Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Устинов, Асимптотика среднего времени запаздывания в задаче о разладке для базисных процессов Леви в обобщенной байесовской постановке, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:21:48

Асимптотика среднего времени запаздывания в задаче о разладке для базисных процессов Леви в обобщенной байесовской постановке

Ф. А. Устинов

1. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наблюдается процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$: $X_t = \int_0^t I\{s < \theta\} dX_s^{(0)} + \int_0^t I\{s \geq \theta\} dX_s^{(1)}$, где $X_t^{(i)} = \sigma B_t^{(i)} + \mu_i t + \sum_{k=0}^{N^i} \xi_k^{(i)}$, $i = 0, 1$. Здесь $B^{(i)}$ – процессы броуновского движения, N^i – пуассоновские процессы интенсивности λ_i , $\xi_k^{(0)}$ и $\xi_j^{(1)}$ – наборы независимых случайных величин, имеющих эквивалентные распределения $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$ соответственно. Случай $\sigma \neq 0$ будем называть *диффузионным*. При $\sigma = 0$ имеет смысл рассматривать только случай $\mu_0 = \mu_1 = 0$. Этот случай будем называть *недиффузионным*. Процессы типа $X^{(i)}$ играют базисную роль при построении процессов Леви. Неслучайный момент $\theta \in [0, +\infty]$ интерпретируется как момент разладки, или смены режима процессом X .

В заметке рассматривается ряд вопросов, связанных с нахождением оптимального момента останова, приближающего θ (определение оптимальности дано ниже).

Обозначим P_{θ_0} распределение процесса X в предположении, что момент разладки θ равен θ_0 . При распределении P_∞ разладка не происходит никогда, при P_0 разладка происходит мгновенно, в момент времени 0. Момент подачи сигнала тревоги об обнаружении разладки обозначим τ . Это марковский момент относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$, порожденной процессом X . Следуя [1], будем искать наилучший момент в классе $\widetilde{\mathcal{M}}_T = \{\tau : E_\infty \tau \geq T\}$, т.е. среди правил останова, для которых среднее время до подачи (ложной) тревоги в случае отсутствия разладки не меньше T . Момент τ^* будем называть *оптимальным*, если величина $B(T) := \frac{1}{T} \inf_{\tau \in \widetilde{\mathcal{M}}_T} \int_0^\infty E_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta$, называемая риском, а также *средним временем запаздывания*, достигается на τ^* . В этом критерии θ можно интерпретировать как обобщенную случайную величину с равномерным распределением на $[0, \infty]$.

Для нахождения оптимального момента рассмотрим процесс Шираева (см. [2]): $\psi_t = \psi_0 L_t + \int_0^t \frac{L_s}{L_s} ds$, где $L_t = \frac{d(P_0|_{\mathcal{F}_t^X})}{d(P_\infty|_{\mathcal{F}_t^X})}$ – производная Радона–Никодима сужения меры P_0 на сигма-алгебру, порожденную процессом X до момента t , по сужению меры P_∞ на ту же сигма-алгебру. При помощи статистики ψ , почти дословно повторяя рассуждения из [1; лемма 2.1], можно получить представление $B(T)$ в виде

$$B(T) = \frac{1}{T} \inf_{\tau \in \widetilde{\mathcal{M}}_T} E_\infty^0 \int_0^\tau \psi_s ds.$$

Здесь и ниже $E^x(\cdot)$ означает $E(\cdot | \psi_0 = x)$. В случае $x = 0$ индекс будем опускать. При помощи метода (“множителей Лагранжа”) из [1; раздел 4] и анализа траекторий процесса ψ получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Оптимальный момент в классе $\widetilde{\mathcal{M}}_T$ – это момент τ_A первого выхода процесса ψ_t на уровень $A = A(T)$ такой, что $E_\infty \tau_A = T$.*

Результат верен и для процессов X , в определении которых процессы $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ заменены на два произвольных процесса Леви с эквивалентным распределением.

2. Интересно значение функции риска $B(T)$ при больших T (в том числе как оценка в соответствующей минимаксной задаче, см. [1]). Чтобы упростить запись, мы рассмотрим только 2 случая: когда в выражении для X параметры (σ, μ_0, μ_1) равны $(0, 0, 0)$ и когда $(\sigma, \mu_0, \mu_1) = (1, 0, \sqrt{2})$. Остальные случаи рассматриваются

аналогично. Асимптотику $B(T)$ при $T \rightarrow \infty$ можно вычислить, действуя следующим образом. Введем функцию $u(x, T) := E_{\infty}^x \int_0^{\tau_{A(T)}} \psi_s ds$. Тогда $TB(T) = u(0, T)$, а $u(x, T)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}u = -x$, $x \in [0, A)$, и условию $u(x, T) = 0$ при $x \geq A$ [3; гл. 3]. Здесь $\mathcal{L}$ – инфинитезимальный оператор процесса ψ , имеющий вид

$$\mathcal{L}u = (1 - \delta_{0\sigma})x^2 u''(x) + (1 + (\lambda_0 - \lambda_1)x)u'(x) + \lambda_0 \left[\int_{\mathbb{R}} u\left(x \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r)\right) dF^{(0)}(r) - u(x) \right],$$

где $f(r) = \frac{dF^{(1)}}{dF^{(0)}}(r)$, δ_{ij} – символ Кронекера (см. в [4; гл. 3] стохастическое дифференциальное уравнение для L_t , из него выводится соответствующее уравнение для ψ , затем выражение для оператора $\mathcal{L}$). Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Непрерывное в точке A решение задачи*

$$\mathcal{L}v(x) = h(x), \quad 0 \leq x < A, \quad v(x) = 0, \quad x \geq A,$$

где $h(x)$ – непрерывная на $[0, A)$ функция, единственно.

Теорема позволяет получать аппроксимации для $B(T)$. Общая схема такова. Подбирается некоторая функция $\tilde{u}(x)$ такая, что $\mathcal{L}\tilde{u}(x) = -x + o(x)$, $0 \leq x < A$, и $\tilde{u}(x) = 0$, $x \geq A$. С помощью теоремы можно показать, что функция $\tilde{u}(x)$ будет близка к $u(x)$.

Таким образом, задача сводится к нахождению функции $\tilde{u}(x)$. В аналитически вычислимом случае разладки для броуновского движения получается функция $x \log x$. В произвольном случае аналитическое решение невозможно, но главный член разложения приближения решения ($\tilde{u}(x)$) имеет такой же порядок, как точное решение в броуновском случае. Обозначим

$$C = \left(\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) \log \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) \right) dP_0(r) \right)^{-1}, \quad D = (1 + C^{-1})^{-1}.$$

В случае направленных вниз скачков процесса ψ имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если $(\sigma, \mu_0, \mu_1) = (0, 0, 0)$, то*

$$B(T) = C \log T + o(\log T) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Если $(\sigma, \mu_0, \mu_1) = (1, 0, \sqrt{2})$, то

$$B(T) = D \log T + o(\log T) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Для случая произвольных скачков можно найти связь главного члена асимптотики и математического ожидания времени выхода на уровень A :

ТЕОРЕМА 4. *Если $(\sigma, \mu_0, \mu_1) = (0, 0, 0)$, то*

$$B(T) = CE_{\infty} \tau_A \cdot T^{-1} \log T + o(\log T) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Если $(\sigma, \mu_0, \mu_1) = (1, 0, \sqrt{2})$, то

$$B(T) = DE_{\infty} \tau_A \cdot T^{-1} \log T + o(\log T) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Список литературы

- [1] Е. А. Feinberg, A. N. Shiryaev, *Statist. Decisions*, **24**:4 (2006), 445–470. [2] А. Н. Ширяев, *Теория вероятн. и ее примен.*, **8**:1 (1963), 26–51. [3] G. Peskir, A. N. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Birkhäuser, Basel, 2006. [4] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев, *Предельные теоремы для случайных процессов*, т. I, Теор. вероятн. и матем. стат., **47**, Наука, М., 1994.

Ф. А. Устинов (Ph. A. Ustinov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: atikin85@mail.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
07.12.2008