Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Михалин, Специальные чебышёвские и золотарёвские перфектные сплайны на отрезке, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 2, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9272>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:28:14

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Специальные чебышёвские и золотарёвские
перфектные сплайны на отрезке

Д. А. Михалин

Про непрерывную на отрезке $[a, b]$ функцию $x(\cdot)$ говорят, что она имеет N -альтернанс, если существуют точки $a \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N \leq b$ такие, что $|x(\tau_j)| = \|x(\cdot)\|_{C[a,b]}$ при $1 \leq j \leq N$ и $x(\tau_j)x(\tau_{j+1}) < 0$ при $1 \leq j < N$ (т. е. она N раз принимает попеременно свое наибольшее и наименьшее значение). Примером функции, имеющей на $[-1, 1]$ N -альтернанс, является полином Чебышёва $T_{N-1}(t) = \cos(N-1) \arccos t$.

Скажем, что функция $x(\cdot) \in C^{(n-1)}[a, b]$ удовлетворяет Γ_{uv} -условию на $[a, b]$, где $0 \leq u \leq n$ и $0 \leq v \leq n$, если $x^{(j)}(a) = 0$ при $0 \leq j \leq u-1$ и $x^{(j)}(b) = 0$ при $0 \leq j \leq v-1$ (если $u = 0$ или $v = 0$, то условия в соответствующем конце отрезка отсутствуют).

Перфектный сплайн степени n с m узлами (т. е. такой сплайн, что его n -я производная на отрезке $[a, b]$ m раз принимает попеременно значения ± 1), удовлетворяющий Γ_{uv} -условию на отрезке $[a, b]$, назовем $(nm\Gamma_{uv}[a, b])$ -сплайном. Если такой сплайн имеет $(n+m-(u+v)+1)$ -альтернанс на отрезке $[a, b]$, то будем называть его чебышёвским $(nm\Gamma_{uv}[a, b])$ -сплайном, а если лишь $(n+m-(u+v))$ -альтернанс, то золотарёвским.

На вопрос о существовании и единственности таких сплайнов отвечает

ТЕОРЕМА. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $m, u, v \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условиям $u, v \leq n$ и $n+m-(u+v) \geq 0$, существует чебышёвский $(nm\Gamma_{uv}[a, b])$ -сплайн $x_{nm\Gamma_{uv}[a, b]}(\cdot)$. Такой сплайн единствен с точностью до знака.

Для любого $\delta > 0$, лежащего между $\|x_{nm\Gamma_{uv}[a, b]}(\cdot)\|_{C[a, b]}$ и $\|x_{n, m-1, \Gamma_{uv}[a, b]}(\cdot)\|_{C[a, b]}$, существуют ровно четыре различных золотарёвских $(nm\Gamma_{uv}[a, b])$ -сплайна, равномерная норма которых на отрезке $[a, b]$ равна δ .

При отсутствии граничных условий существование чебышёвских сплайнов и их единственность с точностью до знака доказаны в работах В.М. Тихомирова [1], С. Карлина [2] и А.С. Каваретты [3]. Доказательство существования золотарёвских сплайнов без граничных условий, а также некоторые их свойства можно найти в работе [2].

Достаточно доказать существование и единственность искомых сплайнов на отрезке $[0, 1]$. Такие сплайны мы будем обозначать просто $(nm\Gamma_{uv})$ -сплайнами.

Доказательство существования чебышёвских $(nm\Gamma_{uv})$ -сплайнов основывается на теореме Борсука [4] (согласно которой нечетное непрерывное отображение r -мерной сферы $\mathbb{S}^r$ в $\mathbb{R}^r$ обращается в нуль в некоторой точке) и на свойствах обобщенных полных чебышёвских пространств (ЕСТ-пространств, см. [5], [6]).

При доказательстве единственности используется метод, примененный в работе [7] В.Н. Малоземовым и А.Б. Певным при доказательстве существования и единствен-

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-3233.2008.1).

ности чебышёвских $(nm\Gamma_{00})$ - и $(nm\Gamma_{nn})$ -сплайнов. Этот метод основан на подсчете числа нулей и нуль-интервалов у разности двух различных чебышёвских сплайнов.

Мы обозначаем чебышёвский $(nm\Gamma_{uv})$ -сплайн символом $x_{nm\Gamma_{uv}}(\cdot)$, а равномерную норму этого сплайна на отрезке $[0, 1]$ – символом $\delta_{nm\Gamma_{uv}}$.

В работе [2] при доказательстве существования и единственности чебышёвских и золотарёвских сплайнов без граничных условий Карлин использовал аппарат обобщенных перфектных сплайнов, которые получаются из обычных сплайнов сверткой с гауссовским ядром, что превращает класс сплайнов в чебышёвское подпространство. Этот же принцип применяется для доказательства второй части теоремы.

Упомянутые обобщенные сплайны строятся следующим образом. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Рассмотрим систему функций $A_j(t, \varepsilon)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), являющихся сверткой полиномов η^{j-1} с ядром $e^{-(t-\eta)^2/(2\varepsilon)}$, и функцию $u(\xi, t, \varepsilon)$, являющуюся сверткой функции $(\xi - 1 + \eta)_+^n$ с тем же ядром.

Для каждого набора $\{t_j\}_0^{n+m}$, удовлетворяющего неравенствам $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+m}$, рассмотрим функции $u_j(\xi) = u(\xi, t_j, \varepsilon)$ и величины $A_{jl} = A_l(t_j, \varepsilon)$ (мы будем опускать ε , если это не приведет к неоднозначности), причем будем считать, что если некоторые t_j совпадают ($t_{j_0-1} < t_{j_0} = t_{j_0+1} = \dots = t_{j_0+p-1} < t_{j_0+p}$), то для каждого $l = 0, 1, \dots, p-1$ выполнены равенства $u_{j_0+l}(\xi, \varepsilon) = \frac{\partial^l}{\partial t^l} u(\xi, t_{j_0}, \varepsilon)$ и $A_{j_0+l} = \frac{\partial^l}{\partial t^l} A_j(t_{j_0})$.

Обобщенным перфектным сплайном на отрезке $[0, 1]$ называется функция вида $x(t) = \sum_{j=1}^n a_j A_j(t) + c(u(1, t) - 2u(\eta_1, t) + 2u(\eta_2, t) - \dots + 2(-1)^m u(\eta_m, t) + (-1)^{m+1} u(0, t))$, где $\{a_j\}_1^n$ и c – некоторые константы, а $\{\eta_j\}_1^m$ – узлы сплайна, причем $1 > \eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_m > 0$. Если n, m, u, v – целые неотрицательные числа, $n \geq 1, u, v \leq n$, то обобщенный перфектный сплайн $x(\cdot)$ степени n с m узлами на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющий условиям $x^{(j)}(0) = 0$ при $0 \leq j \leq u-1$ и $x^{(j)}(1) = 0$ при $0 \leq j \leq v-1$, называется обобщенным перфектным $(nm\Gamma_{uv})$ -сплайном на отрезке $[0, 1]$.

Для семейства обобщенных перфектных $(nm\Gamma_{uv})$ -сплайнов справедлива

ЛЕММА. Пусть $n \geq 1, m, u, v \geq 0$ – целые числа, $u, v \leq n, \kappa := n + m - u - v \geq 0$. Тогда для каждого $b > 1$ существуют два обобщенных перфектных $(nm\Gamma_{uv})$ -сплайна $\tilde{x}_b(\cdot)$ и $\underline{x}_b(\cdot)$, имеющих κ -альтернанс, т.е. (i) $-1 \leq \tilde{x}_b(t), \underline{x}_b(t) \leq 1$ при $t \in [0, 1]$; (ii) существуют два набора точек $0 \leq \tau_{b1}^1 < \dots < \tau_{bk}^l \leq 1, l = 1, 2$, таких, что $\tilde{x}_b(\tau_{bj}^1) = (-1)^{j+1}, \underline{x}_b(\tau_{bj}^2) = (-1)^j$; (iii) $\tilde{x}_b(b) = \underline{x}_b(b) = 0$.

Аналогичное утверждение для обычных перфектных сплайнов доказывается рассмотрением предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$. Затем существование таких сплайнов, имеющих κ -альтернанс, доказывается и для некоторых $b < 1$. И, наконец, проверяется, что для $\delta_{n, m-1, \Gamma_{uv}} > \delta > \delta_{nm\Gamma_{uv}}$ ($\delta_{n, -1, \Gamma_{uv}} = +\infty$) существуют ровно четыре таких золотарёвских сплайна.

Примеры применения найденных чебышёвских и золотарёвских сплайнов можно найти в работе автора [8].

Список литературы

- [1] В. М. Тихомиров, *Матем. сб.*, **80:2** (1969), 290–304. [2] S. Karlin, *Studies in spline functions and approximation theory*, Academic Press, New York, 1976, 371–460. [3] A. S. Cavaretta, *J. Analyse Math.*, **28:1** (1975), 41–59. [4] К. Borsuk, *Fundamenta*, **20** (1933), 177–191. [5] В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, М., 1977. [6] В. Б. Демидович, *Приближенные вычисления с помощью обобщенных полиномов из чебышёвских пространств. Чебышёвские обобщенные полиномы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990. [7] В. Н. Малоземов, А. Б. Певный, *Полиномиальные сплайны*, Изд-во Лен. ун-та, Л., 1986. [8] Д. А. Михалин, *Фундам. и прикл. матем.*, **8:4** (2002), 1047–1058.