Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Скрыбин, Модельная задача в конусе для функционально-дифференциального оператора с преобразованиями поворота, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:00:35

**Модельная задача в конусе
для функционально-дифференциального оператора
с преобразованиями поворота**

М. А. Скрябин

Необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме для дифференциальных операторов были получены М. И. Вишиком и Л. Гордингом [1], [2]. Позднее А. Л. Скубачевский [3] получил необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных операторов в виде положительной определенности некоторых матриц. Используя аппарат банаховых алгебр, Л. Е. Россовский [4] получил необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности в алгебраической форме для функционально-дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами с преобразованиями растяжения и сжатия аргумента. Полученные им условия записывались в виде положительности некоторой функции. В настоящей работе рассматриваются функционально-дифференциальные операторы с преобразованиями поворота.

Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = \alpha x_n^2\}$ – конус в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$(Au)(x) = - \sum_{i,j=1}^n (\Phi_{ij}u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n \Phi_i u_{x_i} + \Phi_0 u(x), \quad (1)$$

действующий из $\dot{C}^\infty(Q)$ в $L_2(Q)$. Здесь операторы $\Phi_{ij} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $i, j = 1, \dots, n$, и $\Phi_i : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $i = 0, \dots, n$, являются линейными и ограниченными, причем

$$(\Phi_{ij}u)(x) = \sum_{g \in G} a_{ijg} u(g(x)),$$

где G – конечное множество преобразований поворота относительно 0, $a_{ijg} \in \mathbb{C}$. Так как, вообще говоря, $g(x) \notin Q$ при $x \in Q$, то при определении операторов Φ_{ij} предполагается, что $u(x) \equiv 0$ вне $\bar{Q}$.

Оператор A называется *сильно эллиптическим* в $\bar{Q}$, если для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(Au, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|u\|_{W_2^1(Q)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(Q)}^2, \quad (2)$$

где константы $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$ не зависят от функции $u(x)$. Здесь через $W_2^1(Q)$ обозначено пространство Соболева порядка 1.

Обозначим через $\mathcal{G}$ группу преобразований поворота относительно 0, порожденную конечным множеством G . Группа $\mathcal{G}$ не предполагается коммутативной, но предполагается конечной. *Орбитой* точки $x \in \bar{Q}$ (под действием группы $\mathcal{G}$) будем называть множество $\operatorname{orb} x = \{y : y = g(x), g \in \mathcal{G}\} \cap \bar{Q}$. Так как по предположению группа $\mathcal{G}$ конечна, то и все орбиты $\operatorname{orb} x$ конечны.

При исследовании сильной эллиптичности функционально-дифференциальных операторов наиболее сложным является *случай неподвижной точки*. В рассматриваемой нами модельной задаче не существенна геометрия области Q (существенно то, что $0 \in \partial Q$ и что орбиты $\operatorname{orb} x$ конечны). Также несущественным является требование, чтобы a_{ijg} были константами: в случае переменных коэффициентов их можно заморозить в точке 0.

Пусть $\operatorname{orb} x_0 = \{x_0, \dots, x_N\}$ – орбита некоторой точки $x_0 \in \bar{Q}$. Несложно показать, что существуют преобразования $g_l \in \mathcal{G}$, $l = 0, \dots, N$, определяющиеся единственным образом, такие, что $g_l(x_0) = x_l$ (очевидно, что $g_0(x)$ – тождественное преобразование).

Для каждого оператора Φ_{ij} и множества $\text{orb } x_0 = \{x_0, \dots, x_N\}$ введем матрицу $\Phi_{ij, x_0} = \|\varphi_{kl}^{ij}\|_{k,l=0}^N$ порядка $(N+1) \times (N+1)$, элементы которой вычисляются по формуле

$$\varphi_{kl}^{ij} = \begin{cases} a_{ijg}(g_k(x_0)), & \text{если } g = g_k^{-1} \circ g_j \in G, \\ 0, & \text{если } g \notin G. \end{cases}$$

Кроме того, введем следующие матрицы размера $(N+1) \times (N+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{g}^{-1})_p}{\partial x_i} &= \text{diag} \left\{ \frac{\partial(g_0^{-1})_p}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial(g_N^{-1})_p}{\partial x_i} \right\} \quad (p = 1, \dots, n), \\ \Psi_{pq, x_0} &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\mathbf{g}^{-1})_p}{\partial x_i} \Phi_{ij, x_0} \frac{\partial(\mathbf{g}^{-1})_q}{\partial x_j} \quad (p, q = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

где $g_l^{-1}(x) = ((g_l^{-1})_1(x), \dots, (g_l^{-1})_n(x))^T$, $l = 0, \dots, N$.

Тогда необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности оператора A (см. (1)) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. 1) Пусть оператор A является сильно эллиптическим в $\overline{Q}$. Тогда для любой точки $x_0 \in Q$ такой, что $\text{orb } x_0 \cap \partial Q = \emptyset$, и для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, матрицы

$$\sum_{p,q=1}^n (\Psi_{pq, x_0} + \Psi_{pq, x_0}^*) \xi_p \xi_q$$

положительно определены.

2) Пусть для любой точки $x_0 \in \overline{Q}$ и для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, матрицы

$$\sum_{p,q=1}^n (\Psi_{pq, x_0} + \Psi_{pq, x_0}^*) \xi_p \xi_q$$

положительно определены. Тогда оператор A является сильно эллиптическим в $\overline{Q}$.

Автор выражает глубокую благодарность А.Л. Скубачевскому за внимание к работе.

Список литературы

- [1] М.И. Вишик, *Матем. сб.*, **29(71)**:3 (1951), 615–676. [2] L. Gårding, *Math. Scand.*, **1** (1953), 55–72. [3] A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser, Basel, 1997. [4] Л.Е. Россовский, *Матем. заметки*, **59**:1 (1996), 103–113; англ. пер.: L. E. Rossovskii, *Math. Notes*, **59**:1 (1996), 75–82.

М. А. Скрыбин (M. A. Skryabin)
Российский университет дружбы народов
E-mail: skryabinm@gmail.com

Представлено В.М. Тихомировым
Принято редколлегией
28.10.2008