Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кустарев, Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 1, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 09:03:21

Эквивариантные почти комплексные структуры на квазиторических многообразиях

А. А. Кустарев

Ориентированное компактное многообразие M^{2n} без края называется *квазиторическим* над простым многогранником P^n [1], [2], если:

- 1) на M^{2n} задано локально стандартное действие тора T^n ;
- 2) существует отображение $\pi: M^{2n} \rightarrow P^n$, разлагающееся в композицию проекции $M^{2n} \rightarrow M^{2n}/T^n$ и диффеоморфизма многообразий с углами $M^{2n}/T^n \simeq P^n$.

Любое неособое проективное торическое многообразие является квазиторическим, но обратное неверно. На любом квазиторическом многообразии существует каноническая гладкая структура [3]. Многообразия $\pi^{-1}(F_j^{n-1}) \subset M^{2n}$, $j = 1, \dots, m$, где $F_j^{n-1} \subset P^n$ – гипергрань, m – число гиперграней, называются *характеристическими подмногообразиями*. Говорят, что на квазиторическом многообразии M^{2n} задана *полиориентация*, если фиксированы ориентации M^{2n} и всех его характеристических подмногообразий. По каждой полиориентации можно построить на M^{2n} каноническую стабильно комплексную T^n -эквивариантную структуру [3], которая задается *характеристическим отображением* $\lambda: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^n$.

На любом неособом проективном торическом многообразии существует каноническая T^n -эквивариантная комплексная структура. В работе [1; с. 450] была поставлена проблема: найти критерий существования T^n -эквивариантной почти комплексной структуры на квазиторическом многообразии M^{2n} в терминах характеристического отображения λ . Решению этой проблемы посвящена настоящая работа.

T^n -эквивариантная стабильно комплексная структура на многообразии M^{2n} с действием α тора T^n задает изоморфизм $c_\tau: \tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{C}^{m-n} \simeq \xi$, где ξ – некоторое комплексное расслоение. При этом отображение

$$\xi \xrightarrow{c_\tau^{-1}} \tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{C}^{m-n} \xrightarrow{d\alpha(t) \oplus I} \tau(M^{2n}) \oplus \mathbb{C}^{m-n} \xrightarrow{c_\tau} \xi$$

является комплексно-линейным для любого t .

Если v – неподвижная точка действия T^n на M^{2n} , то определено сквозное отображение $\tau_v(M^{2n}) \xrightarrow{i} \xi_v \xrightarrow{\pi'} \mathbb{C}^n$, где i – вложение, π' – проекция вдоль подпространства в ξ_v , неподвижного при действии T^n . Знак $\text{sign}(v)$ неподвижной точки v – это знак определителя отображения $\pi' \circ i$. Назовем полиориентацию *положительной*, если для соответствующей ей структуры знаки всех неподвижных точек положительны.

ТЕОРЕМА 1. *Квазиторическое многообразие M^{2n} допускает T^n -эквивариантную почти комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно обладает положительной полиориентацией.*

Отметим, что из результатов Т.Е. Панова [4] следует, что для квазиторического многообразия M^{2n} с положительной полиориентацией и соответствующей ей стабильно комплексной структуры J имеет место равенство $c_n(J) = \chi(M^{2n})$. В силу теоремы Томаса [5], это означает, что M^{2n} обладает некоторой (не обязательно эквивариантной) почти комплексной структурой.

Теорема 1 доказывается следующим образом. Мы строим эквивариантную почти комплексную структуру, начиная с окрестностей неподвижных точек и продолжая ее последовательно на трубчатые окрестности прообразов i -мерных граней P^n .

Окрестности изолированных неподвижных точек гладкого действия T^n на многообразии M^{2n} всегда обладают эквивариантной комплексной структурой [6]. Пусть $U_k(\delta)$ – объединение эквивариантных трубчатых δ -окрестностей прообразов k -мерных граней многогранника P^n .

ЛЕММА 1. Если эквивариантная почти комплексная структура J задана на множестве $U_{i-1}(\delta)$, то существует клеточная коцепь $\sigma_J^i \in C^i(P^n, \pi_{i-1}(\mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i)))$, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\sigma_J^i = 0$, если и только если J продолжается на $U_i(\delta')$ для некоторого $\delta' < \delta$ как эквивариантная структура;
- 2) σ_J^i – коцикл;
- 3) если σ_J^i является кограницей, то можно так изменить J на $U_{i-1}(\delta)$, что для новой структуры J' имеем $\sigma_{J'}^i = 0$.

Теорема 1 следует из леммы 1, поскольку P^n ацикличен как клеточный комплекс. Докажем лемму 1. Пусть $\mathrm{sk}_i(P^n)$ – i -мерный остов многогранника P^n . Множество точек $x \in F^i$, лежащих на расстоянии не менее ε от $\mathrm{sk}_{i-1}(P^n)$, обозначим F_ε^i . Пусть N_ε – замкнутая эквивариантная трубчатая окрестность $\pi^{-1}(F_\varepsilon^i)$ и $q: N_\varepsilon \rightarrow \pi^{-1}(F_\varepsilon^i)$ – эквивариантная проекция. Многообразие $\pi^{-1}(F_\varepsilon^i)$ эквивариантно диффеоморфно $T^i \times F_\varepsilon^i$, а N_ε эквивариантно диффеоморфно $F_\varepsilon^i \times T^i \times D^{2n-2i}$.

Напомним, что пространство комплексных структур на $\mathbb{R}^{2i}$ с фиксированной ориентацией гомотопически эквивалентно пространству $\mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i)$. Пусть $x \in F_\varepsilon^i$, тогда пространство эквивариантных комплексных структур на $\tau(M^{2n})|_{\pi^{-1}(x)}$, согласованных на нормальном расслоении к $\pi^{-1}(F_\varepsilon^i)$ с исходной полиориентацией, также гомотопически эквивалентно $\mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i)$. Более того, пространство эквивариантных комплексных структур на $\tau(M^{2n})|_{q^{-1}(\pi^{-1}(x))}$, согласованных с исходной полиориентацией, гомотопически эквивалентно $\mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i)$.

Тем самым, задача продолжения J на N_ε равносильна задаче продолжения непрерывного отображения $f: \partial F_\varepsilon^i \rightarrow \mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i)$ на все F_ε^i . Поскольку $\partial F_\varepsilon^i \simeq S^{i-1}$, отображению f соответствует гомотопический класс $C_f \in \pi_{i-1}(\mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i))$, равный нулю, если и только если f продолжается на все F_ε^i . Мы полагаем $\sigma_J^i(F^i) = C_f$.

Число ε выбирается так, что часть $\partial F_\varepsilon^i \times T^i \times D^{2n-2i}$ лежит в $U_{i-1}(\delta)$, где J уже построена. Положительность знаков важна при продолжении J с окрестностей неподвижных точек на окрестности прообразов ребер P .

Перейдем ко второй части леммы 1. Пусть F^{i+1} – некоторая грань P^n , $\partial F^{i+1} = F_1^i + \dots + F_k^i$ и ориентации F_j^i согласованы с ориентацией F^{i+1} . Тогда условие $\partial \sigma_J^i = 0$

эквивалентно условию $\sum_{j=1}^k \sigma_J^i(F_j^i) = 0$. Ключевой идеей в доказательстве последнего равенства является то, что для некоторого $\delta' \in (0, \delta)$ существует непрерывное отображение $\partial[U_i(\delta') \cap F^{i+1}] \rightarrow \mathrm{SO}(2i+2)/\mathrm{U}(i+1)$, совпадающее на компонентах границы с отображениями $\partial F_j^i \xrightarrow{f_j} \mathrm{SO}(2i)/\mathrm{U}(i) \xrightarrow{i_c} \mathrm{SO}(2i+2)/\mathrm{U}(i+1)$, где отображения f_j построены по структуре J , а i_c – стандартное вложение. Третья часть леммы 1 доказывается стандартными средствами теории препятствий.

Автор благодарен научному руководителю В. М. Бухштаберу, а также Т. Е. Панову за внимание к работе и ценные обсуждения и Н. Э. Добринской за ценную переписку. Для $n \leq 7$ утверждение теоремы 1 было ранее доказано Н. Э. Добринской.

Список литературы

- [1] M. W. Davis, T. Janusiewicz, *Duke Math J.*, **62:2** (1991), 417–451. [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004. [3] V. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, *Mosc. Math. J.*, **7:2** (2007), 219–242. [4] Т. Е. Панов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65:3** (123–138). [5] E. Thomas, *Amer. J. Math.*, **89:4** (1967), 887–908. [6] П. Коннер, Э. Флойд, *Гладкие периодические отображения*, Мир, М., 1969.

А. А. Кустарев (A. A. Kustarev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kustarev@gmail.com

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
15.01.2009