Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Бучок, Остроугольные треугольники Данцера–Грюнбаума, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:33:42

Остроугольные треугольники Данцера–Грюнбаума

Л. В. Бучок

1. Постановка задачи. Данная работа посвящена оценкам мощностей множеств точек евклидова пространства, в которых любые три точки образуют острый угол. Обозначим через $a(n)$ мощность максимального множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ с данным свойством; $k(n)$ – то же самое для множества $S \subseteq \{0, 1\}^n$. Известно, что $k(n) \leq a(n) \leq 2^n$.

В 1962 г. Л. Данцер и Б. Грюнбаум высказали гипотезу о том, что $a(n) = 2n - 1$ (см. [1]). В 1983 г. эту гипотезу опровергли П. Эрдеши и З. Фюреди, доказав, что $k(n) \geq \lfloor (2/\sqrt{3})^n / 2 \rfloor$ (см. [2]). В 2006 г. Д. Беван, используя метод Эрдеши–Фюреди, получил оценки

$$k(n) \geq 2 \left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor = 0.544 \dots \cdot (1.154 \dots)^n,$$

$$a(n) \geq 2 \left\lfloor \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \right\rfloor = 0.770 \dots \cdot (1.154 \dots)^n$$

(см. [3]). Кроме того, Д. Беван получил и ряд результатов для малых размерностей n , вследствие чего гипотеза Данцера–Грюнбаума была опровергнута при $n \geq 7$.

2. Вероятностный метод.

ТЕОРЕМА 1 (Эрдеши, Фюреди, 1983). *Имеет место неравенство*

$$a(n) \geq k(n) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor.$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Положим $m = \lfloor (2/\sqrt{3})^n / 2 \rfloor$ и возьмем случайное множество $S \subseteq \{0, 1\}^n$ из $2m$ (не обязательно различных) $(0, 1)$ -векторов; при этом координаты каждого вектора $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ из S мы выберем независимо, с вероятностью $P(v_i = 0) = P(v_i = 1) = 1/2$, $1 \leq i \leq n$; выбор самих векторов мы также осуществим независимо, именно поэтому некоторые векторы могут получиться одинаковыми.

Назовем тройку векторов $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \subset S$ *обобщенным прямым углом* с вершиной в $\vec{w}$, если $(\vec{u} - \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = 0$. Это выполнено тогда и только тогда, когда набор (u_i, v_i, w_i) не имеет вида $(0, 0, 1)$ или $(1, 1, 0)$ ни для какого $i \in \{1, \dots, n\}$. Вероятность последнего события равна $(3/4)^n$. Значит, математическое ожидание количества обобщенных прямых углов в S равно $3C_{2m}^3 (3/4)^n$. Заметим, что все прямые углы в нашем множестве являются обобщенными прямыми углами, а тупых углов тройки $(0, 1)$ -векторов не образуют. Поскольку $3C_{2m}^3 (3/4)^n \leq m$ (в силу выбора m), найдется множество S из $2m$ векторов, в котором не более m обобщенных прямых углов. Если мы удалим из S вершины всех этих углов, останется множество из не менее m различных точек, никакие три из которых не образуют прямой угол. Таким образом, $k(n) \geq m$, и доказательство теоремы завершено.

3. Улучшение вероятностного метода. Основной результат настоящей работы сформулирован в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место неравенства*

$$k(n) \geq \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{11\sqrt{66}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor = 0.551 \dots \cdot (1.154 \dots)^n,$$

$$a(n) \geq \frac{3}{2} \left\lfloor \frac{22\sqrt{33}}{243} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \right\rfloor = 0.780 \dots \cdot (1.154 \dots)^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $m = \lfloor (11\sqrt{66}/243)(2/\sqrt{3})^n \rfloor$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, получим, что математическое ожидание числа обобщенных прямых углов в случайном множестве из $M = \lceil (27/11)m \rceil$ точек не превосходит m .

Следовательно, существует некоторое множество S из M точек, в котором q обобщенных прямых углов, $q \leq m$. Заметим, что если некоторые две точки совпадают, то эти две точки образуют обобщенный прямой угол с любой другой точкой из S , и количество обобщенных прямых углов в этом случае будет не меньше $M - 2 > m$, что противоречит выбору S . Значит, в нашем множестве S нет совпадающих точек, и мы можем говорить о прямоугольных треугольниках, образованных точками из S .

Назовем *независимыми* те прямоугольные треугольники, которые не имеют общих вершин ни с какими другими. Обозначим число независимых треугольников в S через k , тогда общее число их вершин будет равно $3k$. Очевидно, что $k \leq M/3$. Чтобы удалить из S все независимые прямоугольные треугольники, необходимо удалить по одной вершине из каждого, следовательно, всего нужно удалить не менее k точек.

Допустим, что после удаления из S независимых треугольников в S еще остались прямоугольные треугольники (их число будет $q - k$). Тогда найдутся точки, каждая из которых является вершиной более чем одного прямоугольного треугольника. Отметим одну из них. Посмотрим, что получится после удаления из S этой точки. Пусть она является общей вершиной d прямоугольных треугольников (назовем их *базовыми*), тогда после ее удаления количество прямоугольных треугольников в S уменьшится на d , и могут возникнуть новые независимые треугольники. Назовем *свободными* треугольники, становящиеся независимыми после удаления отмеченной точки. Число свободных треугольников не может превышать $2d$, так как они по определению не имеют общих вершин, а общее число вершин базовых треугольников не превосходит $2d + 1$, считая отмеченную.

Обозначим число свободных треугольников через b . Если $b = 2d$ или $b = 2d - 1$, поступаем следующим образом: удаляем из S все вершины, по которым базовые треугольники пересекаются со свободными (не трогая отмеченную точку). Если же $b < 2d - 1$, удаляем все точки пересечения базовых треугольников со свободными и отмеченную точку. Как нетрудно проверить, в обоих случаях количество удаленных точек не превосходит $3/4$ от числа удаленных этим действием прямоугольных треугольников.

Следовательно, чтобы избавиться от прямоугольных треугольников в S , достаточно удалить $k + 3(q - k)/4$ точек. При этом останется $M - (k + 3(q - k)/4) \geq M - 3m/4 - M/12 \geq 3m/2$ точек.

Отсюда получаем, что $k(n) \geq (3/2)\lfloor (11\sqrt{66}/243)(2/\sqrt{3})^n \rfloor$.

В [2] описывается способ построения случайного множества $T \subseteq \mathbb{R}^n$, для которого математическое ожидание числа обобщенных прямых углов не превосходит $(3/2)C_N^3 l(3/4)^n$, где N — мощность T .

Возьмем $m = \lfloor (22\sqrt{33}/243)(2/\sqrt{3})^n \rfloor$, $N = \lceil (27/11)m \rceil$; получим, что математическое ожидание числа обобщенных прямых углов в T не превосходит m . Следовательно, существует множество T , в котором количество обобщенных прямых углов не превышает m . Применим к нему описанную выше технику удаления прямоугольных треугольников. Тем самым мы докажем оценку $a(n) \geq (3/2)\lfloor (22\sqrt{33}/243)(2/\sqrt{3})^n \rfloor$. Доказательство завершено.

Список литературы

- [1] L. Danzer, B. Grünbaum, *Math. Z.*, **79**:1 (1962), 95–99. [2] P. Erdős, Z. Füredi, *Combinatorial mathematics* (Marseille–Luminy, 1981), North-Holland Math. Stud., **75**, North-Holland, Amsterdam, 1983, 275–283. [3] D. Bevan, *Electron. J. Combin.*, **13**:1 (2006), 24 p.