Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Фёдоров, Арифметические условия мономиальности конечных групп, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:35:17

Арифметические условия мономиальности конечных групп

С. Н. Фёдоров

Конечная группа G называется *мономиальной* или $\mathcal{M}$ -группой, если для каждого ее неприводимого характера χ существует такой линейный характер λ некоторой подгруппы $U \leq G$, что $\chi = \lambda^G$. Эквивалентное условие: матрицы каждого неприводимого представления G (в некотором базисе пространства представления) мономиальны, т.е. имеют точно один ненулевой элемент в каждом столбце и каждой строке.

К. Такета [1] доказал, что $\mathcal{M}$ -группы разрешимы. Обратное неверно, минимальный (по порядку) пример разрешимой немономиальной группы $SL(2, 3)$ порядка 24 [2; § 24.7c]. Задача теоретико-групповой характеристики $\mathcal{M}$ -групп значительно затруднена незамкнутостью класса $\mathcal{M}$ -групп относительно взятия подгрупп. Как было показано Э. Дейдом, любая разрешимая группа изоморфно вкладывается в $\mathcal{M}$ -группу (см. [3]). $\mathcal{M}$ -группы, все подгруппы которых мономиальны, называют $\mathcal{M}$ -группами. Отметим, что метабелевы и сверхразрешимые группы являются $\mathcal{M}$ -группами.

Как известно, в теории конечных групп и их характеров существует некоторый параллелизм между результатами, касающимися классов сопряженных элементов групп, и результатами, касающимися ее неприводимых характеров. Однако часто оказывается, что условия, накладываемые на мощности классов сопряженности, жестче ограничивают вариации в строении группы, чем аналогичные условия на степени неприводимых характеров. Это подтверждают и предложения, приведенные ниже.

Некоторые обозначения: g^G – класс сопряженных элементов группы G , содержащий $g \in G$; $cs(G)$ – множество мощностей классов сопряженных элементов группы G ; $cd(G)$ – множество степеней неприводимых характеров группы G .

Граф классов сопряженных элементов $\Gamma(G)$ группы G – это граф, вершины которого – все нецентральные классы сопряженных элементов группы G , вершины g_1^G и g_2^G соединены ребром тогда и только тогда, когда $(|g_1^G|, |g_2^G|) \neq 1$. Впервые дополнительный к описанному граф ввел Л. С. Казарин в [4]. Уже сам граф $\Gamma(G)$ исследовали с конца 1980-х годов Э. Бертрам, М. Герцог, А. Манн, Д. Чиллаг и др.

Аналогично определяется граф неприводимых характеров $\Delta(G)$: вершины – линейные неприводимые характеры группы G , и вершины χ и ψ соединены ребром, если $(\chi(1), \psi(1)) \neq 1$. Граф изучали О. Манц, В. Виллемс, Дж. Маквей, Д. Чиллаг и др.

Рассмотрим сначала условия арифметического характера на классы сопряженных элементов группы G , влекущие ее мономиальность или, в большинстве случаев, даже более сильные свойства.

(1) Если все элементы множества $cs(G)$ – степени простого числа p , то группа G нильпотентна.

Это нетрудно доказать, используя лишь тот факт, что мощность каждого класса сопряженности факторгруппы делит мощность некоторого класса самой группы.

(2) Если мощности всех нецентральных классов сопряженных элементов группы G равны между собой, то группа G нильпотентна [5].

(3) Если элементы множества $cs(G)$ можно разбить на две непустые группы – π -чисел и π' -чисел для некоторого $\emptyset \neq \pi \subsetneq \pi(G)$ (в частности, если они являются степенями простых чисел), то группа G нильпотентна или метабелева.

Здесь, кроме (1) и (2), используем результаты [6] о случае несвязного графа Γ .

(4) Если все элементы множества $cs(G)$ – последовательные натуральные числа от 1 до k , то $k \leq 3$ и группа G метабелева.

Это следствие применения результатов [2; § 32.10a] и [6].

(5) Если все элементы множества $cs(G)$ свободны от квадратов, то группа G сверхразрешима [7].

(6) Если граф классов сопряженных элементов $\Gamma(G)$ группы G не содержит полного подграфа с четырьмя вершинами, то G – $\mathcal{M}$ -группа.

Доказательство использует основную теорему из [8]. Заметим, что нельзя усилить вывод этого утверждения ни до сверхразрешимости, ни до метабелевости – примером тому служит группа S_4 с $\text{cs}(S_4) = \{1, 3, 6, 8\}$ (6 входит с кратностью 2). Если потребовать, чтобы $\Gamma(G)$ не содержал полного подграфа с пятью вершинами, то можно показать, что в этом случае либо G – $\mathcal{M}$ -группа, либо $G \cong A_5$.

Заметим в качестве следствия, что в условиях утверждений (1)–(6) группа G , очевидно, мономиальна.

Перейдем теперь к вопросу о возможных аналогах данных утверждений в случае степеней неприводимых характеров вместо мощностей классов сопряженности.

(1') Если все элементы множества $\text{cd}(G)$ – степени простого числа p , то группа G мономиальна.

Группа $A_4 \cong \text{PSL}(2, 3)$ удовлетворяет условию, но не является сверхразрешимой. Можно также построить подходящий пример неметабелевой группы.

(2') Если степени всех степеней нелинейных неприводимых характеров группы G равны между собой, то группа G метабелева [2; § 27.1].

(3') Если все элементы множества $\text{cd}(G) \setminus \{1\}$ являются простыми числами, то группа G разрешима [2; § 31.1].

Если, как в (3), ослабить условие до степеней простых чисел, то вывод будет неверен: например, $\text{cd}(A_5) = \{1, 2^2, 3, 5\}$. С другой стороны, вывод утверждения усилить нельзя: немономиальная группа $G = \text{SL}(2, 3)$ имеет $\text{cd}(G) = \{1, 2, 3\}$. Этот же пример не позволяет сформулировать адекватный аналог утверждения (4) (о группах с последовательными степенями неприводимых характеров см. [9]).

(5') Если элементы множества $\text{cd}(G)$ свободны от квадратов, а силовские p -подгруппы группы Фиттинга $F(G)$ не имеют сечений, изоморфных группе кватернионов порядка 8 для $p = 2$ и экстраспециальным группам порядка p^3 экспоненты p для нечетных p , то либо (а) G мономиальна; либо (б) $G \cong A_7 \times H$, где H – $\mathcal{M}$ -группа, и тогда $\text{cd}(G)$ содержит множество $\{1, 6, 10, 14, 15, 21, 35\}$.

В основе доказательства этого факта лежат результаты из работы [10].

(6') Если граф неприводимых характеров $\Delta(G)$ группы G не имеет ребер, то G – нильпотентна или метабелева.

Такой будет, например, несверхразрешимая группа A_4 , имеющая единственный нелинейный неприводимый характер. Если граф $\Delta(G)$ не содержит треугольников, то в общем случае G даже не разрешима: $\Delta(A_5)$ состоит из двух соединенных ребром вершин, соответствующих характерам степени 3, и двух изолированных вершин.

Список литературы

- [1] K. Taketa, *Proc. Imp. Acad.*, **6**:2 (1930), 31–33. [2] B. Huppert, *Character theory of finite groups*, de Gruyter Exp. Math., **25**, de Gruyter, Berlin, 1998. [3] G. M. Seitz, *Math. Z.*, **110**:2 (1969), 101–122. [4] Л. С. Казарин, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, № 7, 40–45. [5] N. Itô, *Nagoya Math. J.*, **6** (1953), 17–28. [6] E. A. Bertram, M. Herzog, A. Mann, *Bull. London Math. Soc.*, **22**:6 (1990), 569–575. [7] D. Chillag, M. Herzog, *J. Algebra*, **131**:1 (1990), 110–125. [8] A. Moretó, G. Qian, W. Shi, *Arch. Math. (Basel)*, **85**:2 (2005), 101–107. [9] B. Huppert, *Forum Math.*, **1**:2 (1989), 167–183. [10] B. Huppert, O. Manz, *Arch. Math. (Basel)*, **45**:2 (1985), 125–132.

С. Н. Фёдоров (S. N. Fedorov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: Sergey.Fedorov@mail.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
07.12.2008