno, *Polynomial identities and asymptotic methods*, Math. Surveys Monogr., **122**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. [2] A. Berele, A. Regev, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**:10 (2008), 5155–5172. [3] К. И. Бейдар, А. В. Михалёв, М. А. Чеботарь, *УМН*, **59**:3 (2004), 3–30; англ. пер.: K. I. Beidar, A. V. Mikhalev, M. A. Chebotar, *Russian Math. Surveys*, **59**:3 (2004), 403–428.

А. С. Гордиенко (A. S. Gordienko)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: gordienko_a_s@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
07.12.2008