Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Кривцов, Логика творящего субъекта: консервативность относительно интуиционистского исчисления предикатов, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm928>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 05:15:59

**ЛОГИКИ ТВОРЯЩЕГО СУБЪЕКТА:
КОНСЕРВАТИВНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО
ИНТУИЦИОНИСТСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ**

В. Н. КРИВЦОВ

В работе [1] была определена семантика для языка L , получающегося в результате присоединения к языку исчисления предикатов Гейтинга (**НРС**) логического оператора $\Box$ и расширения стандартного определения понятия формулы путем добавления пункта: если A – формула и b – параметр, то $\Box_b A$ – формула. Там же была установлена семантическая полнота исчислений **CS-W** и **CS-S**, содержащих основные аксиомы теории творящего субъекта.

В настоящей работе рассматриваются расширения указанных исчислений путем добавления следующих схем аксиом (подробное обсуждение расширений аксиоматики Крайзеля можно найти в [2] и [3]):

- (1) $\forall x(\Box_x(A \vee B) \rightarrow (\Box_x A \vee \Box_x B))$,
- (2) $\forall x((\Box_x A \vee \Box_x B) \rightarrow \Box_x(A \vee B))$,
- (3) $\forall x(\Box_x(A \ \& \ B) \leftrightarrow (\Box_x A \ \& \ \Box_x B))$,
- (4) $\forall x(\Box_x(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box_x A \rightarrow \Box_x B))$,
- (5) $\forall x(\Box_x B \rightarrow \Box_x(A \rightarrow B))$,
- (6) $\forall x(\Box_x \exists y A(y) \leftrightarrow \exists y \Box_x A(y))$,
- (7) $\forall x \forall y(\Box_x \Box_y A \rightarrow \Box_x A)$,
- (8) $\forall x \forall y((\Box_x A \ \& \ \Box_y A) \rightarrow (\Box_x \Box_y A \vee \Box_y \Box_x A))$,
- (9) $\forall x(\forall y \Box_x A(y) \rightarrow \Box_x \forall y A(y))$,
- (10) $\forall x(\Box_x \forall y A(y) \rightarrow \forall y \Box_x A(y))$.

Пусть **PEM** обозначает схему аксиом $A \vee \neg A$, а **DNS** (“double negation shift”) – схему $\forall x \neg \neg A(x) \rightarrow \neg \neg \forall x A(x)$.

Справедливы следующие утверждения (в формулировке теоремы 1 **PEM** и **DNS** – схемы в языке L).

- ТЕОРЕМА 1. (1) **CS-S** + (1) + (10) | **–PEM**.
(2) **CS-W** + (1) + (10) | **–DNS**.

- ТЕОРЕМА 2. (1) **CS-S** + (1) + $\dots$ + (9) – консервативное расширение **НРС**.
(2) **CS-W** + (1) + $\dots$ + (10) – консервативное расширение **НРС** + **DNS**.

ТЕОРЕМА 3. **CS-S** + (2) + $\dots$ + (10) – консервативное расширение **НРС**.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathbf{CS}_3^S(-\forall)$ обозначает схему $\mathbf{CS}_3^S$ для формул, не содержащих $\forall$. Тогда:

- (1) **НРС** + $\mathbf{CS}_1$ + $\mathbf{CS}_2$ + $\mathbf{CS}_3^S(-\forall)$ + (1) + $\dots$ + (10) – консервативное расширение **НРС**.
(2) **CS-W** + $\mathbf{CS}_3^S(-\forall)$ + (1) + $\dots$ + (10) – консервативное расширение **НРС** + **DNS**.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbf{CS}_3^S(-\vee)$ обозначает схему $\mathbf{CS}_3^S$ для формул, не содержащих $\vee$. Тогда:

- (1) **НРС'** + $\mathbf{CS}_1$ + $\mathbf{CS}_2$ + $\mathbf{CS}_3^S(-\vee)$ + (1) + $\dots$ + (10) – консервативное расширение **НРС**.
(2) **CS-W** + $\mathbf{CS}_3^S(-\vee)$ + (1) + $\dots$ + (10) – консервативное расширение **НРС** + **DNS**.

Теоремы 2–5 интересны, главным образом, с точки зрения анализа основного отношения $\Box_b A$; самостоятельный интерес представляют теоретико-модельные конструкции, используемые в доказательствах этих теорем, поскольку они допускают расширение до моделей аналитического языка с оператором $\Box$, и, следовательно, до моделей систем интуиционистского анализа в которых истинна схема Кришке.

В качестве примера приведем набросок доказательства теоремы 2. (Используемые далее обозначения совпадают с теми, которые применялись в работе [1].)

Для доказательства теоремы 2 (1) достаточно показать, что каждую модель Бета $\mathfrak{B} = \langle T, \mathbb{N}, \varphi \rangle$ теории **НРС** можно расширить до **CS-S**-модели $\mathfrak{B}^* = \langle T, \mathbb{N}, f, \varphi \rangle$, такой, что в $\mathfrak{B}^*$ истинны схемы (1), ..., (9), следовательно, достаточно подходящим образом задать функцию $f: T \times St_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}$.

Приведем индуктивное определение f :

(i) Если A атомарная или имеет вид $\forall x B$, то:

$$f(k, A, n) = \begin{cases} 2, & \text{если } lth(k) \geq n \text{ и } k^*(n) \Vdash A; \\ 0, & \text{если } lth(k) < n; \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(ii) $f(k, A_1 \ \& \ A_2, n) = \min\{f(k, A_i, n) : i \in \{1, 2\}\}$;

(iii) $f(k, A_1 \vee A_2, n) = \max\{f(k, A_i, n) : i \in \{1, 2\}\}$;

$$(iv) f(k, A_1 \rightarrow A_2, n) = \begin{cases} 2, & \text{если } lth(k) \geq n, \ k^*(n) \Vdash A_1 \rightarrow A_2 \text{ и} \\ & (k^*(n) \Vdash \Box_n A_1 \Rightarrow k^*(n) \Vdash \Box_n A_2); \\ 0, & \text{если } lth(k) < n; \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$(v) f(k, \Box_m A_1, n) = \begin{cases} 2, & \text{если } lth(k) \geq n, \ f(k, A_1, n) = 2 \text{ и} \\ & k^*(n) \Vdash \Box_m A_1; \\ 0, & \text{если } lth(k) < n; \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(vi) $f(k, \exists x A_1(x), n) = \max\{f(k, A_1(m), n) : m \in \mathbb{N}\}$.

Здесь $k^*(n)$ обозначает кортеж $k' \leq k$ такой, что $lth(k') = n$ (для k таких, что $lth(k) \geq n$).

Аналогичная конструкция используется в доказательстве теоремы 2(2): модели Бета $\mathfrak{B} = \langle T, \mathbb{N}, \varphi \rangle$ теории **НРС** + **DNS** расширяются до **CS-W**-моделей $\mathfrak{B}^* = \langle T, \mathbb{N}, f_1, \varphi \rangle$, где f_1 определяется так же, как f , за исключением того, что теперь мы полагаем:

$$f_1(k, \forall x A_1(x), n) = \min\{f_1(k, A_1(m), n) : m \in \mathbb{N}\}.$$

В заключение отметим, что открытой является следующая проблема: *в какой мере результаты о консервативности для НРС, сформулированные в теоремах 2–5, переносятся на случай арифметики Гейтинга НА?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кривцов В. Н. // УМН. 1994. №6. С. 205–206. [2] van Rootselaar B. Intuitionism and Proof Theory. Amsterdam: North-Holland, 1970. [3] Dummett M. A. E. Elements of Intuitionism. Oxford: Clarendon Press, 1977.

Отдел теоретических проблем РАН

Принято редколлегией

04.09.1995