Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Крутицкий, Н. Ч. Крутицкая, О потенциалах статической теории упругости, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 12:44:41

О потенциалах статической теории упругости

П. А. Крутицкий, Н. Ч. Крутицкая

Под разомкнутой кривой понимается простая гладкая незамкнутая дуга конечной длины без самопересечений. В декартовых координатах $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости рассмотрим простую гладкую разомкнутую кривую Γ класса $\mathbb{C}^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$, параметризованную длиной дуги s : $\Gamma = \{x : x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [a, b]\}$. Тем самым, между точками $x \in \Gamma$ и значениями параметра s имеется взаимно однозначное соответствие. Вектор касательной к кривой Γ в точке $x(s)$, указывающий направление возрастания параметра s , обозначим $\tau_x = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$, а вектор нормали, совпадающий с вектором касательной при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, обозначим $\mathbf{n}_x = (\sin \alpha(s), -\cos \alpha(s))$. При выбранной параметризации $\cos \alpha(s) = x'_1(s)$, $\sin \alpha(s) = x'_2(s)$. Отрезок $[a, b]$ будет также обозначаться Γ .

Пусть $\mathbb{C}^{0,\omega}[a, b]$ – класс функций, гёльдеровых с показателем ω на $[a, b]$. Будем говорить, что $\mathcal{F}(s) \in \mathbb{C}^{0,\omega}_q[a, b]$, если $\mathcal{F}_0(s) \in \mathbb{C}^{0,\omega}[a, b]$, где $\mathcal{F}_0(s) = \mathcal{F}(s)|s - a|^q|s - b|^q$.

Рассмотрим Γ как разрез на плоскости. Ту сторону разреза Γ , которая остается слева при возрастании параметра s , обозначим Γ^+ , а противоположную сторону обозначим Γ^- .

Векторное уравнение статической теории упругости в координатах (x_1, x_2) относительно вектора $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ имеет вид $\eta \Delta \mathbf{v} + (\kappa + \eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, где η, κ – константы такие, что $\eta \neq 0$, $\kappa \neq -2\eta$ и $\kappa \neq -3\eta$.

Пусть $\mu_1(s), \mu_2(s)$ – интегрируемые функции, заданные на $[a, b]$. Введем столбец $\mu(s) = (\mu_1(s), \mu_2(s))^T$. Цель настоящей заметки – изучить потенциалы статической теории упругости, которые можно записать в виде:

$$\begin{aligned} V_1[\mu](x) &= \frac{p_1}{4\pi} \left\{ - \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \ln |x - y(\sigma)| d\sigma + p_2 \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{1 + \cos(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma \right. \\ &\quad \left. + p_2 \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\sin(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma \right\}, \\ V_2[\mu](x) &= \frac{p_1}{4\pi} \left\{ p_2 \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\sin(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \ln |x - y(\sigma)| d\sigma \right. \\ &\quad \left. + p_2 \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{1 - \cos(2\psi(x, y(\sigma)))}{2} d\sigma \right\}, \end{aligned}$$

где $p_1 = \frac{\kappa + 3\eta}{\eta(\kappa + 2\eta)}$, $p_2 = \frac{\kappa + \eta}{\kappa + 3\eta}$, $\cos \psi(x, y(\sigma)) = \frac{x_1 - y_1(\sigma)}{|x - y(\sigma)|}$, $\sin \psi(x, y(\sigma)) = \frac{x_2 - y_2(\sigma)}{|x - y(\sigma)|}$,

$$|x - y(\sigma)| = \sqrt{(x_1 - y_1(\sigma))^2 + (x_2 - y_2(\sigma))^2}, \quad y(\sigma) = (y_1(\sigma), y_2(\sigma)) \in \Gamma,$$

и использованы формулы $\cos(2\psi) = 2\cos^2(\psi) - 1 = 1 - 2\sin^2(\psi)$, $\sin(2\psi) = 2\sin \psi \cos \psi$.

ТЕОРЕМА. Пусть Γ – разомкнутая кривая класса $\mathbb{C}^{1,\lambda}$, $\lambda \in (0, 1]$. Кроме того, пусть $\mu_1(\sigma), \mu_2(\sigma) \in \mathbb{C}^\omega_q[a, b]$, $\omega \in (0, 1]$, $q \in [0, 1]$. Тогда:

1) функции $V_1[\mu](x)$, $V_2[\mu](x)$ принадлежат $\mathbb{C}^0(\mathbb{R}^2) \cap \mathbb{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$, а $\nabla V_1[\mu](x)$ и $\nabla V_2[\mu](x)$ принадлежат ${}^1\mathbb{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X)$, где $X = x(a) \cup x(b)$ – множество концов Γ ;

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00082, 09-01-00025).

¹Через $\mathbb{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \setminus X)$ обозначается класс функций, которые непрерывны вне Γ , непрерывно продолжимы на стороны разреза Γ слева и справа во внутренних точках, но предельные значения каждой функции на Γ слева и справа могут быть разными.

2) предельные значения нормальной и касательной производных потенциалов $V_1[\mu](x)$ и $V_2[\mu](x)$ на $\Gamma^\pm \setminus X$ даются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1[\mu](x)}{\partial \tau_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^\pm} &= \frac{\partial V_1[\mu](x(s))}{\partial s} = \frac{p_1}{4\pi} \left\{ - \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right. \\ &+ p_2 \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \\ &\left. - p_2 \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right\}, \\ \frac{\partial V_2[\mu](x)}{\partial \tau_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^\pm} &= \frac{\partial V_2[\mu](x(s))}{\partial s} = \frac{p_1}{4\pi} \left\{ - \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right. \\ &- p_2 \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \\ &\left. - p_2 \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right\}, \\ \frac{\partial V_1[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^\pm} &= \frac{p_1}{4\pi} \left\{ \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right. \\ &+ p_2 \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \pm \pi p_2 \mu_2(s) \sin(2\alpha(s)) \\ &\left. - p_2 \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \pm \pi \mu_1(s) (1 + p_2 \cos(2\alpha(s))) \right\}, \\ \frac{\partial V_2[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{x=x(s) \in \Gamma^\pm} &= \frac{p_1}{4\pi} \left\{ \pm \pi p_2 \mu_1(s) \sin(2\alpha(s)) + \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \frac{\sin(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right. \\ &- p_2 \int_{\Gamma} \mu_1(\sigma) \cos(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \pm \pi \mu_2(s) (1 - p_2 \cos(2\alpha(s))) \\ &\left. - p_2 \int_{\Gamma} \mu_2(\sigma) \sin(2\psi(x, y(\sigma))) \frac{\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))}{|x - y(\sigma)|} d\sigma \right\}, \end{aligned}$$

где интегралы, содержащие $\cos(\psi(x, y(\sigma)) - \alpha(s))$, понимаются в смысле главного значения;

3) для любой точки $x \notin \Gamma$, расположенной в малой окрестности конца $x(d)$ ($d = a$ или $d = b$), выполняются неравенства

$$\left| \frac{\partial V_1[\mu](x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{\text{const}}{|x - x(d)|^\delta}, \quad \left| \frac{\partial V_2[\mu](x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{\text{const}}{|x - x(d)|^\delta}, \quad j = 1, 2,$$

где $\delta = q$, если $q \in (0, 1)$, и δ – произвольное число из интервала $(0, 1)$, если $q = 0$.

Теорема вытекает из результатов работ [1], [2].

Список литературы

- [1] П. А. Крутицкий, *ЖВМ и МФ*, **34**:8–9 (1994), 1237–1257; англ. пер.: P. A. Krutitskii, *Comput. Math. Math. Phys.*, **34**:8–9 (1994), 1073–1090. [2] P. A. Krutitskii, *Quart. Appl. Math.*, **65**:3 (2007), 549–569.

П. А. Крутицкий (P. A. Krutitskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Представлено М. И. Зеликиным
Принято редколлегией
07.12.2008

Н. Ч. Крутицкая (N. Ch. Krutitskaya)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова