Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Оревков, М. Г. Зайденберг, О жестких рациональных каспидальных плоских кривых, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm927>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 06:25:15

О ЖЕСТКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ КАСПИДАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

М. Г. ЗАЙДЕНБЕРГ, С. Ю. ОРЕВКОВ

Пусть Y – гладкая аффинная алгебраическая поверхность над $\mathbb{C}$. Предположим, что она $\mathbb{Q}$ -ациклична, т.е. $H_i(Y; \mathbb{Q}) = 0$, $i > 0$, и что она $\log$ -общего типа, т.е. $\bar{k}(Y) = 2$, где $\bar{k}$ – логарифмическая размерность Кодaira (см. [4], [5], [7]). В [2] поставлен вопрос, является ли такая поверхность жесткой. Жесткость означает, что $h^1(\Theta) = 0$, где X – минимальное гладкое пополнение поверхности Y дивизором D с простыми нормальными пересечениями (SNC-дивизор), а $\Theta = \Theta_X(D)$ – логарифмическое касательное расслоение на X вдоль D . При $\bar{k} = 2$ все известные $\mathbb{Q}$ -ациклические поверхности жестки. Для $\chi = h^0 - h^1 + h^2$ имеет место $\chi(\Theta) = (K_X + D)^2 + 2$ (см. [2, лемма 1.3(5)]).

1. Формулировка результата. Рассмотрим плоскую неприводимую кривую D . Легко видеть, что $Y = \mathbb{P}^2 \setminus D$ является $\mathbb{Q}$ -ациклической, если и только если D рациональна и каспидальна (мы называем кривую *каспидальной*, если все ее особенности суть *каспы*, т.е. аналитически неприводимы). Если D имеет как минимум 3 каспа, то $\bar{k}(Y) = 2$ (см. [9]). Жесткость Y эквивалентна *проективной жесткости* D : любая эквисингулярная вложенная деформация проективно эквивалентна D [3, (2.1)]. Жесткость имеет место во всех известных примерах [3]. Настоящая заметка посвящена доказательству следующего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (1.1) (см. [8]). *Проективно жесткая рациональная каспидальная кривая в $\mathbb{P}^2$ имеет не более 9 каспов.*

2. Логарифмическое неравенство Богомолова–Мияоки–Яо (log-БМЯ). Пусть D – некоторая SNC-кривая на гладкой проективной поверхности X , и $Y = X \setminus D$. При $\bar{k}(Y) \geq 0$ существует *разложение Зарисского* $K + D = H + N$, где H, N – $\mathbb{Q}$ -дивизоры на X такие, что (i) форма пересечения отрицательно определена на подпространстве V_N , порожденным неприводимыми компонентами N (в частности, $N^2 \leq 0$); (ii) $HC \geq 0$ для каждой неприводимой кривой $C \subset X$; (iii) H ортогонален к V_N (значит, $(K + D)^2 = H^2 + N^2$).

ТЕОРЕМА (2.1) [7], [5]. *Если $\bar{k}(Y) = 2$, то $H^2 \leq 3e(Y)$, где e – эйлерова характеристика.*

3. Двойственный граф. Пусть E – SNC-кривая на гладкой поверхности с неприводимыми компонентами $E_1, \dots, E_k$. Пусть $A_E = (E_i \cdot E_j)_{ij}$ – ее матрица пересечений. Это то же самое, что матрица инцидентности *двойственного графа* Γ_E кривой E . Его вершины отвечают неприводимым компонентам E , а ребра – их точкам пересечения; вес вершины определен как индекс самопересечения соответствующей компоненты. Положим $d(\Gamma_E) = \det(-A_E)$. Экстремальную линейную ветвь графа назовем *твигом*. Крайнюю вершину твига T обозначим через $\text{tip}(T)$. *Индуктивность* твига T определим как $\text{ind}(T) = d(T - \text{tip}(T))/d(T)$. Применяя правило Крамера, получаем следующую лемму.

ЛЕММА (3.1). *Если Γ – взвешенное дерево с $d(\Gamma) \neq 0$, и $B = (b_{ij}) = A^{-1}$, где A – матрица инцидентности, то $b_{ij} = -d(\Gamma - [ij])/d(\Gamma)$, где $[ij]$ – минимальный подграф, содержащий i -ю и j -ю вершины.*

Комбинируя (3.1) с формулой Якоби для минора обратной матрицы, примененной к 2×2 -минору, отвечающему вершинам v и v_0 , получаем еще одну лемму.

ЛЕММА (3.2). *Пусть Γ – взвешенное дерево, T – его твиг, инцидентный вершине $v_0 \in \Gamma - T$, и $v = \text{tip}(T)$. Положим $d_T(\Gamma) = d(\Gamma - T - v_0)$. Тогда $d_T(\Gamma) = d(\Gamma - v)d(T) - d(\Gamma)d(T - v)$.*

СЛЕДСТВИЕ (3.3). *Если $d(\Gamma) = 1$ и $d(T) \neq 0$, то $\text{ind}(T) = \lfloor d_T(\Gamma)/d(T) \rfloor$. (Здесь $\lfloor a \rfloor$ означает $\lceil a \rceil - a$, где $\lceil a \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq a\}$.)*

4. Разложение Пюизо и двойственный граф разрешения. Пусть C – росток плоской неприводимой аналитической кривой в особой точке p , и пусть $E = \bigcup E_i$ – исключительная кривая минимального разрешения особенности, а Γ – двойственный граф кривой $E \cup C$. В подходящих аналитических координатах C имеет вид $x = t^n$, $y = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots$. Положим $d_1 = n$, $m_i = \min\{j \mid a_j \neq 0 \text{ и } j \not\equiv 0 \pmod{d_i}\}$, $d_{i+1} = \gcd(d_i, m_i)$. Пусть h таково, что $d_h \neq 1$, $d_{h+1} = 1$. Положим $r_1 = m_1$; $r_i = r_{i-1} d_{i-1} / d_i + m_i - m_{i-1}$ при $i > 1$.

Предложение (4.1) [1]. (а) Граф Γ имеет вид

где в виде ребер изображены линейные цепочки вершин.

(б) Пусть R_i , D_i и S_i – компоненты связности графа $\Gamma - E_i$, расположенные соответственно слева, снизу и справа от вершины E_i . Тогда $d(R_i) = r_i / d_{i+1}$, $d(D_i) = d_i / d_{i+1}$, $d(S_i) = 1$.

Обозначим через n_p сумму индуктивностей всех твиггов графа Γ , не содержащих C .

Следствие (4.2). $n_p = \lfloor d_1 / r_1 \rfloor + \sum_{i=1}^h \lfloor r_i / d_i \rfloor > 1/2$.

Доказательство. Поскольку $d(\Gamma) = 1$, требуемое равенство вытекает из (3.3). Поэтому $n_p \geq \lfloor d_1 / r_1 \rfloor + \lfloor r_1 / d_1 \rfloor$. Очевидно, что если $0 < x < 1$, $x \neq 1/2$, то $\lfloor x \rfloor + \lfloor 1/x \rfloor > 1/2$.

5. Пусть D – рациональная каспидальная кривая в $\mathbb{P}^2$, и $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ – минимальное разрешение особенностей D , т.е. $\tilde{D} = \sigma^{-1}(D)$ – SNC-дивизор, и $X \setminus \tilde{D} = Y$. Пусть $K + \tilde{D} = H + N$ – разложение Зарисского. Обозначим: $S = \text{Sing}(D)$, $s = \#S$.

Лемма (5.1). Если $s \geq 3$, то $-N^2 = \sum_{p \in S} n_p$.

Доказательство. Поверхность Y $\mathbb{Q}$ -ациклична, и при этом в силу [9] мы имеем $\bar{k}(Y) = 2$. Поэтому Y не содержит односвязных кривых [10], [6]. Поскольку $s \geq 3$, граф $\Gamma_{\tilde{D}}$ имеет не менее трех точек ветвления. При этих условиях утверждение леммы доказано в [4, (6.20)–(6.24)].

Доказательство (1.1). Поскольку $\bar{k}(Y) = 2$ (см. [9]), то согласно неравенству лог-БМЯ (2.1), имеем $H^2 \leq 3$, а значит, по (5.1) и (4.2), $(K + \tilde{D})^2 = H^2 - \sum n_p < 3 - s/2$. Пусть $h^i = h^i(\Theta_X \langle \tilde{D} \rangle)$. Так как D предполагается жесткой, т.е. $h^1 = 0$, имеем $(K + \tilde{D})^2 + 2 = \chi(\Theta_X \langle \tilde{D} \rangle) = h^0 + h^2 \geq 0$. Значит, $s < 6 - 2(K + \tilde{D})^2 \leq 10$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Eisenbud D., Neumann W. D. // Ann. Math. Stud. V. 110. Princeton: Princeton Univ. Press, 1985. [2] Flenner H., Zaidenberg M. // Contemporary Math. 1964. V. 162. P. 143–208. [3] Flenner H., Zaidenberg M. On a class of rational cuspidal plane curves // Preprint, 1995. P. 1–28. [4] Fujita T. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (Ser. 1A). 1982. V. 29. P. 503–566. [5] Kobayashi R., Nakamura S., Sakai F. // Proc. Japan Acad. 1989. V. 65(A). P. 238–241. [6] Miyanishi M., Tsunoda S. // J. Math. Kyoto Univ. 1992. V. 32. P. 443–450. [7] Miyaoka Y. // Math. Ann. 1984. V. 268. P. 159–171. [8] Orevkov S. Y., Zaidenberg M. G. // Algebraic Geometry. Proc. Conf., Saintama Univ., March 15–17, 1995 (to appear). [9] Wakabayashi I. // Proc. Japan Acad. 1978. V. 54(A). P. 157–162. [10] Зайденберг М. Г. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. С. 534–567; 1991. Т. 55. С. 444–446.

Университет Гренобль I

e-mail: zaidenbe@fourier.grenet.fr;

НИИ Системных Исследований РАН, Москва

e-mail: orevkov@glas.apc.org

Принято редколлегией

01.11.1995