Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Айгунов, А. К. Ильясова, Об одном уравнении типа Лиувилля с одной внутренней сингулярной точкой, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 135–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 11:29:25

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Об одном уравнении типа Лиувилля
с одной внутренней сингулярной точкой

Г. А. Айгунов, А. К. Ильясова

Проблеме получения многообразия решений для линейных и нелинейных уравнений гиперболического типа посвящены работы А. В. Бицадзе [1], М. М. Смирнова [2], Л. С. Пулькиной [3], А. М. Нахушева [4], Н. Р. Раджабова [5]. Некоторые квазилинейные уравнения в регулярных и сингулярных случаях изучены в работах С. Т. Фозилова и Н. Р. Раджабова [6], [7].

Пусть область Ω представляет собой прямоугольник $\pi(\alpha, \beta)$, т. е.

$$\pi(\alpha, \beta) = \{(x, y) : 0 < x < \alpha, 0 < y < \beta\}.$$

Обозначим:

$$\pi(\alpha) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \alpha, y = 0\}, \quad \pi(\beta) = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq \beta\}.$$

В области Ω рассмотрим уравнение вида

$$L_{(sl)}[u] + \frac{b(x, y)}{r} \exp\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a(x, y)}{r} u\right) = 0, \quad (1)$$

где $L_{(sl)}$ — линейный сингулярный дифференциальный оператор второго порядка, который задается формулой

$$L_{(sl)} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{a(x, y)}{r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{c(x, y)}{r^2},$$

$a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — заданные непрерывные вещественные функции области Ω и $r^2 = x^2 + y^2$.

Цель настоящего исследования заключается в следующем: налагая определенные условия на коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, для уравнения (1) получить интегральное представление многообразия решений в явном виде, которое содержит две произвольные функции контуров $\pi(\alpha)$, $\pi(\beta)$, зависящих от одного переменного.

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены следующие условия:

а) $a(x, y) \in C_x^1(\Omega)$, в окрестности сингулярной точки $a(x, y)$ удовлетворяет условию Гёльдера $|a(x, y) - a(0, 0)| \leq r^{\alpha_1} H_1$, где $H_1 = \text{const}$, $0 < \alpha_1 < 1$;

б) $b(x, y), c(x, y) \in C(\Omega)$, функция $b(x, y)$ в окрестности сингулярной точки удовлетворяет условию Гёльдера $|b(x, y) - b(0, 0)| \leq r^{\alpha_2} H_2$, где $H_2 = \text{const}$, $0 < \alpha_2 < 1$;

в) $rc(x, y) - r^2 \frac{\partial a}{\partial x} + xa(x, y) = 0$.

Тогда всякое решение уравнения (1) из класса $C^2(\Omega)$ представимо в явном виде и выражается следующей формулой:

$$u(x, y) = \left(\frac{x}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)^{a(0,0)} \exp(-\omega_1(x, y)) \\ \times \left[\varphi(x) - \int_0^y \log |\psi(\tau) + \omega_2(x, \tau) + b(0, 0) \log |x + \sqrt{x^2 + \tau^2} || \right. \\ \left. \times \exp(-\omega_1(x, \tau)) \left(\frac{\tau + \sqrt{x^2 + \tau^2}}{x} \right)^{a(0,0)} d\tau \right],$$

где $\varphi(x), \psi(y)$ – произвольные непрерывные вещественные функции, причем $\varphi(x) \in C^2(\pi(\alpha))$, $\psi(y) \in C^1(\pi(\beta))$, а

$$\omega_1(x, y) = \int_0^y \frac{a(x, \tau) - a(0, 0)}{\sqrt{x^2 + \tau^2}} d\tau, \quad \omega_2(x, y) = \int_0^x \frac{b(t, y) - b(0, 0)}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt.$$

Список литературы

- [1] А. В. Бицадзе, *Некоторые классы уравнений в частных производных*, Наука, М., 1981; англ. пер.: A. V. Bitsadze, *Some classes of partial differential equations*, Adv. Stud. Contemp. Math., 4, Gordon and Breach, New York, 1988. [2] М. М. Смирнов, *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Высшая школа, Минск, 1977. [3] Л. С. Пулькина, *Труды второго международного семинара “Дифференциальные уравнения и их приложения”*, Самара, 1988, 129–132. [4] А. М. Нахушев, *Дифференц. уравнения*, 5 (1969), 44–59. [5] Н. Р. Раджабов, *Докл. АН СССР*, 281:3 (1985), 534–539; англ. пер.: N. Radzhabov, *Soviet. Math. Dokl.*, 31 (1985), 323–327. [6] С. Т. Фозилов, Н. Р. Раджабов, *Журнал фундаментальных и прикладных исследований “Естественные науки”*, 2004, № 3(9), 101–104. [7] С. Т. Фозилов, *К теории нелинейных уравнений в частных производных*, вып. 1, Поиск, Астрахань, 2003.

Г. А. Айгунов (G. A. Aigunov)
Дагестанский государственный университет

Представлено Р. А. Минлосом
Принято редколлегией
18.12.2008

А. К. Ильясова (A. K. Ilyasova)
Астраханский государственный
технический университет
E-mail: ilyasova77@mail.ru