Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина, Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9277>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:20:10

Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде

А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина

Циклический процесс моделируется управляемой системой на окружности, задаваемой полем скоростей v , гладко зависящим от точки x окружности и управляющего параметра. Предполагается, что этот параметр пробегает гладкое компактное многообразие (или объединение таковых) и принимает не менее двух различных значений, а все допустимые скорости положительные, т.е. $v > 0$. *Допустимым движением* системы называется абсолютно непрерывное отображение $x: t \mapsto x(t)$ отрезка временной оси в фазовое пространство, в точках дифференцируемости которого его производная лежит в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей этой точки. Цикл с периодом T , $T > 0$, – это допустимое движение x такое, что $x(t+T) \equiv x(t)$. При наличии непрерывной *плотности выгоды* f на окружности выбор циклического процесса с максимальной средней временной выгодой за один оборот $\frac{1}{T} \int_0^T f(x(t)) dt \rightarrow \max$ является одной из важных задач оптимального управления. В. И. Арнольд показал, что такой цикл существует, а соответствующее ему движение устроено просто – оно использует максимальные и минимальные допустимые скорости на участках, где плотность выгоды меньше или больше максимальной средней временной выгоды за цикл [1]–[3]. В этой работе аналогичный результат получен для циклов при наличии положительного дисконта σ , т.е. когда в функционале под интегралом плотность выгоды умножается на $e^{-\sigma t}$. Следуя В. И. Арнольду [1], мы используем плотность допустимых скоростей и переписываем задачу в виде

$$\int_0^{2\pi} \exp\left\{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz\right\} f(x) \rho(x) dx \left(\int_0^{2\pi} \rho(x) dx\right)^{-1} \rightarrow \max, \quad (1)$$

где для допустимого движения $x = x(t)$ плотность ρ задается как $\rho(x(t)) = 1/\dot{x}(t)$ всюду, где производная $\dot{x}(t)$ определена, т.е. почти всюду на окружности, а в остальных точках эта плотность может быть задана произвольно. Здесь 0 и 2π – это начальная и конечная точки цикла соответственно. В такой формулировке задачи нам необходимо найти измеримую плотность ρ , доставляющую максимум функционала (1) и удовлетворяющую ограничениям

$$r_1 \leq \rho \leq r_2, \quad (2)$$

где r_1 и r_2 – положительные функции, равные обратным значениям максимума и минимума допустимой скорости соответственно. Измеримую плотность ρ , удовлетворяющую ограничениям (2), будем называть *допустимой*. Рассмотрим (1) как линейный функционал A_ρ на пространстве непрерывных плотностей выгоды.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для непрерывных плотностей f и положительных функций r_1, r_2 и любой допустимой плотности ρ справедлива оценка $|A_\rho(f)| \leq m_2 M / m_1$, где $m_1 = \min\{r_1(x), x \in [0, 2\pi]\}$, $m_2 = \max\{r_2(x), x \in [0, 2\pi]\}$, $M = \max\{|f(x)|, x \in [0, 2\pi]\}$.

ТЕОРЕМА 2 (теорема существования). Для непрерывной плотности выгоды f и непрерывных положительных функций r_1, r_2 существует допустимая плотность $\rho_{\max}$, доставляющая точную верхнюю грань A значений функционала (1) по всем допустимым плотностям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для последовательности ρ_n допустимых плотностей $A_{\rho_n}(f) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$. Для функций $\varphi_n(x) = \int_0^x \rho_n(z) dz$, $x \in [0, 2\pi]$, имеем

$$m_1(y - x) \leq \varphi_n(y) - \varphi_n(x) \leq m_2(y - x) \quad (3)$$

для любых $x, y \in [0, 2\pi]$, $x \leq y$, ибо ρ_n удовлетворяет (2). Все φ_n – липшицевы функции с одной и той же константой m_2 , в частности, их совокупность равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$ и ограничена. В силу теоремы Арцела–Асколи существует подпоследовательность этих функций, равномерно сходящаяся на $[0, 2\pi]$ к некоторой функции φ_∞ . Переходя к пределу в соотношении (3), получим, что φ_∞ также удовлетворяет (3). В частности, φ_∞ абсолютно непрерывна, ее производная существует почти всюду и удовлетворяет условию (2) в каждой из точек своего существования. Следовательно, существует искомая плотность $\rho_{\max}$, которая в силу (1) совпадает почти всюду с производной функции φ_∞ .

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие экстремума). *Если для непрерывной функции f допустимая плотность ρ доставляет максимум A функционала (1), то в любой точке x , где ρ является производной своего интеграла, значение*

$$S(x) := \exp\left\{-\sigma \int_0^x \rho(z) dz\right\} f(x) - \sigma \int_x^{2\pi} \exp\left\{-\sigma \int_0^y \rho(z) dz\right\} f(y) \rho(y) dy - A \quad (4)$$

является неположительным, неотрицательным или равным нулю, если $\rho(x)$ равно r_1 , r_2 или принадлежит интервалу (r_1, r_2) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, считаем, что $x \in (0, 2\pi)$ (для граничных значений x рассуждения аналогичны). Возьмем достаточно малое положительное ν такое, что интервал $[x, x + \nu]$ принадлежит $(0, 2\pi)$, и рассмотрим плотность $\tilde{\rho}$ такую, что разность $\tilde{\rho} - \rho$ равна малой константе $h \neq 0$ на этом интервале и нулю вне него. Очевидно, что плотности ρ и $\tilde{\rho}$ дают периоды движения $T = \int_0^{2\pi} \rho(x) dx$ и $\tilde{T} = T + h\nu$ соответственно. Вычисляя теперь разность $\Delta = A_{\tilde{\rho}}(f) - A_{\rho}(f)$, получаем $\Delta = S(x) \times h\nu/T + \dots$, где многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка по h и ν . Так как $T > 0$, то при малых $h \neq 0$ и $\nu > 0$ знак этой разности определяется знаками h и S , если $S \neq 0$. Для оптимальной плотности ρ в каждой точке x , где ρ является производной своего интеграла, разность $\Delta(x)$ должна быть неотрицательной. Следовательно, значение $S(x)$ должно быть неположительно, неотрицательно или равно нулю, если значение $\rho(x)$ равно $r_1(x)$, $r_2(x)$ или принадлежит интервалу $(r_1(x), r_2(x))$ соответственно, так как h может принимать только неположительные, только неотрицательные и как те, так и другие значения соответственно.

При дифференцируемой плотности f функция S также дифференцируема и нули производных этих двух функций одинаковы. Отсюда и из теоремы 3 вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Для дифференцируемой плотности выгоды f с конечным числом k критических точек и для непрерывных положительных функций r_1, r_2 допустимую плотность ρ , доставляющую максимум в (1), можно взять кусочно непрерывной функцией, принимающей значение r_1 либо r_2 внутри любого интервала, не содержащего нули функции переключения S и концевые точки $0, 2\pi$ цикла.*

Авторы благодарны В. И. Данченко за обсуждения результатов этой работы.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, *Функц. анализ и его прил.*, **36:2** (2002), 1–11. [2] А. А. Давыдов, *Тр. МИАН*, **250**, Наука, М., 2005, 79–94. [3] А. А. Davydov, H. Mena-Matos, *Singularities in geometry and topology*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, 598–628.

А. А. Давыдов (A. A. Davydov)
Владимирский государственный университет
E-mail: davydov@vlsu.ru

Представлено В. М. Закалюкиным
Принято редколлегией
15.01.2009

Т. С. Шуткина (T. S. Shutkina)
Владимирский государственный университет
E-mail: shutkina@vlsu.ru