Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Голышев, О канонической полосе, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 139–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:05:24

О канонической полосе

В. В. Голышев

Мы показываем, что из гипотезы о канонической полосе для многообразия Фано следует, что нули многочлена Гильберта сечения общего типа или типа Калаби–Яу в нем расположены на вертикальной прямой. В частности, на вертикальной прямой лежат нули многочлена Гильберта сечения общего типа или типа Калаби–Яу в грассманиане.

1. Каноническая полоса и гипотеза о канонической прямой. Пусть $H(z)$ – многочлен Гильберта многообразия Фано или общего типа X , т. е. $H(n) = H_{-K_X}(n) = \chi(n(-K))$ для целых n .

(CS) Скажем, что X удовлетворяет гипотезе о канонической полосе, если все корни z_i многочлена $H(z)$ лежат в канонической полосе $-1 < \operatorname{Re} z < 0$.

(NCS) Скажем, что X удовлетворяет гипотезе о суженной канонической полосе, если все корни z_i многочлена $H(z)$ лежат в суженной канонической полосе

$$-1 + \frac{1}{\dim X + 1} \leq \operatorname{Re} z \leq -\frac{1}{\dim X + 1}.$$

(CL) Скажем, что X удовлетворяет гипотезе о канонической прямой, если все корни z_i лежат на вертикальной прямой $\operatorname{Re} z = -1/2$.

Ясно, что $(\text{CL}) \implies (\text{NCS}) \implies (\text{CS})$.

2. Вложенные многообразия Калаби–Яу. Для многообразия Калаби–Яу X многочлен Гильберта относительно антиканонического класса не интересен. Поэтому мы скажем, что многообразие Калаби–Яу X , вложенное в многообразие Фано F как антиканоническое сечение, удовлетворяет гипотезе о канонической прямой, если корни многочлена Гильберта относительно ограничения класса $-K_F$ на X чисто мнимы.

Можно показать, что гипотеза (NCS) выполняется для многообразий Фано и минимальных многообразий общего типа в размерностях 1, 2 и 3.

3. Грассманианы. Проективные пространства $\mathbb{P}^n$ удовлетворяют гипотезе о суженной канонической полосе: нули суть $-i/(n+1)$, $i = 1, \dots, n$. Как показал Ф. Хирцебрух [1], это обобщается на грассманианы. Пусть $G(k, N)$ – грассманиан k -плоскостей в N -мерном пространстве. Предположим, что $N \geq 2k$. Пусть $\varphi(x)$ – кусочно линейная функция вещественного аргумента x , заданная равенством $\varphi(x) = \min(k, -x, x + N)$. Тогда

$$H(z) = c \prod_{i=1}^{N-1} \left(z + \frac{i}{N} \right)^{\varphi(-i)}.$$

4. Многообразия общего типа могут не удовлетворять (NCS). Ситуация, по-видимому, более специфична в случае вложенных многообразий.

ТЕОРЕМА. Пусть F – многообразие Фано, удовлетворяющее гипотезе о канонической полосе, и пусть X – его гладкое сечение общего типа (соответственно типа Калаби–Яу) в линейной системе $-nK_X$, $n > 1$ (соответственно $n = 1$). Тогда (CL) выполняется для вложенного многообразия X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_F(z)$ – многочлен Гильберта многообразия F . Обозначим через $H_X(z)$ многочлен Гильберта X относительно ограничения $-K_F$. Для многообразия общего типа X формула присоединения говорит, что антиканонический

класс X кратен ограничению антиканонического класса F , так что можно доказывать утверждение о вертикальной прямой для H_r . Имеем

$$H_r(z) = H_F(z) - H_F(z - n).$$

Для доказательства того, что нули $H_r(z)$ лежат на прямой $\operatorname{Re} z = (n - 1)/2$, используется

ЛЕММА. Пусть многочлен $H(z) \in \mathbb{R}[z]$ таков, что

i) $H(-1 - z) = \pm H(z)$,

ii) все его корни z_i находятся в открытой левой полуплоскости.

Тогда для любого вещественного $s \geq 1$ и для любого корня ζ_j многочлена $H(z) - H(z - s)$ имеем $\operatorname{Re} z = (s - 1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что найдется корень $\zeta = \zeta_j$ многочлена $H_r(z)$ такой, что $\operatorname{Re} \zeta < (s - 1)/2$. По предположению,

$$\prod (\zeta - z_i) = \prod (\zeta - z_i - s).$$

Пусть μ_s — отображение, переводящее z в $(s - 1) - \bar{z}$. Оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между сомножителями в левой и правой частях:

$$\prod (\zeta - z_i) = \prod (\zeta - \mu_s(z_i)).$$

Однако для любого i выполняется неравенство

$$|\zeta - z_i| < |\zeta - \mu_s(z_i)|,$$

так как ζ находится слева от оси симметрии μ .

Так же разбирается случай $\operatorname{Re} \zeta > (s - 1)/2$. Это противоречие доказывает лемму и теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Сечение линейной системы $-tK_F$, $t > 0$, на грассманиане F удовлетворяет гипотезе о канонической прямой.

5. Вопросы. А. Существуют ли многообразия Фано (соответственно многообразия общего типа), не удовлетворяющие гипотезе о канонической полосе? Как охарактеризовать многообразия, удовлетворяющие (CS), но не (NCS)?

Б. Исследовать нули многочленов Эрхарта [2] для политопов типа Фано в сравнении с нулями многочленов Эрхарта политопов, не являющихся политопами типа Фано. Как их охарактеризовать?

В. Начиная с размерности 4, классический критерий Рауса–Гурвица доставляет набор полиномов от чисел Чженя многообразия, чья положительность/неотрицательность влечет (CS) или (NCS). Достаточно ли одной теоремы Яу, чтобы доказывать неравенства этого типа, или мы нуждаемся в целой иерархии ее усилений?

Я признателен Д. Загиру, рассказавшему мне о работе Ф. Родригеса-Виллегаса [3], которая мотивировала написание этой заметки. Я благодарю Ф. Хирцебруха за обсуждение, а также И. А. Чельцова и К. А. Шрамова за их советы.

Список литературы

- [1] F. Hirzebruch, *Semin. Analytic Functions*, **2** (1958), 92–104. [2] M. Beck, J. A. De Loera, M. Develin, J. Pfeifle, R. P. Stanley, *Integer points in polyhedra – geometry, number theory, algebra, optimization*, Contemp. Math., **374**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 15–36. [3] F. Rodriguez-Villegas, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:8 (2002), 2251–2254.