Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Кордюков, Теория индекса и некоммутативная геометрия на многообразиях со слоением, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 2, 73–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 12:59:03

УДК 515.16+517.98+514.7

Теория индекса и некоммутативная геометрия на многообразиях со слоением

Ю. А. Кордюков

В работе дается обзор теории индекса касательно эллиптических и трансверсально эллиптических операторов на многообразии со слоением, а также связанных с ней понятий и результатов некоммутативной геометрии.

Библиография: 197 названий.

Ключевые слова: некоммутативная геометрия, многообразия, слоения, трансверсально эллиптические операторы, касательно эллиптические операторы, индекс, K -теория, операторные алгебры.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	74
1. Обзор классической теории индекса	77
1.1. Эллиптические операторы и индекс	77
1.2. K -теория	81
1.3. Теорема Атьи–Зингера	84
1.4. Теория индекса для самосопряженных операторов	86
1.5. Теория индекса для семейств	86
1.6. Высшая теория индекса	89
2. Основные понятия некоммутативной топологии	90
2.1. Некоммутативные пространства и расслоения	90
2.2. Операторная K -теория	93
2.3. Некоммутативная теория меры	99
3. Некоммутативная дифференциальная геометрия	100
3.1. Циклические когомологии и гомологии	100
3.2. Некоммутативные дифференциальные формы	104
3.3. Некоммутативная конструкция Черна–Вейля	106
3.4. Гладкие алгебры	108
3.5. Некоммутативная риманова геометрия	109
3.6. Некоммутативная локальная теорема об индексе	112
3.7. Полуконечные спектральные тройки	115
3.8. Некоммутативная спектральная геометрия и тип III	117

4. Некоторые сведения из теории слоений	118
4.1. Слоения: определения и примеры	118
4.2. Голономия и трансверсальные структуры	122
4.3. Трансверсальная риманова геометрия	128
5. Некоммутативная топология слоений	130
5.1. Группоид голономии	130
5.2. C^* -алгебра и алгебра фон Неймана слоения	135
5.3. Векторные расслоения и поля гильбертовых пространств	140
5.4. Строгая эквивалентность по Морите и трансверсали	143
5.5. K -теория C^* -алгебр слоения и гипотеза Баума–Конна	146
5.6. Трансверсальное интегрирование	151
6. Некоммутативное дифференциальное исчисление на пространстве слоев	152
6.1. Трансверсальный комплекс де Рама слоения	152
6.2. Трансверсальный фундаментальный класс слоения	155
6.3. Циклический коцикл, задаваемый классом Годбийона–Вея	158
6.4. Общие конструкции циклических коциклов	162
7. Теория индекса трансверсально эллиптических операторов	165
7.1. Эквивариантные трансверсально эллиптические операторы и их индекс как обобщенная функция	165
7.2. Трансверсально эллиптические операторы на слоениях	169
7.3. Спектральные тройки, ассоциированные с трансверсально эллиптическими операторами	174
7.4. Параримановы слоения и трансверсально гипоеллиптические операторы	177
8. Теория индекса касательно эллиптических операторов	180
8.1. Теория индекса для измеримых слоений	181
8.2. K -теоретическая теория об индексе	182
8.3. Высшая теория индекса	184
Список литературы	193

Введение

Теория индекса эллиптических операторов является одним из наиболее значительных достижений в математике двадцатого века. Она началась с вопроса, поставленного И. М. Гельфандом в 1959 г. Произвольный эллиптический оператор A на компактном многообразии без края определяет фредгольмову задачу в пространствах Соболева, и потому определен его целочисленный индекс

$$\text{Ind } A = \dim \text{Ker } A - \dim \text{Coker } A.$$

Гельфанд заметил, что этот индекс зависит только от топологических свойств этого оператора, и поставил вопрос о нахождении явной формулы для индекса эллиптического оператора в топологических терминах. Ответ на этот вопрос был дан Атьей и Зингером в 1963 г. Мы отсылаем читателя к оригинальным

статьям [1]–[4] и книгам [5]–[10] и приведенной в них библиографии по поводу классической теоремы Атьи–Зингера и ее доказательств.

В дальнейшем развитие теории индекса шло в нескольких направлениях. Данный обзор посвящен двум из этих направлений. Одно направление берет свое начало в работах Атьи [11] и Зингера [12] и относится к некоторому классу нефредгольмовых операторов. Этот класс состоит из таких дифференциальных операторов на компактном многообразии M , которые инвариантны по отношению к действию некоторой компактной группы Ли G на данном многообразии и эллиптичны по направлениям, конормальным к орбитам данного действия. Такие операторы называются трансверсально эллиптическими. Индекс трансверсально эллиптического оператора уже не является целым числом, а есть обобщенная функция на группе Ли G . Трансверсально эллиптические операторы естественно рассматривать как аналог эллиптических операторов на пространстве M/G орбит действия группы. В работах [13], [14] Конн рассматривал трансверсально эллиптические операторы на компактных многообразиях со слоением.

Другое направление в теории индекса берет свое начало с теоремы Атьи–Зингера об индексе для семейств эллиптических операторов [4]. Индекс семейства эллиптических операторов, параметризованного точками некоторого топологического пространства X , определяется как элемент группы $K(X)$ топологической K -теории. Обобщением этой теории является теория индекса касательно эллиптических операторов на многообразии со слоением. Дифференциальный оператор на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ называется касательно эллиптическим, если он содержит дифференцирования только вдоль слоев слоения (и, тем самым, ограничивается на любой слой слоения) и его ограничение на каждый слой является эллиптическим оператором. Любой касательно эллиптический оператор можно рассматривать как семейство эллиптических операторов на слоях слоения, параметризованное точками пространства слоев $M/\mathcal{F}$.

Как трансверсально эллиптические, так и касательно эллиптические операторы на многообразии со слоением имеют естественную интерпретацию в терминах его пространства слоев. Пространство слоев, вообще говоря, является очень сингулярным объектом, и оно плохо описывается посредством классических средств геометрии, топологии и анализа. Здесь нам на помощь приходит некоммутативная геометрия, одной из основных целей которой является разработка методов исследования геометрии, топологии и анализа на сингулярных пространствах таких, как пространство слоев слоения.

В основе некоммутативной геометрии лежат несколько фундаментальных идей. Первая из них состоит в том, что необходимо перейти от геометрических пространств к алгебрам функций на этих пространствах и перевести основные геометрические и аналитические понятия и конструкции на алгебраический язык. Такая методика хорошо известна и давно применяется, например, в алгебраической геометрии. Следующая идея состоит в том, что во многих случаях (особенно в тех, когда классическая алгебра функций мала или имеет плохую структуру) полезно рассматривать в качестве ее аналога некоторую некоммутативную алгебру. Это приводит к необходимости распространения ос-

новых геометрических и аналитических определений на случай общей некоммутативной алгебры. Такая точка зрения хорошо известна со времен теории Гельфанда и Наймарка коммутативных C^* -алгебр. Скажем, теория C^* -алгебр является далеко идущим обобщением теории топологических пространств и часто называется некоммутативной топологией, а теория алгебр фон Неймана является обобщением классической теории меры и интеграла. Эти идеи оказались также очень плодотворными и в теории индекса.

В работе [15] Конн определил C^* -алгебру $C^*(M, \mathcal{F})$ слоения $(M, \mathcal{F})$, которую естественно рассматривать как аналог алгебры непрерывных функций на пространстве слоев $M/\mathcal{F}$. Например, индекс касательно эллиптического оператора на $(M, \mathcal{F})$ определяется как элемент группы $K(C^*(M, \mathcal{F}))$ операторной топологической K -теории.

Основная задача некоммутативной дифференциальной геометрии, инициированной Конном [14] и активно развивающейся в настоящее время (см. недавние обзоры [16]–[18] и книги [19]–[25] по поводу различных аспектов некоммутативной геометрии), заключается в распространении описанных выше методов на аналитические объекты на геометрических пространствах и на некоммутативные алгебры. При этом основное внимание обращается на то, что, во-первых, правильное некоммутативное обобщение, примененное в классической ситуации (к алгебре функций на компактном многообразии или топологическом пространстве), должно согласовываться со своим классическим аналогом и, во-вторых, оно должно наследовать основные алгебраические и аналитические свойства своего классического аналога. Тем не менее, надо сказать, что, как правило, такие некоммутативные обобщения достаточно нетривиальны и имеют более богатую структуру и принципиально новые черты по сравнению с их коммутативными аналогами.

Следует отметить, что само возникновение некоммутативной дифференциальной геометрии в работе [14] непосредственно связано с теорией индекса, поскольку понятие циклических когомологий, введенное в этой работе, было изобретено Конном при попытках определить индекс трансверсально эллиптических операторов на многообразиях со слоением. А именно, индекс трансверсально эллиптического оператора на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ определяется как класс циклических когомологий некоторой подалгебры C^* -алгебры $C^*(M, \mathcal{F})$. С другой стороны, циклические когомологии и связанное с ними некоммутативное дифференциальное исчисление играют важную роль в теории индекса касательно эллиптических операторов. Прежде всего заметим, что в классическом случае характер Черна $\text{ch}(\text{Ind } P)$ индекса семейства P эллиптических операторов, параметризованного точками гладкого многообразия B , можно рассматривать как класс когомологий де Рама базы B . Более того, как утверждает локальная теорема об индексе, доказанная Бисмутом [26], для семейств операторов Дирака геометрический смысл имеет не только класс когомологий $\text{ch}(\text{Ind } P) \in H^*(B)$, но и некоторая дифференциальная форма на B , представляющая этот класс. Чтобы получать числовые инварианты из $\text{ch}(\text{Ind } P)$, можно рассматривать его спаривания с произвольными потоками де Рама на B . Некоммутативное обобщение такой конструкции дает высшая теория индекса для касательно эллиптических операторов на многообразиях

со слоением, в которой изучаются высшие индексы касательно эллиптического оператора, определяемые как спаривания его индекса с классами циклических когомологий некоторых подалгебр алгебры $C^*(M, \mathcal{F})$.

Изложению всех указанных выше аспектов теории индекса и некоммутативной геометрии посвящена данная работа. Мы начинаем в разделе 1 с обзора необходимых понятий классической теории индекса эллиптических операторов. В разделе 2 мы приводим некоторые сведения из некоммутативной топологии – понятие C^* -алгебры как некоммутативного топологического пространства, некоммутативный аналог векторного расслоения и поля гильбертовых пространств, простейший (и основной) инвариант – K -теория и K -гомологии. В конце раздела приведены необходимые сведения из некоммутативной теории меры и интегрирования. Раздел 3 посвящен основным понятиям некоммутативной дифференциальной геометрии – циклические (ко)гомологии и некоммутативное дифференциальное исчисление, спектральные тройки как аналог некоммутативной римановой структуры и некоммутативная локальная теория индекса. С раздела 4 мы переходим к слоениям, начиная с краткой сводки необходимых сведений из теории слоений. В разделе 5 описана конструкция операторных алгебр, ассоциированных со слоением, использующая понятие группоида голономии слоения. Затем обсуждаются основные объекты некоммутативной топологии слоений – голономно эквивариантные расслоения, поля гильбертовых пространств, K -теория и гипотеза Баума–Конна, теория некоммутативного интегрирования. Раздел 6 посвящен некоммутативному дифференциальному исчислению на пространстве слоев слоения и конструкциям циклических коциклов на операторных алгебрах, ассоциированных со слоением. Наконец, разделы 7 и 8 посвящены соответственно теории индекса трансверсально эллиптических и касательно эллиптических операторов.

Данная статья имеет некоторое пересечение с предыдущим обзором автора [18], который посвящен различным аспектам некоммутативной геометрии слоений. В настоящем обзоре основной акцент делается на теорию индекса дифференциальных операторов, ассоциированных со слоением, в частности приложениям к ней методов некоммутативной геометрии.

Автор благодарен А. М. Вершику, который был инициатором написания этой работы, а также Н. И. Жуковой и М. А. Шубину за полезные замечания.

1. Обзор классической теории индекса

1.1. Эллиптические операторы и индекс. Пусть M – n -мерное гладкое компактное многообразие без края, E и F – гладкие комплексные векторные расслоения на M ранга N_E и N_F соответственно. (Здесь и всюду в дальнейшем “гладкое” означает “класса C^∞ ”. Мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые нами объекты – класса C^∞ .) Линейный оператор $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ называется дифференциальным оператором порядка m , если в любой локальной карте $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ и любых тривиализациях $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^{N_E}$, $F|_U \cong U \times \mathbb{C}^{N_F}$ расслоений E и F над ней оператор D

имеет вид

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, a_α – гладкие функции на $\mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\mathcal{L}(\mathbb{C}^{N_E}, \mathbb{C}^{N_F})$ комплексных матриц размера $N_E \times N_F$.

Для дифференциального оператора D , задаваемого формулой (1.1) в некоторой локальной карте $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ и тривиализациях расслоений E и F над ней, определим его (полный) символ

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha, \quad x \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

и его главный символ

$$\sigma_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) (i\xi)^\alpha, \quad x \in \phi(U) \subset \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Главный символ инвариантно определен как гладкое сечение расслоения $\text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)$ на кокасательном расслоении T^*M , где $\pi: T^*M \rightarrow M$ обозначает каноническую проекцию, π^*E , π^*F – поднятия расслоений E и F соответственно на T^*M при отображении π . Дифференциальный оператор $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ называется эллиптическим, если $N_E = N_F$ и главный символ $\sigma_m(\xi)$ обратим при $\xi \in T^*M \setminus 0$.

В теории индекса необходимо рассматривать более широкий класс операторов, а именно, класс псевдодифференциальных операторов. Напомним, что линейный оператор $P: C^\infty(M, E) \rightarrow \mathcal{D}'(M, F)$ принадлежит классу $\Psi^m(M, E, F)$ псевдодифференциальных операторов порядка m , если в координатной области $X \subset \mathbb{R}^n$ он представим в виде

$$Pu(x) = \int e^{(x-y)\xi} p(x, \xi) u(y) dy d\xi, \quad x \in X,$$

где $u \in C_c^\infty(X, \mathbb{C}^{N_E})$, функция p , называемая полным символом оператора P , принадлежит классу символов $S^m(X \times \mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{C}^{N_E}, \mathbb{C}^{N_F}))$.

Главный символ $\sigma(P)$ оператора $P \in \Psi^m(M, E, F)$ является элементом пространства символов $S^m(T^*M, \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$, однозначно определенным с точностью до элементов пространства $S^{m-1}(T^*M, \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$. В локальных координатах $\sigma(P)$ задается полным символом p оператора P . Мы скажем, что P эллиптичен, если его главный символ $\sigma(P)$ имеет представителя $p \in S^m(T^*M, \text{Hom}(\pi^*E, \pi^*F))$, который поточечно обратим вне некоторого компактного множества в T^*M и удовлетворяет оценке

$$\|p(x, \xi)^{-1}\| \leq C(1 + |\xi|)^{-m}$$

для некоторой постоянной C и некоторой римановой метрики на M .

Для эллиптического оператора P существует такой оператор $Q \in \Psi^{-m}(M, F, E)$, что $QP - \text{Id}$ и $PQ - \text{Id}$ – сглаживающие операторы. Оператор Q называется параметриком для оператора P . Из существования параметрика вытекает,

что оператор P задает фредгольмов оператор в пространствах Соболева

$$P_{(s)}: H^{s+m}(M, E) \rightarrow H^s(M, F)$$

при любом $s \in \mathbb{R}$. Ядро оператора $P_{(s)}$ конечномерно и содержится в $C^\infty(M, E)$, а его образ замкнут в $H^s(M, F)$ и совпадает с ортогональным дополнением в $H^s(M, F)$ к ядру оператора P^* . Поэтому определен индекс

$$\text{Ind } P_{(s)} = \dim \text{Ker } P_{(s)} - \dim \text{Coker } P_{(s)} = \dim \text{Ker } P_{(s)} - \dim \text{Ker } P_{(s)}^*$$

оператора $P_{(s)}$, который не зависит от s и называется индексом оператора P .

Примерами эллиптических операторов являются операторы Дирака. Напомним их определение (изложение основных фактов спинорной геометрии и теории операторов Дирака см., например, в [6], [10], [27]).

Пусть M – компактное многообразие четной размерности n , g_M – риманова метрика на M и ∇ – связность Леви-Чивиты в TM . Для любого $x \in M$ обозначим через $\text{Cl}(T_x M)$ комплексную алгебру Клиффорда евклидова пространства $T_x M$. Если выбрать ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в $T_x M$, то $\text{Cl}(T_x M)$ определяется как алгебра над $\mathbb{C}$, порождаемая элементами 1 и $e_1, e_2, \dots, e_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\alpha = -2\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

Алгебра Клиффорда $\text{Cl}(T_x M)$ имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку. Напомним, что векторное пространство V называется $\mathbb{Z}_2$ -градуированным, если задано его разложение в прямую сумму подпространств $V = V_0 \oplus V_1$. Эквивалентным образом, $\mathbb{Z}_2$ -градуировка на V определяется таким оператором $\gamma \in \mathcal{L}(V)$, что $\gamma^2 = 1$. Относительно разложения $V = V_0 \oplus V_1$ оператор γ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Если пространство V имеет евклидову структуру, то естественно предполагать, что подпространства V_0 и V_1 ортогональны, что эквивалентно самосопряженности оператора γ . Для любого линейного оператора T в $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве V его суперслед определяется по формуле

$$\text{Tr}_s(T) = \text{Tr } \gamma T = \text{Tr } T_{11} - \text{Tr } T_{22},$$

где оператор T записан в блочном виде $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$, определяемом разложением $V = V_0 \oplus V_1$.

Рассмотрим векторное расслоение $\text{Cl}(TM)$ на M , слой которого в точке $x \in M$ совпадает с $\text{Cl}(T_x M)$. Это расслоение ассоциировано с главным $SO(n)$ -расслоением $O(TM)$ ориентированных ортонормированных реперов в TM : $\text{Cl}(TM) = O(TM) \times_{O(n)} \text{Cl}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому связность Леви-Чивиты ∇ индуцирует естественную связность $\nabla^{\text{Cl}(TM)}$ в $\text{Cl}(TM)$, которая согласована с клиффордовым умножением и сохраняет $\mathbb{Z}_2$ -градуировку на $\text{Cl}(TM)$. Если $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – локальный ортонормированный репер в TM и $\omega_{\alpha\beta}^\gamma$ – коэффициенты связности ∇ : $\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \sum_\gamma \omega_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$, то

$$\nabla_{e_\alpha}^{\text{Cl}(TM)} = e_\alpha + \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^n \omega_{\alpha\beta}^\gamma c(e_\beta) c(e_\gamma),$$

где для любого $a \in C^\infty(M, \text{Cl}(TM))$ через $c(a)$ обозначается оператор поточечного левого умножения на a в пространстве $C^\infty(M, \text{Cl}(TM))$.

Комплексное векторное расслоение $\mathcal{E}$ на M называется клиффордовым модулем, если для любого $x \in M$ определено представление алгебры $\text{Cl}(T_x M)$ в пространстве $\mathcal{E}_x$, гладко зависящее от точки x . Действие элемента $a \in \text{Cl}(T_x M)$ на $s \in \mathcal{E}_x$ будем обозначать через $c(a)s \in \mathcal{E}_x$. Клиффордов модуль $\mathcal{E}$ называется самосопряженным, если он наделен такой эрмитовой метрикой, что оператор $c(f): \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_x$ кососимметричен для любых $x \in M$ и $f \in T_x M$. Произвольный клиффордов модуль $\mathcal{E}$ имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$.

Связность $\nabla^\mathcal{E}$ на клиффордовом модуле $\mathcal{E}$ называется клиффордовой связностью, если для любых $f \in C^\infty(M, TM)$ и $a \in C^\infty(M, \text{Cl}(TM))$ имеет место соотношение

$$[\nabla_f^\mathcal{E}, c(a)] = c(\nabla_f^{\text{Cl}(TM)} a).$$

Самосопряженный клиффордов модуль $\mathcal{E}$, наделенный эрмитовой клиффордовой связностью $\nabla^\mathcal{E}$, называется клиффордовым расслоением. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – локальный ортонормированный базис в TM . Оператор Дирака $D_\mathcal{E}$, ассоциированный с клиффордовым расслоением $\mathcal{E}$, определяется по формуле

$$D_\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n c(e_i) \nabla_{e_i}^\mathcal{E}.$$

Оператор Дирака $D_\mathcal{E}$ формально самосопряжен в пространстве $L^2(M, \mathcal{E})$. Он является нечетным оператором относительно $\mathbb{Z}_2$ -градуировки $C^\infty(M, \mathcal{E}) = C^\infty(M, \mathcal{E}_+) \oplus C^\infty(M, \mathcal{E}_-)$. Тем самым, его можно записать в виде

$$D_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & D_\mathcal{E}^- \\ D_\mathcal{E}^+ & 0 \end{bmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.1. Примером клиффордова расслоения является комплексифицированное расслоение внешних степеней $\Lambda T^*M \otimes \mathbb{C}$ на римановом многообразии M . Действие $\text{Cl}(TM)$ на нем задается формулой

$$c(v) = \varepsilon_{v^*} - i_v, \quad v \in T_x M,$$

где $v^* \in T_x^*M$ – ковектор, двойственный к v , ε_{v^*} – внешнее умножение на v^* , i_v – внутреннее умножение на v . Клиффордова связность есть эрмитова связность, определяемая римановой метрикой. Соответствующим оператором Дирака является оператор де Рама, действующий в пространстве $C^\infty(M, \Lambda T M^*)$ по формуле

$$D_{\Lambda T M^*} = d + d^*,$$

где d – дифференциал де Рама.

ПРИМЕР 1.2. Напомним, что группа $\text{Spin}(n)$ есть нетривиальная двулистная накрывающая группы $SO(n)$. Спинорной структурой на римановом многообразии M называется главное $\text{Spin}(n)$ -расслоение $O'(TM)$ на M , являющееся таким двулистным накрытием главного $SO(n)$ -расслоения $O(TM)$ ориентированных ортонормированных реперов в TM , что отображение $O'(TM) \rightarrow O(TM)$

индуцирует двулистное накрытие $\text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ в каждом слое. Многообразие M называется спинорным, если оно допускает спинорную структуру.

Имеется единственное (с точностью до изоморфизма) нетривиальное неприводимое унитарное представление S группы $\text{Spin}(n)$, называемое спинорным. Пространство спиноров имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку. Для спинорного риманова многообразия M обозначим через $F(TM)$ ассоциированное эрмитово векторное расслоение спиноров на M : $F(TM) = O'(TM) \times_{\text{Spin}(n)} S$. Это расслоение является самосопряженным клиффордовым модулем. Связность Леви-Чивиты ∇ поднимается до клиффордовой связности $\nabla^{F(TM)}$ на $F(TM)$. Соответствующий оператор Дирака называется спинорным оператором Дирака или просто оператором Дирака.

Более обще, можно взять эрмитово векторное расслоение E , наделенное эрмитовой связностью ∇^E . Тогда $F(TM) \otimes E$ является клиффордовым модулем: действие элемента $a \in \text{Cl}(TM)$ на $F(TM) \otimes E$ определяется оператором $c(a) \otimes 1$ ($c(a)$ обозначает действие a на $F(TM)$). Связность $\nabla^{F(TM) \otimes E} = \nabla^{F(TM)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^E$ на $F(TM) \otimes E$ является клиффордовой связностью. Соответствующий оператор Дирака $D_{F(TM) \otimes E} = D_E$ называется скрученным спинорным оператором Дирака (или спинорным оператором Дирака с коэффициентами в E).

ПРИМЕР 1.3. По определению группа $\text{Spin}^c(n)$ есть подгруппа комплексной алгебры Клиффорда $\text{Cl}(\mathbb{R}^n)$, порожденная группой $\text{Spin}(n)$ и группой $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Пусть L – главное S^1 -расслоение на M . Естественное представление S^1 в $\mathbb{C}$ позволяет рассматривать L как комплексное линейное расслоение на M . Главное $\text{Spin}^c(n)$ -расслоение $O'(TM)$ на M , являющееся таким двулистным накрытием главного $SO(n) \times S^1$ -расслоения $O(TM) \times L$, что отображение $O'(TM) \rightarrow O(TM)$ индуцирует двулистное накрытие $\text{Spin}^c(n) \rightarrow SO(n) \times S^1$ в каждом слое, называется Spin^c -структурой на M . Расслоение L называется фундаментальным линейным расслоением, ассоциированным со Spin^c -структурой. Соответствующий оператор Дирака называется Spin^c -оператором Дирака.

1.2. К-теория. Топологическая K -теория играет важнейшую роль в теории индекса. Пусть X – компактное топологическое пространство. Множество классов изоморфизма конечномерных комплексных векторных расслоений на X , наделенное операцией прямой суммы, является абелевой полугруппой. Эта полугруппа порождает абелеву группу $K(X)$ – группу Гротендика, состоящую из формальных разностей векторных расслоений (виртуальных векторных расслоений). Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует естественный гомоморфизм $f^*: K(Y) \rightarrow K(X)$, который зависит только от гомотопического класса f .

В случае, когда X – локально компактное пространство, мы будем использовать группу $K(X)$ K -теории с компактными носителями, которую удобно описать следующим образом. Группа $K(X)$ порождается комплексами вида

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{d_0} E_1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{N-1}} E_N \xrightarrow{d_N} 0, \quad (1.2)$$

где $E_0, \dots, E_N$ – векторные расслоения над X и $d_0, \dots, d_N$ – морфизмы расслоений. Носителем такого комплекса называется замыкание множества тех $x \in X$, для которых последовательность (1.2) не точна. Обозначим через $S(X)$ множество гомотопических классов комплексов вида (1.2) с компактным носителем и через $S_\emptyset(X)$ подмножество в $S(X)$, состоящее из комплексов вида (1.2) с пустым носителем. Операция прямой суммы задает структуру полугруппы на $S(X)$. Группа $K(X)$ определяется как факторполугруппа $S(X)/S_\emptyset(X)$, которая на самом деле является абелевой группой. Эквивалентным образом вместо $S(X)$ можно рассматривать множество $S_N(X)$ гомотопических классов комплексов с компактным носителем фиксированной длины N . В частности, при $N = 1$ получаем описание $K(X)$ при помощи троек (E_0, E_1, d_0) , в которых морфизм $d_0: E_0 \rightarrow E_1$ является изоморфизмом вне некоторого компакта.

Для любого целого числа $n \geq 0$ положим $K^n(X) = K(X \times \mathbb{R}^n)$. Имеет место фундаментальный факт (периодичность Ботта), утверждающий, что

$$K^2(X) = K(X \times \mathbb{R}^2) \cong K^0(X) = K(X).$$

Таким образом, в топологической K -теории имеются только две существенно различные группы – $K^0(X) = K(X)$ и $K^1(X) = K(X \times \mathbb{R})$.

Можно дать определение $K^1(X)$ в терминах алгебры $C(X)$. Рассмотрим группу $GL(N, \mathbb{C})$ обратимых комплексных $(N \times N)$ -матриц. Будем считать, что группа $GL(N, \mathbb{C})$ вложена в $GL(N+1, \mathbb{C})$ при помощи отображения

$$X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $GL_\infty(\mathbb{C}) = \varinjlim GL(N, \mathbb{C})$. Тогда

$$K^1(X) = C(X, GL_\infty(\mathbb{C})) / C(X, GL_\infty(\mathbb{C}))_0,$$

где $C(X, GL_\infty(\mathbb{C}))$ обозначает группу непрерывных функций на X со значениями в $GL_\infty(\mathbb{C})$ и $C(X, GL_\infty(\mathbb{C}))_0$ – компоненту связности единицы в $C(X, GL_\infty(\mathbb{C}))$. Вместо группы $GL(N, \mathbb{C})$ эквивалентным образом можно рассматривать группу $U(N)$ унитарных $(N \times N)$ -матриц.

Роль ориентации в K -теории играет комплексная спинорная (Spin^c) структура. Вещественное векторное расслоение V ранга m над X называется K -ориентируемым, если его структурная группа редуцируется к группе $\text{Spin}^c(m)$. Любое комплексное векторное расслоение является K -ориентируемым. Имеется следующее описание $\text{Spin}^c(m)$ -структур на расслоении V . Выберем произвольную риманову метрику в слоях расслоения V . Пусть $\text{Cl}(V)$ – соответствующее расслоение комплексных алгебр Клиффорда. Если m четно, то $\text{Spin}^c(m)$ -структура на V задается выбором ориентации на V вместе с расслоением S неприводимых клиффордовых модулей. При нечетном m следует заменить $\text{Cl}(V)$ его четной частью. Для любого K -ориентируемого расслоения V над компактным многообразием X имеет место изоморфизм Тома $K(V) \cong K(X)$.

K -теория и обычные группы когомологий (скажем, сингулярных или Чеха) компактного топологического пространства X связаны при помощи характера Черна

$$\mathrm{ch}: K^0(X) \rightarrow H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k \text{ чётно}} H^k(X, \mathbb{Q}), \quad (1.3)$$

$$\mathrm{ch}: K^1(X) \rightarrow H^{\mathrm{odd}}(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k \text{ нечётно}} H^k(X, \mathbb{Q}), \quad (1.4)$$

который становится изоморфизмом после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$.

Если X является гладким многообразием, то имеется явная дифференциально-геометрическая конструкция характера Черна. Конструкция четного характера Черна (1.3) является частным случаем конструкции Черна–Вейля характеристических классов векторных расслоений. Если E – гладкое векторное расслоение на X , то характер Черна $\mathrm{ch}(E) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{R})$ соответствующего класса $[E]$ в $K^0(X)$ представляется классом когомологий де Рама замкнутой дифференциальной формы

$$\mathrm{ch}(E, \nabla) = \mathrm{Tr} \exp \left(\frac{F}{2\pi i} \right) \in \Omega^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{C})$$

для любой связности $\nabla: C^\infty(X, E) \rightarrow C^\infty(X, E \otimes T^*X)$ в расслоении E , где $F = \nabla^2$ – кривизна связности ∇ .

Нечетный характер Черна (1.4) получается транскрессией из четного характера Черна (1.3). Эта конструкция является частным случаем конструкции классов Черна–Саймонса (см. [28], [29]). Если $U \in C^\infty(X, U(N))$, то характер Черна $\mathrm{ch}(U) \in H^{\mathrm{odd}}(X, \mathbb{R})$ соответствующего класса $[U]$ в $K^1(X)$ задается классом когомологий де Рама замкнутой дифференциальной формы

$$\mathrm{ch}(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k!}{(2k+1)!} \mathrm{Tr}(U^{-1} dU)^{2k+1} \in \Omega^{\mathrm{odd}}(X, \mathbb{C}).$$

Отметим еще два важных частных случая характеристических классов, задаваемых конструкцией Черна–Вейля, которые будут нам необходимы в дальнейшем:

- (i) $\mathrm{Td}(E) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{C})$ – класс Тодда комплексного векторного расслоения E представляется классом когомологий де Рама замкнутой дифференциальной формы

$$\mathrm{Td}(E, \nabla) = \det \left(\frac{F}{e^F - 1} \right) = \exp \mathrm{Tr} \left(\log \left(\frac{F}{e^F - 1} \right) \right) \in \Omega^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{C});$$

- (ii) $\hat{A}(E) \in H^{4*}(X, \mathbb{R})$ – $\hat{A}$ -род (приведенный класс Атьи–Хирцебруха) вещественного векторного расслоения E представляется классом когомологий де Рама замкнутой дифференциальной формы

$$\hat{A}(E, \nabla) = \det^{1/2} \left(\frac{F/2}{\sinh(F/2)} \right) = \exp \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{2} \log \frac{F/2}{\sinh(F/2)} \right) \in \Omega^{4*}(X, \mathbb{R}).$$

Определение класса Тодда $\text{Td}(E) \in H^{\text{ev}}(X, \mathbb{C})$ можно распространить на произвольное K -ориентированное векторное расслоение E по формуле

$$\text{Td}(E) = e^{c_1(L)/2} \hat{A}(E),$$

где $c_1(L)$ – первый класс Черна фундаментального линейного расслоения L , ассоциированного со Spin^c -структурой на E .

1.3. Теорема Атьи–Зингера. Пусть M – замкнутое ориентированное многообразие размерности n . Рассмотрим эллиптический псевдодифференциальный оператор $P: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$, где E, F – комплексные векторные расслоения над M . По определению главный символ $\sigma(P)$ оператора P является изоморфизмом расслоений π^*E и π^*F вне некоторой компактной окрестности нулевого сечения $M \subset TM$. Поэтому он корректно определяет элемент $[\pi^*E, \pi^*F, \sigma(P)] \in K(TM)$ группы K -теории с компактными носителями касательного расслоения $\pi: TM \rightarrow M$ многообразия M (которое можно отождествить с кокасательным расслоением T^*M при помощи римановой метрики на M). Можно доказать, что индекс эллиптического оператора P зависит только от класса, определяемого его главным символом в $K(TM)$. Более того, любой элемент в $K(TM)$ можно получить при помощи этой конструкции из главного символа некоторого эллиптического оператора. Таким образом, определен гомоморфизм (аналитический индекс) $\text{Ind}_a: K(TM) \rightarrow \mathbb{Z}$.

С другой стороны, при помощи топологических конструкций можно определить гомоморфизм (топологический индекс) $\text{Ind}_t: K(TM) \rightarrow \mathbb{Z}$. Опишем вкратце его определение. Выберем вложение $i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (такое i существует при достаточно большом n). Обозначим через $di: TM \rightarrow T\mathbb{R}^n$ его дифференциал, который в данном случае является собственным вложением. Его нормальное расслоение совпадает с подъемом при отображении di расслоения $N \oplus N$, где N – нормальное расслоение к i . Выберем диффеоморфизм $N \oplus N \rightarrow W$, где W – трубчатая окрестность TM в $T\mathbb{R}^n$. Для эрмитова комплексного векторного расслоения $N \oplus N \rightarrow TM$ имеется изоморфизм Тома $\varphi^K: K(TM) \rightarrow K(N \oplus N) \cong K(W)$. Для открытого подмножества W в $T\mathbb{R}^n$ имеется естественное отображение $K(W) \rightarrow K(T\mathbb{R}^n)$, называемое гомоморфизмом Гизина. Композиция изоморфизма Тома и гомоморфизма Гизина есть отображение

$$i_!: K(TM) \rightarrow K(T\mathbb{R}^n) = K(\mathbb{R}^{2n}).$$

Эта конструкция остается справедливой для любого гладкого собственного вложения $M \rightarrow V$ многообразий, и получающееся отображение $i_!: K(M) \rightarrow K(V)$, называемое также гомоморфизмом Гизина, не зависит от выбора W и других вспомогательных элементов конструкции. Рассмотрим $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n \rightarrow \text{pt}$ как комплексное векторное расслоение. Тогда определен изоморфизм Тома $K(\text{pt}) \cong K(\mathbb{R}^{2n})$. Обратный к нему есть изоморфизм периодичности Ботта $\beta: K(\mathbb{R}^{2n}) \cong K(\text{pt}) = \mathbb{Z}$. Топологический индекс определяется по формуле

$$\text{Ind}_t = \beta \circ i_!: K(TM) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Теорема Атьи–Зингера об индексе в K -теоретической форме [1] утверждает следующее.

ТЕОРЕМА 1.4. *Имеет место равенство*

$$\text{Ind}_a = \text{Ind}_t: K(TM) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Справедлива следующая когомологическая формула для Ind_t [3]. Обозначим через $\pi_!: H^*(TM) \rightarrow H^*(M)$ отображение, задаваемое интегрированием вдоль слоев расслоения $\pi: TM \rightarrow M$. Это отображение обратнo к изоморфизму Тома $\Phi: H^*(M) \rightarrow H^*(TM)$.

ТЕОРЕМА 1.5. *Для любого $x \in K(TM)$ справедливо равенство*

$$\text{Ind}_t(x) = (-1)^{n(n+1)/2} \int_M (\pi_! \text{ch}(x)) \text{Td}(TM \otimes \mathbb{C}).$$

В качестве практически немедленного следствия этой формулы получается, что индекс любого эллиптического оператора на компактном ориентированном нечетномерном многообразии равен нулю.

Пусть M – четномерное ориентированное риманово спинорное компактное многообразие и E – комплексное векторное расслоение на M , снабженное эрмитовой структурой g^E и унитарной связностью ∇^E . Индекс спинорного оператора Дирака $D_{E,+}: C^\infty(M, F_+(TM) \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, F_-(TM) \otimes E)$ с коэффициентами в E задается формулой

$$\text{Ind}(D_{E,+}) = \int_M \hat{A}(TM) \text{ch}(E).$$

В этом случае имеется более строгая форма теоремы об индексе, которую мы сейчас приведем. Начнем с того, что напомним формулу Маккина–Зингера [30]

$$\text{Ind}(D_{E,+}) = \text{Tr}_s(\exp(-t(D_E)^2)), \quad t > 0.$$

Здесь мы рассматриваем пространство $L^2(M, F(TM) \otimes E)$ как $\mathbb{Z}_2$ -градуированное гильбертово пространство и Tr_s обозначает суперслед оператора.

Пусть $P_t(x, y)$ – гладкое ядро оператора $\exp(-t(D_E)^2)$ относительно римановой формы объема dy . Тогда

$$\text{Ind}(D_{E,+}) = \int_M \text{Tr}_s(P_t(x, x)) dx, \quad t > 0.$$

В работах [31]–[33] доказана следующая теорема (локальная теорема об индексе).

ТЕОРЕМА 1.6. *При $t \rightarrow 0$ имеет место поточечная сходимость*

$$\text{Tr}_s(P_t(x, x)) \rightarrow \{\hat{A}(TM, \nabla^{TM}) \text{ch}(E, \nabla^E)\}^{\max}.$$

Другое доказательство локальной теоремы об индексе, значительно улучшившее ее геометрическое понимание, было дано Гецлером [34]. Теорема Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме немедленно следует из локальной теоремы об индексе и формулы Маккина–Зингера.

Обобщение теоремы об индексе для многообразий с краем было получено Атьей, Патоди и Зингером в работах [35], [36]. В работе [1] доказана также

эквивариантная теорема об индексе для эллиптических операторов, инвариантных относительно действия компактной группы Ли. В работе [2] доказана формула, дающая выражение G -индекса эллиптического G -комплекса в терминах неподвижных точек действия (аналог формулы Атьи–Ботта–Лефшеца [37], [38]).

1.4. Теория индекса для самосопряженных операторов. Пусть $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ – самосопряженный эллиптический оператор первого порядка на замкнутом многообразии M . Тогда его индекс равен нулю. Тем не менее, как было обнаружено в работах [28], [39], по оператору D можно построить топологические инварианты типа аналитического индекса. Для этого используются операторы Тёплица T_u , ассоциированные с унитарными мультипликаторами $u \in C^\infty(M, U(N))$. Оператор Тёплица T_u есть ограниченный оператор в пространстве $L^2(M, E \otimes \mathbb{C}^N)$, задаваемый формулой

$$T_u = P_+ M_u P_+,$$

где P_+ – спектральный проектор оператора $D \otimes I_N$ в пространстве $L^2(M, E \otimes \mathbb{C}^N)$, соответствующий положительной полуоси, M_u – оператор умножения на $1 \otimes u$. Оператор T_u является фредгольмовым оператором. Для его индекса имеется топологическая формула [28], которая выводится из теоремы Атьи–Зингера об индексе:

$$\text{Ind } T_u = \int_{ST^*M} \pi^* \text{ch}(u) \text{ch}(E_+) \pi^* \text{Td}(TM \otimes \mathbb{C}),$$

где $\text{ch}(u) \in H^{\text{odd}}(M)$ – характер Черна класса $[u] \in K^1(M)$, определяемый формулой (1.4), $\pi^* \text{ch}(u) \in H^{\text{odd}}(ST^*M)$ – его подъем на косферическое расслоение ST^*M при естественной проекции $\pi: ST^*M \rightarrow M$, E_+ – подрасслоение расслоения π^*E на ST^*M , порожденное положительными собственными векторами главного символа $\sigma(D)$, $\text{ch}(E_+) \in K(ST^*M)$ – его характер Черна.

Можно показать, что индекс оператора Тёплица T_u зависит только от класса $[u] \in K^1(M)$ унитарного мультипликатора $u \in C^\infty(M, U(N))$, задавая, тем самым, отображение

$$K^1(M) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad K^1(M) \ni [u] \mapsto \text{Ind } T_u.$$

В связи с этим теория индекса самосопряженных операторов часто называется нечетной теорией индекса.

1.5. Теория индекса для семейств. Теория индекса для семейств эллиптических операторов была развита в [4]. Пусть Z – расслоенное пространство над хаусдорфовым топологическим пространством Y со слоем X и структурной группой $\text{Diff}(X)$ (многообразие над Y), E и F – расслоения над Y . Обозначим через Z_y слой расслоения Z над y и через E_y, F_y ограничения расслоений E и F на Z_y . Рассмотрим непрерывное семейство эллиптических псевдодифференциальных операторов $\{P_y \in \Psi^d(Z_y, E_y, F_y) : y \in Y\}$. Если $\dim \text{Ker } P_y$ не зависит от y , то семейство векторных пространств $\{\text{Ker } P_y : y \in Y\}$ определяет

векторное расслоение $\text{Ker } P$ над Y . То же самое верно для $\text{Coker } P$. В этом случае индекс семейства P определяется по формуле

$$\text{Ind}_a(P) = [\text{Ker } P] - [\text{Coker } P] \in K(Y).$$

В общем случае, когда $\dim \text{Ker } P_y$ меняется, определение индекса P как элемента группы $K(Y)$ дается при помощи небольшой модификации данного определения.

Обозначим через TZ/Y вертикальное касательное пространство (касательное пространство вдоль слоев расслоения). Символ семейства P определяет элемент $[\sigma(P)] \in K(TZ/Y)$. Аналитический индекс семейства P зависит только от $[\sigma(P)] \in K(TZ/Y)$, определяя отображение аналитического индекса

$$\text{Ind}_a: K(TZ/Y) \rightarrow K(Y).$$

Конструкция топологического индекса $\text{Ind}_t: K(TZ/Y) \rightarrow K(Y)$ для семейств эллиптических операторов является непосредственным обобщением конструкции топологического индекса для эллиптических операторов. Необходимо просто проделать все используемые построения послойно над Y . Теорема об индексе для семейств, доказанная в [4], утверждает совпадение аналитического и топологического индексов:

ТЕОРЕМА 1.7. *Справедливо равенство*

$$\text{Ind}_a = \text{Ind}_t: K(TZ/Y) \rightarrow K(Y).$$

Приведем также теорему об индексе для семейств эллиптических операторов в когомологической форме.

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть P – семейство эллиптических операторов, параметризованное многообразием Y , и $u \in K(TZ/Y)$ – класс символа семейства P . Тогда*

$$\text{ch Ind } P = (-1)^n \pi_* (\text{ch } u \text{ Td}(TZ \otimes \mathbb{C})) \in H^*(Y, \mathbb{Q}),$$

где n – размерность слоев, $\pi_*: H^*(TZ/Y) \rightarrow H^*(Y)$ – интегрирование вдоль слоев расслоения $TZ/Y \rightarrow Y$.

Важным примером является теорема об индексе для семейства операторов Дирака. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – расслоение компактных многообразий с компактными слоями Z_y , $y \in B$, четной размерности $n = 2l$. Предположим, что вертикальное касательное расслоение TM/B допускает спинорную структуру. Пусть $g_{M/B}$ – гладкая метрика на TM/B . Обозначим через $F = F_+(TM/B) \oplus F_-(TM/B)$ расслоение спиноров для TM/B . Пусть E – эрмитово расслоение на M , снабженное унитарной связностью ∇^E . Для любого $y \in B$ имеется корректно определенный оператор Дирака

$$D_{E,y} = \begin{bmatrix} 0 & D_{E,y,-} \\ D_{E,y,+} & 0 \end{bmatrix},$$

действующий в пространстве $C^\infty(Z_y, F(TZ_y) \otimes E)$. Таким образом, определено семейство эллиптических операторов $\{D_{E,y,+} : y \in B\}$. Для индекса этого семейства имеет место формула

$$\text{ch}(\text{Ind } D_{E,+}) = \pi_* [\hat{A}(TM/B) \text{ch } E] \in H^{\text{ev}}(B, \mathbb{Q}).$$

Бисмут [26] доказал более сильную версию этого результата, так называемую локальную теорему об индексе для семейств.

Пусть $T^H M$ – такое подрасслоение расслоения TM , что $TM = T^H M \oplus TM/B$. Расслоение $T^H M$ можно отождествить с π^*TB . Для любого $U \in TB$ обозначим через U^H его подъем в $T^H M$. Любая метрика g_B на TB поднимается на $T^H M$.

Для любых $U, V \in TB$ положим

$$T(U, V) = -P[U^H, V^H] \in TM/B,$$

где $P: TM \rightarrow TM/B$ – ортогональный проектор.

Для $U \in C^\infty(B, TB)$ пусть $\operatorname{div}_Z(U^H)$ обозначает дивергенцию векторного поля U^H по отношению к вертикальной римановой форме объема dv_Z .

Пусть ∇^L – связность Леви-Чивиты на TM , ассоциированная с метрикой $g_B \oplus g_{M/B}$. Введем евклидову связность $\nabla^{TM/B}$ на TM/B по формуле

$$\nabla^{TM/B} = P\nabla^L.$$

$\nabla^{TM/B}$ не зависит от выбора g_B и канонически определяется расслоением $T^H M$ и метрикой $g_{M/B}$. Связности $\nabla^{TM/B}$ и ∇^E определяют связность $\nabla^{F \otimes E}: C^\infty(M, F \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes F \otimes E)$ на $F \otimes E$. Определим связность

$$\nabla^H: C^\infty(M, F \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, (T^H M)^* \otimes F \otimes E)$$

следующим образом: для $U \in C^\infty(B, TB)$, $s \in C^\infty(M, F \otimes E)$

$$\nabla_U^H s = \nabla_{U^H}^{F \otimes E} s + \frac{1}{2} \operatorname{div}_Z(U^H) s.$$

Пусть $f_1, \dots, f_m$ – локальный ортогональный базис в TB и $f^1, \dots, f^m$ – двойственный к нему базис в T^*B . Для любого $t > 0$ рассмотрим оператор

$$A_t: C^\infty(M, F \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, (T^H M)^* \otimes F \otimes E),$$

задаваемый формулой

$$A_t = \nabla^H + \sqrt{t} D_E - \frac{1}{8\sqrt{t}} f^\alpha f^\beta c(T(f_\alpha, f_\beta)).$$

Он определяет суперсвязность на $C^\infty(M, F \otimes E)$, рассматриваемом как бесконечномерное векторное расслоение над B со слоем $C^\infty(Z_y, F(TZ_y) \otimes E)$ в точке $y \in B$, в смысле следующего определения.

Обозначим через $\Omega(M)$ пространство гладких дифференциальных форм на M и для любого векторного расслоения $\mathcal{E}$ на M через $\Omega(M, \mathcal{E})$ пространство гладких дифференциальных форм на M с коэффициентами в $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Пусть $\mathcal{E}$ – $\mathbb{Z}_2$ -градуированное векторное расслоение на многообразии M . Суперсвязностью на $\mathcal{E}$ называется нечетный дифференциальный оператор первого порядка $\mathbb{A}: \Omega^\pm(M, \mathcal{E}) \rightarrow \Omega^\mp(M, \mathcal{E})$, удовлетворяющий $\mathbb{Z}_2$ -градуированному правилу Лейбница: если $\alpha \in \Omega(M)$ и $\theta \in \Omega(M, \mathcal{E})$, то

$$\mathbb{A}(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \mathbb{A}(\theta).$$

Любая суперсвязность $\mathbb{A}$ на $\mathcal{E}$ определяет действие на пространстве $\Omega(M, \text{End } \mathcal{E})$, которое согласовано с правилом Лейбница:

$$\mathbb{A}\alpha = [\mathbb{A}, \alpha], \quad \alpha \in \Omega(M, \text{End } \mathcal{E}).$$

Кривизна суперсвязности $\mathbb{A}$ определяется как оператор $\mathbb{A}^2$ в пространстве $\Omega(M, \text{End } \mathcal{E})$.

В нашем случае кривизна A_t^2 суперсвязности A_t задается семейством эллиптических операторов второго порядка с коэффициентами в $\Lambda^2(T^H M)^*$, действующих вдоль слоев расслоения $\pi: M \rightarrow B$:

$$A_t^2: C^\infty(M, F \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^2(T^H M)^* \otimes F \otimes E).$$

Определен оператор

$$\begin{aligned} \exp(-A_t^2): C^\infty(M, F \otimes E) &\rightarrow C^\infty(M, \Lambda^*(T^H M)^* \otimes F \otimes E) \\ &\cong C^\infty(M, \Lambda^*(T^* B) \otimes F \otimes E), \end{aligned}$$

задаваемый семейством сглаживающих операторов, действующих вдоль слоев расслоения, с коэффициентами в дифференциальных формах на базе B .

Для любого $t > 0$ рассмотрим четную форму на B

$$\alpha_t = \phi \text{Tr}_s [\exp(-A_t^2)],$$

где линейный эндоморфизм $\phi: \Lambda(T^* B) \rightarrow \Lambda(T^* B)$ задается формулой $\omega \mapsto (2i\pi)^{-\deg \omega/2} \omega$, Tr_s обозначает послойный суперслед.

Справедливы следующие факты [26]:

- 1) α_t – вещественная, четная и замкнутая дифференциальная форма на B ;
- 2) класс когомологий де Рама $[\alpha_t] \in H^{\text{ev}}(B, \mathbb{Q})$ совпадает с $\text{ch}(\text{Ind } D_{E,+})$;
- 3) (локальная теорема об индексе для семейств) при $t \rightarrow 0$

$$\alpha_t = \pi^* [\hat{A}(TM/B, \nabla^{TM/B}) \text{ch}(E, \nabla^E)] + O(t).$$

Более того, в [6], [40] доказано, что если $\text{Ker } D_E$ есть векторное расслоение и $\nabla^{\text{Ker } D_E}$ – ортогональная проекция связности ∇^H на $\text{Ker } D_E$, то при $t \rightarrow +\infty$

$$\alpha_t = \text{ch}(\text{Ker } D_E, \nabla^{\text{Ker } D_E}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

1.6. Высшая теория индекса. Пусть M – замкнутое связное риманово спинорное многообразие четной размерности, E – эрмитово векторное расслоение на M . Теорема Атьи–Зингера об индексе устанавливает связь топологического выражения $\int_M \hat{A}(TM) \text{ch}(E)$ с индексом спинорного оператора Дирака D_E с коэффициентами в E . Если M не односвязно, можно модифицировать теорему об индексе, приняв во внимание фундаментальную группу Γ многообразия M . Обозначим через $p: M \rightarrow B\Gamma$ классифицирующее отображение для универсального накрытия $\tilde{M} \rightarrow M$. Высшая теория индекса пытается дать аналитическую интерпретацию выражения

$$\int_M \hat{A}(TM) \text{ch}(E) p^*[\eta],$$

где $[\eta] \in H^*(B\Gamma, \mathbb{C})$. В качестве примеров приложений высшей теории индекса можно привести гипотезу Новикова о гомотопической инвариантности неодносвязных многообразий и вопросы существования метрики положительной скалярной кривизны (см., например, статьи [41]–[44] и приведенную в них библиографию).

Высшая теория индекса непосредственно связана с теорией L^2 -индекса на накрытиях компактных многообразий, которая берет свое начало в работе [45]. В этой работе Атья доказал теорему о Γ -индексе для Γ -инвариантных эллиптических операторов на накрытии компактного многообразия. В работе [46] Конн и Московичи предложили подход к высшей теории индекса, основанный на использовании некоммутативной дифференциальной геометрии, в частности теории циклических когомологий. Их подход, как и некоторые другие, основан на идее, состоящей в том, чтобы рассматривать Γ -инвариантный эллиптический оператор на накрытии компактного многообразия как семейство эллиптических операторов, параметризованных точками некоммутативного пространства B , алгеброй непрерывных функций на котором является приведенная групповая C^* -алгебра $C_r^*\Gamma$. В работе [47] приведено доказательство высшей теоремы об индексе, использующее методы локальной теории индекса для семейств эллиптических операторов. Отметим также работу [48], в которой был введен высший аналог эта-инварианта для Γ -инвариантных операторов на Γ -накрытии компактного многообразия.

2. Основные понятия некоммутативной топологии

2.1. Некоммутативные пространства и расслоения. Напомним, что C^* -алгеброй называется такая инволютивная банахова алгебра A , в которой выполняется соотношение

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad a \in A.$$

Простейшим примером C^* -алгебры является алгебра $C_0(X)$ непрерывных функций на локально компактном хаусдорфовом топологическом пространстве X , стремящихся к нулю на бесконечности, наделенная операциями поточечного сложения и умножения, стандартной инволюцией, задаваемой комплексным сопряжением, и равномерной нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad f \in C_0(X).$$

Теорема Гельфанда–Наймарка позволяет единственным образом восстановить по коммутативной C^* -алгебре A такое локально компактное хаусдорфово топологическое пространство X , что $A \cong C_0(X)$. Именно, пространство X совпадает с множеством $\hat{A}$ всех характеров алгебры A , т.е. непрерывных гомоморфизмов $A \rightarrow \mathbb{C}$, наделенным топологией поточечной сходимости. Этот факт позволяет рассматривать произвольную C^* -алгебру как алгебру непрерывных функций на некотором виртуальном пространстве. По этой причине теория C^* -алгебр часто называется некоммутативной топологией.

Алгебра $\mathcal{L}(H)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H с инволюцией, задаваемой взятием сопряженного оператора, и операторной

нормой является C^* -алгеброй. Согласно второй теореме Гельфанда–Наймарка, любая C^* -алгебра изометрически $*$ -изоморфна некоторой замкнутой по норме $*$ -подалгебре алгебры $\mathcal{L}(H)$ для некоторого гильбертова пространства H .

Напомним, что правый модуль $\mathcal{E}$ над унитарной алгеброй A называется конечно порожденным, если он порождается конечным семейством элементов $\{x_i \in \mathcal{E} : i = 1, 2, \dots, k\}$, т.е. подмодуль, состоящий из конечных A -линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^k x_i a_i$, где $a_i \in A$, всюду плотен в A . Правый A -модуль $\mathcal{E}$ называется проективным, если существует такой правый A -модуль $\mathcal{E}'$, что прямая сумма $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}'$ изоморфна свободному модулю A^N при некотором N .

Если E – непрерывное комплексное векторное расслоение на компактном топологическом пространстве X , то пространство $C(X, E)$ его непрерывных сечений является конечно порожденным проективным модулем над алгеброй $C(X)$ непрерывных функций на X . Действие алгебры $C(X)$ на $C(X, E)$ задается формулой

$$(a \cdot s)(x) = a(x)s(x), \quad x \in X.$$

Теорема Серра–Суона утверждает, что любой конечно порожденный проективный $C(X)$ -модуль изоморфен $C(X)$ -модулю $C(X, E)$ для некоторого конечномерного комплексного векторного расслоения E . Тем самым, произвольный конечно порожденный проективный модуль над C^* -алгеброй можно рассматривать как аналог конечномерного комплексного векторного расслоения над соответствующим некоммутативным пространством или, другими словами, как некоммутативное векторное расслоение.

Во многих вопросах теории индекса и некоммутативной геометрии полезно рассматривать более общие объекты, а именно непрерывные поля гильбертовых пространств. Естественный пример непрерывного поля гильбертовых пространств возникает в теории индекса семейств эллиптических операторов. Пусть Z – расслоенное пространство над хаусдорфовым топологическим пространством Y со слоем X и структурной группой $\text{Diff}(X)$, E – расслоение над Y . Как и выше, обозначим через Z_y слой расслоения Z над y и через E_y ограничение расслоения E на Z_y . Тогда семейство гильбертовых пространств $\{L^2(Z_y, E_y), y \in Y\}$ является непрерывным полем гильбертовых пространств на Y .

Некоммутативным аналогом непрерывного поля гильбертовых пространств является понятие гильбертова C^* -модуля. Гильбертовы C^* -модули можно рассматривать как естественное обобщение гильбертовых пространств, возникающее при замене поля скаляров $\mathbb{C}$ на произвольную C^* -алгебру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть B – C^* -алгебра. Предгильбертовым B -модулем называется правый B -модуль $\mathcal{E}$, наделенный полуторалинейным отображением $\langle \cdot, \cdot \rangle_B : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow B$ (линейным по второму аргументу), удовлетворяющим следующим условиям:

- 1) $\langle x, x \rangle_B \geq 0$ для любого $x \in \mathcal{E}$;
- 2) $\langle x, x \rangle_B = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- 3) $\langle y, x \rangle_B = \langle x, y \rangle_B^*$ для любых $x, y \in \mathcal{E}$;
- 4) $\langle x, yb \rangle_B = \langle x, y \rangle_B b$ для любых $x, y \in \mathcal{E}$, $b \in B$.

Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ называется B -значным скалярным произведением.

Для предгильбертова B -модуля $\mathcal{E}$ формула $\|x\|_B = \|\langle x, x \rangle_B\|^{1/2}$ определяет норму на $\mathcal{E}$. Если $\mathcal{E}$ является полным по отношению к норме $\|\cdot\|_B$, то $\mathcal{E}$ называется гильбертовым C^* -модулем. В общем случае действие алгебры B и скалярное произведение на $\mathcal{E}$ продолжаются на его пополнение $\tilde{\mathcal{E}}$, превращая $\tilde{\mathcal{E}}$ в гильбертов C^* -модуль.

ПРИМЕР 2.2. Если $\mathcal{H} = \{H_x : x \in X\}$ – непрерывное поле гильбертовых пространств над компактным топологическим пространством X , то пространство его непрерывных сечений $C(X, \mathcal{H})$ является гильбертовым модулем над алгеброй $C(X)$. Действие алгебры $C(X)$ на $C(X, \mathcal{H})$ задается формулой

$$(a \cdot s)(x) = a(x)s(x), \quad x \in X,$$

и скалярное произведение – формулой

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{C(X)}(x) = \langle s_1(x), s_2(x) \rangle_{H_x}, \quad x \in X.$$

Пусть $\mathcal{E}$ – гильбертов B -модуль. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ множество всех эндоморфизмов T модуля $\mathcal{E}$, для которых существует сопряженный эндоморфизм, т. е. такой эндоморфизм $T^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, что $\langle Tx, y \rangle_B = \langle x, T^*y \rangle_B$ для любых $x, y \in \mathcal{E}$. Любой оператор в $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ является ограниченным оператором в $\mathcal{E}$, и алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ является C^* -алгеброй по отношению к операторной норме.

Для любых $x, y \in \mathcal{E}$ обозначим через $\theta_{x,y}$ оператор в $\mathcal{E}$, определяемый по формуле $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z \rangle_B$, $z \in \mathcal{E}$. Легко видеть, что $\theta_{x,y} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Замыкание $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ линейной оболочки множества $\{\theta_{x,y} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) : x, y \in \mathcal{E}\}$ является замкнутым идеалом в $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. Его элементы называются компактными эндоморфизмами модуля $\mathcal{E}$.

ПРИМЕР 2.3. Пусть Z – расслоенное пространство над компактным топологическим пространством Y со слоем X и структурной группой $\text{Diff}(X)$, E – расслоение над Y . Рассмотрим гильбертов $C(Y)$ -модуль $\mathcal{E}$ непрерывных сечений непрерывного поля гильбертовых пространств $\{L^2(Z_y, E_y), y \in Y\}$ на Y . Тогда произвольное непрерывное семейство псевдодифференциальных операторов $\{P_y \in \Psi^d(Z_y, E_y) : y \in Y\}$ при $d \leq 0$ определяет ограниченный эндоморфизм гильбертова $C(Y)$ -модуля $\mathcal{E}$. Если $d < 0$, этот эндоморфизм является компактным эндоморфизмом.

Понятие изометрического $*$ -изоморфизма между C^* -алгебрами является естественным аналогом понятия гомеоморфизма топологических пространств. Имеется более широкое отношение эквивалентности для C^* -алгебр, называемое строгой эквивалентностью по Морите. Оно сохраняет многие инварианты C^* -алгебр, например K -теорию, пространство неприводимых представлений, циклические когомологии, и совпадает с отношением изометрического $*$ -изоморфизма на классе коммутативных C^* -алгебр. Приведем вкратце некоторые сведения о строгой эквивалентности по Морите (более подробное изложение можно найти в работе [49]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть A и B – C^* -алгебры.

A - B -бимодулем называется векторное пространство X , наделенное структурами левого A -модуля и правого B -модуля, которые согласованы в том смысле, что $(ax)b = a(xb)$ для любых $x \in X$, $a \in A$ и $b \in B$.

A - B -бимодуль X называется бимодулем A - B -эквивалентности, если он наделен A -значным и B -значным скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ соответственно, по отношению к которым X является правым гильбертовым B -модулем и левым гильбертовым A -модулем, причем

- 1) $\langle x, y \rangle_A z = x \langle y, z \rangle_B$ для любых $x, y, z \in X$;
- 2) множество $\langle X, X \rangle_A$ порождает плотное подмножество в A , и множество $\langle X, X \rangle_B$ порождает плотное подмножество в B .

Алгебры A и B называются строго эквивалентными по Морите, если существует бимодуль A - B -эквивалентности.

Нетрудно доказать, что строгая эквивалентность по Морите является отношением эквивалентности.

Для любого линейного пространства L обозначим через $\tilde{L}$ комплексно сопряженное линейное пространство, которое совпадает с L как множество и имеет ту же самую операцию сложения, но умножение на скаляры задается формулой $\lambda \tilde{x} = (\bar{\lambda} x)^\sim$. Если X – бимодуль A - B -эквивалентности, то $\tilde{X}$ наделяется структурой бимодуля B - A -эквивалентности. Например, $b\tilde{x}a = (a^*xb^*)^\sim$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть X – бимодуль A - B -эквивалентности. Тогда отображение $E \rightarrow X \otimes_B E$ задает эквивалентность между категорией эрмитовых B -модулей и категорией эрмитовых A -модулей, обратным к которому является отображение $F \rightarrow F \otimes_B \tilde{X}$.

В частности, из теоремы 2.5 вытекает, что две коммутативные C^* -алгебры строго эквивалентны по Морите тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Следующая теорема связывает понятие эквивалентности по Морите с понятием стабильной эквивалентности.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть A и B – C^* -алгебры, имеющие счетную аппроксимативную единицу. Эти алгебры строго эквивалентны по Морите тогда и только тогда, когда они стабильно эквивалентны, т.е. C^* -алгебры $A \otimes \mathcal{K}$ и $B \otimes \mathcal{K}$ изоморфны. (Здесь $\mathcal{K}$ обозначает алгебру компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве.)

2.2. Операторная K -теория. Мы начнем этот пункт с некоторых фактов из K -теории для C^* -алгебр, некоммутативного аналога топологической K -теории.

Пусть A – унитарная C^* -алгебра. Группа $K_0(A)$ определяется как группа Гротендика полугруппы, состоящей из классов изоморфизма конечно порожденных проективных модулей над алгеброй A , с операцией прямой суммы. Таким образом, элементы группы $K_0(A)$ можно рассматривать как формальные разности классов изоморфизма конечно порожденных проективных модулей над алгеброй A . Эквивалентным образом, можно рассматривать классы изоморфизма ортогональных проекторов в алгебре матриц над A .

Еще одно определение группы $K_0(A)$ дается следующим образом. Обозначим через $M_n(A)$ алгебру матриц порядка $n \times n$ с элементами из A . Будем считать, что $M_n(A)$ вложена в $M_{n+1}(A)$ при помощи отображения $X \rightarrow \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Пусть $M_\infty(A) = \varinjlim M_n(A)$. Группа $K_0(A)$ определяется как множество классов гомотопической эквивалентности проекторов ($p^2 = p = p^*$) в $M_\infty(A)$, наделенное операцией прямой суммы

$$p_1 \oplus p_2 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $GL_n(A)$ группу обратимых матриц порядка $n \times n$ с элементами из A . Будем считать, что $GL_n(A)$ вложена в $GL_{n+1}(A)$ при помощи отображения $X \rightarrow \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть $GL_\infty(A) = \varinjlim GL_n(A)$. Группа $K_1(A)$ определяется как множество классов гомотопической эквивалентности унитарных матриц ($u^*u = uu^* = 1$) в $GL_\infty(A)$, наделенное операцией прямой суммы.

Если A не имеет единицы и A^+ – алгебра, получаемая присоединением единицы к алгебре A , то имеется гомоморфизм $i: \mathbb{C} \rightarrow A^+: \lambda \mapsto \lambda \cdot 1$, индуцирующий гомоморфизм $i_*: K_0(\mathbb{C}) \rightarrow K_0(A^+)$, и $K_0(A)$ определяется как ядро этого гомоморфизма. Более того, по определению $K_1(A) = K_1(A^+)$.

Данные определения согласуются с определениями, данными в коммутативном случае: для любого локально компактного топологического пространства X имеют место изоморфизмы $K_i(C_0(X)) \cong K^i(X)$, $i = 0, 1$.

Для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ мы будем рассматривать группы $K_0(\mathcal{A})$ и $K_1(\mathcal{A})$ алгебраической K -теории. Группа $K_0(\mathcal{A})$ определяется аналогично группе $K_0(A)$ топологической K -теории с использованием идемпотентов ($e^2 = e$) в алгебре $M_\infty(\mathcal{A})$ вместо проекторов. Группа $K_1(\mathcal{A})$ определяется как факторгруппа группы $GL_\infty(\mathcal{A})$ по коммутанту $[GL_\infty(\mathcal{A}), GL_\infty(\mathcal{A})]$.

Гомологический K -функтор – объект, двойственный топологической K -теории, – был введен чисто гомотопическими методами Уайтхедом в 1962 г. Атья [50] заметил, что эллиптический оператор на гладком многообразии можно в некотором смысле рассматривать как элемент группы K -гомологий. Атья сформулировал функционально-аналитические аксиомы для двух основных свойств эллиптического псевдодифференциального оператора на компактном многообразии. С их помощью он определил для любого компактного топологического пространства X класс объектов $\text{Ell}(X)$ и, в случае когда X – CW-комплекс, эпиморфизм $\text{Ell}(X) \rightarrow K_0(X)$. Атья предложил рассматривать элементы $\text{Ell}(X)$ как представляющие циклы для $K_0(X)$. Идеи Атья были полностью реализованы Каспаровым в работе [51] (см. также [52]). Аналитическая конструкция групп K -гомологий, приведенная в работе [51], применима для произвольной некоммутативной C^* -алгебры и основывается на понятии фредгольмова модуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Фредгольмовым модулем (или K -циклом) над алгеброй A называется пара (H, F) , где

- 1) H – гильбертово пространство, наделенное $*$ -представлением ρ алгебры A ;
- 2) F – такой ограниченный оператор в H , что для любого $a \in A$ операторы $(F^2 - 1)\rho(a)$, $(F - F^*)\rho(a)$ и $[F, \rho(a)]$ компактны в H .

Фредгольмов модуль (H, F) называется четным, если гильбертово пространство H наделено $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой γ , операторы $\rho(a)$ являются четными,

$\gamma\rho(a) = \rho(a)\gamma$, а оператор F нечетен, $\gamma F = -F\gamma$. В противном случае он называется нечетным.

Группы гомологий $K^0(A)$ (соответственно $K^1(A)$) C^* -алгебры A определяются как множества классов гомотопической эквивалентности четных (соответственно нечетных) фредгольмовых модулей над A . Операция прямой суммы задает структуру абелевой группы на $K^0(A)$ и $K^1(A)$.

ПРИМЕР 2.8. Пусть M – компактное многообразие, E_0, E_1 – эрмитовы векторные расслоения на M , $P \in \Psi^0(M, E_0, E_1)$ – эллиптический оператор нулевого порядка такой, что его главный символ σ_P удовлетворяет условию $\sigma_P \sigma_P^* = 1$ (например если $D \in \Psi^d(M, E_0, E_1)$ – эллиптический оператор порядка $d > 0$, то можно в качестве P взять оператор $D(1 + D^*D)^{-1/2}$), $Q \in \Psi^0(M, E_1, E_0)$ – параметрикс для оператора P . Определим $\mathbb{Z}_2$ -градуированное гильбертово пространство $H = L^2(M, E_0) \oplus L^2(M, E_1)$, наделенное естественным действием алгебры $C(M)$, и ограниченный оператор F в H , задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & Q \\ P & 0 \end{pmatrix}$. Тогда пара (H, F) является четным фредгольмовым модулем над алгеброй $C(M)$.

В качестве оператора D можно взять оператор Дирака $D_{\mathcal{E}}^+ : C^\infty(M, \mathcal{E}_+) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{E}_-)$, ассоциированный с произвольным клиффордовым расслоением $\mathcal{E}$ на четномерном компактном римановом многообразии M .

ПРИМЕР 2.9. Пусть M – компактное многообразие, E – эрмитово векторное расслоение на M , $F \in \Psi^0(M, E)$ – эллиптический оператор нулевого порядка такой, что его главный символ σ_F удовлетворяет условию $\sigma_F^* = \sigma_F$, $\sigma_F^2 = 1$ (например если $D \in \Psi^d(M, E)$ – самосопряженный эллиптический оператор порядка $d > 0$, то можно в качестве F взять оператор $D(1 + D^2)^{-1/2}$). Определим $\mathbb{Z}_2$ -градуированное гильбертово пространство $H = L^2(M, E) \oplus 0$, наделенное естественным действием алгебры $C(M)$. Тогда пара (H, F) является нечетным фредгольмовым модулем над алгеброй $C(M)$.

В качестве оператора D можно взять оператор Дирака $D_{\mathcal{E}} : C^\infty(M, \mathcal{E}) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{E})$, ассоциированный с произвольным клиффордовым расслоением $\mathcal{E}$ на нечетномерном компактном римановом многообразии M .

Фредгольмов модуль (H, F) над алгеброй A определяет отображение индекса $\text{ind} : K_*(A) \rightarrow \mathbb{Z}$. В четном случае, по отношению к разложению $H = H^+ \oplus H^-$, задаваемому $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой пространства H , оператор F принимает вид

$$F = \begin{pmatrix} 0 & F^- \\ F^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\pm} : H^{\pm} \rightarrow H^{\mp}.$$

Для любого идемпотента $e \in M_q(A)$ оператор $e(F^+ \otimes 1)e$, действующий из $e(H^+ \otimes \mathbb{C}^q)$ в $e(H^+ \otimes \mathbb{C}^q)$, является фредгольмовым, его индекс зависит только от класса идемпотента e в $K_0(A)$. Поэтому определено отображение $\text{Ind} : K_0(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ по формуле

$$\text{Ind}[e] = \text{Ind } e(F^+ \otimes 1)e. \quad (2.1)$$

В нечетном случае обозначим $P = (1 + F)/2$. Тогда для унитарной матрицы $U \in GL_q(A)$ оператор $(P \otimes 1)U(P \otimes 1)$ является фредгольмовым оператором.

Более того, индекс оператора $(P \otimes 1)U(P \otimes 1)$ зависит только от класса унитарной матрицы U в $K_1(A)$. Тем самым, получаем отображение $\text{Ind}: K_1(A) \rightarrow \mathbb{Z}$, задаваемое формулой

$$\text{Ind}[U] = \text{Ind}(P \otimes 1)U(P \otimes 1). \quad (2.2)$$

Если A является C^* -алгеброй, то в обоих случаях, как в четном, так и в нечетном, отображение Ind определяет отображение групп $K_i(A)$ топологической K -теории в $\mathbb{C}$, которое зависит только от класса, задаваемого фредгольмовым модулем (H, F) в группе K -гомологий $K^i(A)$.

В работе [28] дано геометрическое определение групп K -гомологий. Напомним вкратце это определение. K -циклом на топологическом пространстве X называется тройка (M, E, ϕ) , где M – компактное Spin^c -многообразие без края; E – комплексное векторное расслоение на M ; ϕ – непрерывное отображение из M в X . Заметим, что многообразие M необязательно связно и слои расслоения E могут иметь разные размерности на разных компонентах связности. Можно определить естественное понятие изоморфизма K -циклов. На множестве классов изоморфизма K -циклов на X определяется отношение эквивалентности, порождаемое тремя элементарными отношениями, которые называются бордизм, прямая сумма и модификация, ассоциированная с векторным расслоением.

Геометрическая группа K -гомологий $K^{\text{geom}}(X)$ определяется как множество классов эквивалентности K -циклов на X . Структура абелевой группы на $K^{\text{geom}}(X)$ задается очевидной операцией дизъюнктного объединения K -циклов.

Обозначим через $K_0^{\text{geom}}(X)$ (соответственно $K_1^{\text{geom}}(X)$) подгруппу группы $K^{\text{geom}}(X)$, состоящую из классов эквивалентности K -циклов (M, E, ϕ) , для которых каждая компонента связности многообразия M четномерна (соответственно нечетномерна).

Изоморфизм геометрической и аналитической групп K -гомологий строится следующим образом. Пусть (M, E, ϕ) – K -цикл на X . Пусть D_E – Spin^c -оператор Дирака на M с коэффициентами в расслоении E и $[D_E] \in K_i(M)$, $i = \dim M \pmod{2}$, – соответствующий класс в K -гомологиях многообразия M (см. примеры 2.8 и 2.9). Отображение $\phi: M \rightarrow X$ индуцирует отображение в K -гомологиях $\phi_*: K_i(M) \rightarrow K_i(X)$. Соответствие $(M, E, \phi) \rightarrow \phi_*[D_E] \in K_i(X)$ определяет отображение $K_i^{\text{geom}}(X) \rightarrow K_i(X)$, $i = 0, 1$, являющееся изоморфизмом [53].

Имеется естественное преобразование теорий гомологий – гомологический характер Черна $\text{ch}: K_*(X) \rightarrow H_*(X, \mathbb{Q})$, определяемое следующим образом (см. [28]). Рассмотрим K -цикл (M, E, ϕ) на X . Отображение $\phi: M \rightarrow X$ индуцирует отображение $\phi_*: H_*(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(X, \mathbb{Q})$ рациональных групп гомологий. Положим

$$\text{ch}(M, E, \phi) = \phi_*(\text{ch}(E) \cup \text{Td}(M) \cap [M]) \in H_*(X, \mathbb{Q}), \quad (2.3)$$

где кэп-произведение $\text{ch}(E) \cup \text{Td}(M) \cap [M] \in H_*(M, \mathbb{Q})$ совпадает с классом, двойственным по Пуанкаре к классу $\text{ch}(E) \cup \text{Td}(M) \in H^*(M, \mathbb{Q})$. Отметим,

в частности, что для оператора Дирака D_E на Spin^c -многообразии M с коэффициентами в расслоении E имеем

$$\text{ch}[D_E] = \text{ch}(E) \cup \text{Td}(M) \cap [M] \in H_*(M, \mathbb{Q}).$$

Если X – конечный CW-комплекс, то характер Черна ch определяет изоморфизм $K_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(X, \mathbb{Q})$. Для произвольного CW-комплекса X мы будем рассматривать сингулярные гомологии $H_*(X, \mathbb{Q})$ и K -гомологии $K_*(X)$ с компактными носителями. Поэтому характер Черна $\text{ch}: K_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_*(X, \mathbb{Q})$ определен и также является рациональным изоморфизмом.

Нам будут также необходимы группы $K_{*,F}(X)$ K -гомологий пространства X , скрученные при помощи вещественного векторного расслоения F на X . Они определяются формулой

$$K_{j,F}(X) = K_j(F, F \setminus \{0\}), \quad j = 0, 1.$$

Можно дать эквивалентное определение, если выбрать евклидову структуру в слоях расслоения F и ввести расслоения BF и SF единичных шаров и единичных сфер в расслоении F . Тогда мы имеем

$$K_{j,F}(X) = K_j(BF, SF), \quad j = 0, 1.$$

K -гомологическим фундаментальным классом компактного Spin^c -многообразия M называется класс $[D] \in K_i(M)$, где $i = \dim M \pmod{2}$, определяемый произвольным Spin^c -оператором Дирака D на M . Двойственность Пуанкаре в K -теории утверждает, что пересечение с $[D]$ определяет изоморфизм

$$K^*(M) \cong K_*^a(M).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для произвольного компактного Spin^c -многообразия M с краем ∂M :

$$K^*(M, \partial M) \cong K_*^a(M).$$

Если X – произвольное замкнутое риманово многообразие, то применение данных утверждений к Spin^c -многообразию T^*X приводит к изоморфизмам двойственности Пуанкаре

$$K^*(T^*X) = K^*(BT^*X, ST^*X) \cong K_*^a(X).$$

Данный изоморфизм имеет естественную интерпретацию в терминах теории индекса. А именно, рассмотрим произвольный элемент $x \in K^0(BT^*X, ST^*X)$. Он задается тройкой (E_0, E_1, σ) , где E_0, E_1 – гладкие векторные расслоения на X и σ – изоморфизм векторных расслоений $\sigma: \pi^*E_0 \rightarrow \pi^*E_1$. Без потери общности можно предполагать, что σ является главным символом некоторого псевдодифференциального оператора D_σ . Тогда класс $[D_\sigma]$ в $K_*^a(X)$, определя-

емый оператором D_σ , совпадает с классом, двойственным по Пуанкаре классу $x \in K^0(BT^*X, ST^*X)$. Аналогичная конструкция имеется и для элементов $x \in K^1(BT^*X, ST^*X)$.

Для произвольного компактного Spin^c -многообразия M с краем ∂M имеется и другой изоморфизм двойственности Пуанкаре

$$K^*(M) \cong K_*(M, \partial M).$$

Если X – произвольное замкнутое риманово многообразие, то применение этого изоморфизма к Spin^c -многообразию T^*X приводит к изоморфизмам двойственности Пуанкаре

$$K_{*, T^*X}(X) = K_*(BT^*X, ST^*X) \cong K^*(X).$$

В заключение этого пункта мы приведем некоторые сведения о бивариантном KK -функторе Каспарова, введенном в работе [39].

Пусть A, B – C^* -алгебры. В этом пункте мы будем понимать под (A, B) -бимодулем $\mathbb{Z}_2$ -градуированный счетно порожденный гильбертов модуль H , на котором задано действие алгебры A , задаваемое ее представлением $\rho: A \rightarrow \mathcal{B}(H)$ четными операторами в H . Обозначим через $Q_A(H)$ подалгебру в $\mathcal{B}(H)$, образованную такими операторами $T \in \mathcal{B}(H)$, что $[T, \rho(a)] \in \mathcal{K}(H)$ для любого $a \in A$, и обозначим через $I_A(H)$ идеал в $Q_A(H)$, который состоит из таких операторов $T \in \mathcal{B}(H)$, что $T\rho(a) \in \mathcal{K}(H)$ и $\rho(a)T \in \mathcal{K}(H)$ для любого $a \in A$.

Рассмотрим пары (H, F) , где H – (A, B) -бимодуль и $F \in Q_A(H)$ – нечетный оператор, удовлетворяющий условию: операторы $F - F^*$ и $F^2 - I$ принадлежат $I_A(H)$. Скажем, что пары (H_1, F_1) и (H_2, F_2) изоморфны, если существует такой изометрический, сохраняющий градуировку изоморфизм (A, B) -бимодулей $u: H_1 \rightarrow H_2$, что $F_2 = uF_1u^{-1}$. Множество классов изоморфизма пар (H, F) обозначим через $E(A, B)$.

Назовем гомотопией между элементами $(H_0, F_0) \in E(A, B)$ и $(H_1, F_1) \in E(A, B)$ такой элемент $(H, F) \in E(A, B[0, 1])$, что ограничения его на концы отрезка $t = 0$ и $t = 1$ совпадают с (H_0, F_0) и (H_1, F_1) соответственно: $H_t = H \otimes_{B[0, 1]} B$, $F_t = F \otimes 1$. Определим множество $KK(A, B)$ как множество классов гомотопической эквивалентности в $E(A, B)$.

Множество $KK(A, B)$ является абелевой группой относительно операции прямой суммы: $(H_1, F_1) \oplus (H_2, F_2) = (H_1 \oplus H_2, F_1 \oplus F_2)$.

Обозначим через $KK_0(A, B)$ (соответственно $KK_1(A, B)$) подмножество в $KK(A, B)$, задаваемое элементами $(H, F) \in E(A, B)$, для которых оператор F нечетный (соответственно четный).

Группы $KK_i(\mathbb{C}, B)$ естественно изоморфны группам $K_i(B)$ топологической K -теории. Этот изоморфизм в некотором смысле является алгебраической переформулировкой определения индекса семейства эллиптических операторов. В случае, когда $B = C(X)$ – алгебра непрерывных функций на компактном топологическом пространстве X , семейство P эллиптических операторов, параметризованное точками пространства X , естественно определяет элемент группы $KK(\mathbb{C}, B)$. Элемент группы $K(B) = K(X)$, соответствующий этому элементу при изоморфизме $KK(\mathbb{C}, B) \cong K(B)$, совпадает с индексом семейства P . Для произвольной C^* -алгебры B элементы группы $KK_i(\mathbb{C}, B)$ можно построить, используя эллиптические псевдодифференциальные операторы,

инвариантные относительно действия алгебры B . Теорема об индексе для эллиптических дифференциальных операторов над C^* -алгеброй была доказана Мищенко и Фоменко в [54] (см. также [5]). Очевидно также, что в случае $B = \mathbb{C}$ определение групп $KK_i(A, \mathbb{C})$ совпадает с определением групп K -гомологий $K^i(A)$.

Основным техническим средством является билинейное спаривание (произведение-пересечение)

$$KK_i(A_1, B_1 \otimes D) \otimes KK_j(D \otimes A_2, B_2) \rightarrow KK_{i+j}(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2),$$

которое обобщает все известные произведения в K -теории и K -гомологиях. Будем обозначать произведение-пересечение элементов $x \in KK_i(A_1, B_1 \otimes D)$ и $y \in KK_j(D \otimes A_2, B_2)$ через $x \otimes_D y$. Идея конструкции произведения-пересечения заимствована из теории эллиптических операторов. Оно обладает многими естественными свойствами произведения – контравариантно по A_1 и A_2 , ковариантно по B_1 и B_2 , функториально по D и ассоциативно. Последнее означает, что

$$(x_1 \otimes_{D_1} x_2) \otimes_{D_2} x_3 = x_1 \otimes_{D_1} (x_2 \otimes_{D_2} x_3)$$

для любых $x_1 \in KK_i(A_1, B_1 \otimes D_1)$, $x_2 \in KK_j(D_1 \otimes A_2, B_2 \otimes D_2)$, $x_3 \in KK_\ell(D_2 \otimes A_3, B_3)$.

2.3. Некоммутативная теория меры. Исходными данными некоммутативной теории меры является пара $(\mathcal{M}, \phi)$, состоящая из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и веса ϕ на $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Алгеброй фон Неймана называется инволютивная подалгебра алгебры $\mathcal{L}(H)$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H , замкнутая относительно слабой операторной топологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. Весом на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется функция ϕ , определенная на множестве $\mathcal{M}_+$ положительных элементов алгебры $\mathcal{M}$, со значениями в $\bar{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= \phi(a) + \phi(b), & a, b &\in \mathcal{M}_+, \\ \phi(\alpha a) &= \alpha \phi(a), & \alpha &\in \mathbb{R}_+, \quad a \in \mathcal{M}_+. \end{aligned}$$

Вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется следом, если

$$\phi(a^*a) = \phi(aa^*), \quad a \in \mathcal{M}_+.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Вес ϕ на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ называется

- 1) точным, если для любого $a \in \mathcal{M}_+$ равенство $\phi(a) = 0$ влечет $a = 0$;
- 2) нормальным, если для любой ограниченной возрастающей сети $\{a_\alpha\}$ элементов из $\mathcal{M}_+$ с точной верхней гранью a выполняется равенство $\phi(a) = \sup_\alpha \phi(a_\alpha)$;
- 3) полуконечным, если линейная оболочка множества $\{x \in \mathcal{M}_+ : \phi(x) < \infty\}$ σ -слабо плотна в $\mathcal{M}$.

Каждая алгебра фон Неймана обладает точным нормальным полуконечным весом. Алгебра фон Неймана называется полуконечной, если она обладает точным нормальным полуконечным следом.

ПРИМЕР 2.13. Обычный след tr на алгебре фон Неймана $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является точным нормальным полуконечным следом. Более того, для любого ограниченного положительного оператора T в $\mathcal{H}$ функционал $\phi_T(A) = \text{tr} AT$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, является точным нормальным полуконечным весом на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

ПРИМЕР 2.14. Если на измеримом пространстве X дана σ -конечная мера μ , то элементы пространства $L^\infty(X, \mu)$, рассматриваемые как операторы умножения в гильбертовом пространстве $L^2(X, \mu)$, образуют алгебру фон Неймана. Более того, равенство

$$\phi(f) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad f \in L^\infty(X, \mu),$$

определяет точный нормальный полуконечный след на $L^\infty(X, \mu)$.

Напомним, что для любого подмножества $S \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ его коммутантом называется множество ограниченных операторов в $\mathcal{H}$, которые перестановочны со всеми операторами из S . Инволютивная подалгебра $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ является алгеброй фон Неймана тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Неограниченный линейный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в $\mathcal{H}$, если $Tu = uT$ для любого унитарного оператора в $\mathcal{H}$, принадлежащего коммутанту $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{N}$ – полуконечная алгебра фон Неймана, τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{N}$. Замкнутый по норме двусторонний идеал в $\mathcal{N}$, порожденный элементами $E \in \mathcal{N}$ с $\tau(E) < \infty$, будет обозначаться через $\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$. Его элементы называются τ -компактными операторами. Оператором Брейера–Фредгольма называется любой оператор $P \in \mathcal{N}$, образ которого при каноническом отображении $\pi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}/\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$ обратим в алгебре $\mathcal{N}/\mathcal{K}_{\mathcal{N}}$. Индекс Брейера–Фредгольма оператора Брейера–Фредгольма $P \in \mathcal{N}$ определяется по формуле

$$\text{Ind}(F) = \tau(P_{\text{Ker } F}) - \tau(P_{\text{Coker } F}),$$

где $P_{\text{Ker } F}$, $P_{\text{Coker } F}$ – проекторы на ядро и коядро оператора F соответственно. Теория операторов Брейера–Фредгольма была разработана в работах [55], [56] в случае, когда $\mathcal{N}$ – фактор, и распространена на случай, когда $\mathcal{N}$ не является фактором, в работе [57].

3. Некоммутативная дифференциальная геометрия

3.1. Циклические когомологии и гомологии. В этом пункте мы приведем определение циклических когомологий и гомологий, играющих роль некоммутативного аналога гомологий и когомологий топологических пространств (по поводу циклических когомологий см. книги [19], [58], [59] и приведенную в них библиографию). Важно отметить, что определение гомологий и когомологий де Рама топологического пространства требует введения на нем дополнительной структуры, например структуры гладкого многообразия. В некоммутативном случае это отражается в том, что циклические коциклы обычно

определяются не на C^* -алгебре, аналоге алгебры непрерывных функций, а на некоторой ее подалгебре, состоящей из “гладких” функций. Мы пока отложим (см. п. 3.4) обсуждение некоммутативного аналога понятия алгебры гладких функций на гладком многообразии – понятия гладкой алгебры, и перейдем к определению циклических когомологий для произвольной алгебры.

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над $\mathbb{C}$. Рассмотрим комплекс $(C^*(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*), b)$, где:

- (i) $C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, $k \in \mathbb{N}$, – пространство $(k+1)$ -линейных форм на $\mathcal{A}$;
- (ii) кограница $b\psi \in C^{k+1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ элемента $\psi \in C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ задается формулой

$$b\psi(a^0, \dots, a^{k+1}) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \psi(a^0, \dots, a^j a^{j+1}, \dots, a^{k+1}) + (-1)^{k+1} \psi(a^{k+1} a^0, \dots, a^k), \quad a^0, a^1, \dots, a^{k+1} \in \mathcal{A}.$$

Когомологии этого комплекса называются когомологиями Хохшильда алгебры $\mathcal{A}$ с коэффициентами в бимодуле $\mathcal{A}^*$ и обозначаются $HH(\mathcal{A})$.

Пусть $C_\lambda^k(\mathcal{A})$ – подпространство пространства $C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, состоящее из всех $\psi \in C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, удовлетворяющих условию цикличности

$$\psi(a^1, \dots, a^k, a^0) = (-1)^k \psi(a^0, a^1, \dots, a^k), \quad a^0, a^1, \dots, a^k \in \mathcal{A}. \quad (3.1)$$

Дифференциал b переводит подпространство $C_\lambda^k(\mathcal{A})$ в $C_\lambda^{k+1}(\mathcal{A})$, и циклические когомологии $HC^*(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ определяются как когомологии комплекса $(C_\lambda^*(\mathcal{A}), b)$.

ПРИМЕР 3.1. При $k = 0$ пространство $HC^0(\mathcal{A})$ совпадает с пространством всех следовых функционалов на $\mathcal{A}$. По этой причине циклические k -коциклы на алгебре $\mathcal{A}$ называются k -следами на $\mathcal{A}$ (при $k > 0$ высшими следами).

ПРИМЕР 3.2. Если $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, то $HC^n(\mathbb{C}) = 0$, если n нечетно, и $HC^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, если n четно. При нечетном n нетривиальный коцикл $\phi \in C_\lambda^n(\mathbb{C})$ задается формулой

$$\phi(a^0, a^1, \dots, a^n) = a^0 a^1 \dots a^n, \quad a^0, a^1, \dots, a^n \in \mathbb{C}.$$

Эквивалентным способом циклические когомологии можно описать при помощи (b, B) -бикомплекса. Определим оператор $B: C^k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*) \rightarrow C^{k-1}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ по формуле

$$B = AB_0, \quad (3.2)$$

где для любых $a^0, a^1, \dots, a^{k-1} \in \mathcal{A}$

$$A\psi(a^0, \dots, a^{k-1}) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{(k-1)j} \psi(a^j, a^{j+1}, \dots, a^{k-1}, a^0, a^1, \dots, a^{j-1}),$$

$$B_0\psi(a^0, \dots, a^{k-1}) = \psi(1, a^0, \dots, a^{k-1}) - (-1)^k \psi(a^0, \dots, a^{k-1}, 1).$$

Имеют место соотношения $B^2 = 0$, $bB = -Bb$.

Рассмотрим следующий двойной комплекс:

$$C^{n,m} = C^{n-m}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*), \quad n, m \in \mathbb{Z},$$

с дифференциалами $d_1: C^{n,m} \rightarrow C^{n+1,m}$ и $d_2: C^{n,m} \rightarrow C^{n,m+1}$, задаваемыми формулами

$$d_1\psi = (n - m + 1)b\psi, \quad d_2\psi = \frac{1}{n - m} B\psi, \quad \psi \in C^{n,m}.$$

Для любого $q \in \mathbb{N}$ рассмотрим комплекс $(F^q C, d)$, где

$$(F^q C)^p = \bigoplus_{\substack{m \geq q \\ n+m=p}} C^{n,m}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad d = d_1 + d_2.$$

Тогда имеет место изоморфизм

$$HC^n(\mathcal{A}) \cong H^p(F^q C), \quad n = p - 2q.$$

Данный изоморфизм ставит в соответствие любому $\psi \in HC^n(\mathcal{A})$ коцикл $\phi \in H^p(F^q C)$ с произвольными фиксированными p и q такими, что $n = p - 2q$, имеющий единственную ненулевую компоненту $\phi_{p,q} = (-1)^{[n/2]}\psi$. В частности, любой коцикл комплекса $(F^q C, d)$ когомологичен коциклу приведенного выше вида.

Определены также периодические циклические когомологии $HP^{\text{ev}}(\mathcal{A})$ и $HP^{\text{odd}}(\mathcal{A})$, которые получаются взятием индуктивного предела групп $HC^k(\mathcal{A})$, $k \geq 0$, по отношению к оператору периодичности $S: HC^k(\mathcal{A}) \rightarrow HC^{k+2}(\mathcal{A})$. Для любого $\psi \in C_\lambda^k(\mathcal{A})$ имеем

$$\begin{aligned} S\psi(a^0, \dots, a^{k+2}) &= -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{j=1}^{k+1} \psi(a^0, \dots, a^{j-1} a^j a^{j+1}, \dots, a^{k+2}) \\ &\quad - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{0 \leq i < j \leq k+1} \psi(a^0, \dots, a^{i-1} a^i, \dots, a^j a^{j+1}, \dots, a^{k+2}). \end{aligned}$$

В терминах двойного (b, B) -комплекса периодические циклические когомологии описываются как когомологии комплекса

$$C^{\text{ev}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{b+B} C^{\text{odd}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{b+B} C^{\text{ev}}(\mathcal{A}),$$

где

$$C^{\text{ev/odd}}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{k \text{ четно/нечетно}} C^k(\mathcal{A}).$$

ПРИМЕР 3.3. Пусть $\mathcal{A}$ – локально выпуклая топологическая алгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на n -мерном компактном многообразии M , и пусть $\mathcal{D}_k(M)$ обозначает пространство k -мерных потоков де Рама на M . Когомологии Хохшильда и циклические когомологии алгебры $\mathcal{A}$ вычислены в работе [14]. Следующее отображение $\varphi \mapsto C_\varphi$ определяет изоморфизм группы непрерывных когомологий Хохшильда $HH^k(\mathcal{A})$ с пространством $\mathcal{D}_k(M)$:

$$\begin{aligned} \langle C_\varphi, f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^k \rangle &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) \varphi(f^0, f^{\sigma(1)}, \dots, f^{\sigma(k)}), \\ f^0, f^1, \dots, f^k &\in C^\infty(M). \end{aligned}$$

Справедливо соотношение $C_{B\varphi} = kd^t C_\varphi$, где d^t – граница де Рама для потоков. Поэтому для любого k группа непрерывных циклических когомологий $HC^k(\mathcal{A})$ канонически изоморфна прямой сумме

$$\text{Ker } d^t \oplus H_{k-2}(M, \mathbb{C}) \oplus H_{k-4}(M, \mathbb{C}) \oplus \dots,$$

где $H_k(M, \mathbb{C})$ обозначает обычные гомологии де Рама. Непрерывные периодические циклические когомологии $HP^{\text{ev/odd}}(\mathcal{A})$ канонически изоморфны гомологиям де Рама

$$H_{\text{ev/odd}}(M, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k \text{ чётно/нечётно}} H_k(M, \mathbb{C}).$$

ПРИМЕР 3.4. Напомним, что (однородным) k -коциклом на дискретной группе Γ называется отображение $h: \Gamma^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющее тождествам

$$\begin{aligned} h(\gamma\gamma_0, \dots, \gamma\gamma_k) &= h(\gamma_0, \dots, \gamma_k), \quad \gamma, \gamma_0, \dots, \gamma_k \in \Gamma; \\ \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i h(\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{k+1}) &= 0, \quad \gamma_0, \dots, \gamma_{k+1} \in \Gamma. \end{aligned}$$

С каждым однородным k -коциклом h можно ассоциировать (неоднородный) k -коцикл $c \in Z^k(\Gamma, \mathbb{C})$ по формуле

$$c(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = h(e, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_1 \cdots \gamma_k).$$

Легко проверить, что c удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} c(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k) + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+1} c(\gamma_0, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \dots, \gamma_k) \\ + (-1)^{k+1} c(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}) = 0. \end{aligned}$$

Скажем, что коцикл $c \in Z^k(\Gamma, \mathbb{C})$ нормализован (в смысле Конна), если $c(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ равняется нулю в случае, когда либо $\gamma_i = e$ при некотором i , либо $\gamma_1 \cdots \gamma_k = e$. Любой класс когомологий $H^k(\Gamma, \mathbb{C})$ можно представить нормализованным коциклом.

Групповое кольцо $\mathbb{C}\Gamma$ состоит из всех функций $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ с конечным носителем. Умножение в $\mathbb{C}\Gamma$ задается операцией свертки

$$f_1 * f_2(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f_1(\gamma_1)f_2(\gamma_2), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Нормализованный коцикл $c \in Z^k(\Gamma, \mathbb{C})$ определяет циклический k -коцикл τ_c на $\mathbb{C}\Gamma$ по формуле

$$\tau_c(f_0, \dots, f_k) = \sum_{\gamma_0 \cdots \gamma_k = e} f_0(\gamma_0) \cdots f_k(\gamma_k) c(\gamma_1, \dots, \gamma_k), \quad f_0, f_1, \dots, f_k \in \mathbb{C}\Gamma.$$

Напомним определение циклических гомологий для алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$. Обозначим через $A^{\otimes, k+1}$ тензорное произведение $k+1$ экземпляров алгебры A и рассмотрим эндоморфизм t пространства $A^{\otimes, k+1}$, задаваемый формулой

$$t(a^0 \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^k) = (-1)^k a^1 \otimes \cdots \otimes a^k \otimes a^0, \quad a^0, a^1, \dots, a^k \in A.$$

Рассмотрим также отображение b из $A^{\otimes, k+1}$ в $A^{\otimes, k}$, определяемое формулой

$$\begin{aligned} b(a^0 \otimes \cdots \otimes a^k) &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j a^0 \otimes \cdots \otimes a^j a^{j+1} \otimes \cdots \otimes a^k \\ &\quad + (-1)^k a^k a^0 \otimes \cdots \otimes a^{k-1}, \quad a^0, a^1, \dots, a^k \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Положим

$$C_k^\lambda(\mathcal{A}) = \frac{A^{\otimes, k+1}}{\text{im}(\text{Id} - t)}.$$

Дифференциал b определяет отображение b из $C_{k+1}^\lambda(\mathcal{A})$ в $C_k^\lambda(\mathcal{A})$, и циклические гомологии $HC_*(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ определяются как гомологии комплекса $(C_*^\lambda(\mathcal{A}), b)$.

Если A – унитарная локально m -выпуклая алгебра Фреше, т.е. унитарная алгебра, являющаяся локально выпуклым топологическим векторным пространством Фреше, в которой операция произведения непрерывна, то группы топологических циклических когомологий $HC^k(A)$ определяются так же, как и выше, с использованием непрерывных $(k+1)$ -линейных функционалов. Аналогично, группы топологических циклических гомологий $HC_k(A)$ определяются так же, как и выше, с использованием пополненных проективных тензорных произведений.

3.2. Некоммутативные дифференциальные формы. Пусть A – унитарная алгебра. Дифференциальной градуированной алгеброй называется градуированная алгебра

$$\Omega_*(A) = \Omega_0(A) \oplus \Omega_1(A) \oplus \Omega_2(A) \oplus \cdots,$$

наделенная линейным дифференцированием d степени 1. Таким образом, для любых j и k имеем $\Omega_j(A)\Omega_k(A) \subset \Omega_{j+k}(A)$. Оператор d определяет отображение

$$d: \Omega_j(A) \rightarrow \Omega_{j+1}(A), \quad j \geq 0,$$

и удовлетворяет условиям $d^2 = 0$ и

$$d(\omega_j \cdot \omega_k) = d\omega_j \cdot \omega_k + (-1)^j \omega_j \cdot d\omega_k, \quad \omega_j \in \Omega_j(A), \quad \omega_k \in \Omega_k(A).$$

Обозначим через $[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]_l$ линейное подпространство, порожденное градуированными коммутаторами $[\omega_j, \omega_k] = \omega_j \cdot \omega_k - (-1)^{jk} \omega_k \cdot \omega_j$, где $j+k=l$ и $\omega_j \in \Omega_j(A)$, $\omega_k \in \Omega_k(A)$. Положим

$$\overline{\Omega_l(A)} = \frac{\Omega_l(A)}{[\Omega_*(A), \Omega_*(A)]_l}.$$

Дифференциал d индуцирует линейный дифференциал, также обозначаемый через d , на градуированном векторном пространстве $\overline{\Omega}_*(A) = \bigoplus_l \overline{\Omega}_l(A)$. Обозначим через $\overline{H}_*(A)$ гомологии этого комплекса и назовем их некоммутативными гомологиями де Рама алгебры $\Omega_*(A)$.

Если A – унитарная локально m -выпуклая алгебра Фреше, то можно определить пополнение $\widehat{\Omega}_*(A)$ алгебры $\Omega_*(A)$, являющееся дифференциальной градуированной алгеброй Фреше. Некоммутативные топологические гомологии де Рама $\widehat{H}_*(A)$ определяются как гомологии комплекса $(\widehat{\Omega}_*(A)/[\widehat{\Omega}_*(A), \widehat{\Omega}_*(A)], d)$.

Примером дифференциальной градуированной алгебры является универсальная дифференциальная градуированная алгебра ΩA унитарной алгебры A . Напомним ее конструкцию. Алгебра ΩA является градуированной алгеброй $\Omega A = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Omega^p A$. В степени 0 пространство $\Omega^0 A$ совпадает с A . В степени 1 пространство $\Omega^1 A$ порождается как левый A -модуль символами степени 1 вида δa , где $a \in A$, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned}\delta(ab) &= \delta(a)b + a\delta(b), & a, b \in A, \\ \delta(\alpha a + \beta b) &= \alpha\delta(a) + \beta\delta(b), & a, b \in A, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

В частности, имеем $\delta(1) = 0$. Тем самым, общий элемент пространства $\Omega^1 A$ имеет вид $a = \sum_i a_i \delta b_i$, где $a_i, b_i \in A$.

Алгебра ΩA порождается как алгебра элементами пространства $\Omega^1 A$. В частности, имеем

$$(a_0 \delta a_1)(b_0 \delta b_1) = a_0 \delta(a_1 b_0) \delta b_1 - a_0 a_1 \delta b_0 \delta b_1.$$

Поэтому произвольный элемент алгебры ΩA представим в виде конечной линейной комбинации элементов вида $a_0 \delta a_1 \delta a_2 \cdots \delta a_p$ с некоторыми $a_0, a_1, a_2, \dots, a_p \in A$. Умножение слева и справа на элементы из $\Omega^0 A = A$ задает структуру A - A -бимодуля на ΩA .

Дифференциал $\delta: \Omega^p A \rightarrow \Omega^{p+1} A$ корректно определяется по формуле

$$\delta(a_0 \delta a_1 \delta a_2 \cdots \delta a_p) = \delta a_0 \delta a_1 \delta a_2 \cdots \delta a_p, \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_p \in A.$$

Если алгебра A имеет инволюцию $a \mapsto a^*$, то алгебра ΩA также имеет естественную структуру инволютивной алгебры.

Некоммутативные гомологии де Рама универсальной обертывающей алгебры ΩA называются некоммутативными гомологиями де Рама алгебры A и обозначаются $HDR_*(A)$. Они тесно связаны с циклическими гомологиями $HC_*(A)$ алгебры A . А именно, при $n > 0$ некоммутативные гомологии де Рама $HDR_n(A)$ совпадают с ядром оператора $B: \overline{HC}_n(A) \rightarrow \overline{HH}_{n+1}(A)$ (см. (3.2)). Здесь $\overline{HC}_n(A)$ и $\overline{HH}_{n+1}(A)$ обозначают приведенные циклические гомологии и приведенные гомологии Хохшильда соответственно (см. более подробную информацию в [58], [59]).

Использование дифференциальных градуированных алгебр позволяет дать общую конструкцию циклических коциклов на произвольной алгебре [14]. Назовем циклом размерности n тройку (Ω, d, f) , где $(\Omega = \bigoplus_{j=0}^n \Omega^j, d)$ – дифференциальная градуированная алгебра и f – замкнутый градуированный след на дифференциальной градуированной алгебре (Ω, d) степени n . Здесь под замкнутым градуированным следом степени n понимается линейный функционал $f: \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\int \omega_2 \omega_1 = (-1)^{jk} \int \omega_1 \omega_2$ для $\omega_1 \in \Omega^j$, $\omega_2 \in \Omega^k$;
- 2) $\int d\omega = 0$ для $\omega \in \Omega^{n-1}$.

Пусть A – алгебра над $\mathbb{C}$. Циклом над алгеброй A называется цикл $(\Omega, d, \int)$ вместе с гомоморфизмом $\rho: A \rightarrow \Omega^0$. Для любого цикла $(A \xrightarrow{\rho} \Omega, d, \int)$ над алгеброй A определен его характер, задаваемый формулой

$$\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int \rho(a_0) d(\rho(a_1)) \cdots d(\rho(a_n)), \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

Легко проверяется, что τ – циклический коцикл на алгебре A . Более того, можно показать, что всякий циклический коцикл на алгебре A является характером некоторого цикла над A .

ПРИМЕР 3.5. Пусть M – гладкое многообразие без края. Рассмотрим градуированную алгебру Ω гладких дифференциальных форм на M : $\Omega = \bigoplus_{p=0}^n \Omega^p$, где $\Omega^p = C_c^\infty(M, \wedge^p T^*M \otimes \mathbb{C})$. Дифференциал де Рама d превращает Ω в дифференциальную градуированную алгебру. Наконец, линейный функционал $I(\omega) = \int_M \omega$ является замкнутым градуированным следом степени n на Ω . Соответствующий циклический коцикл на алгебре $C_c^\infty(M)$ задается формулой

$$\tau(f^0, f^1, \dots, f^n) = \int_M f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^n, \quad f^0, f^1, \dots, f^n \in C_c^\infty(M).$$

Более того, любой замкнутый k -мерный поток де Рама $C \in \mathcal{D}_k(M)$ на M определяет замкнутый градуированный след степени k на Ω :

$$I_C(\omega) = \langle C, \omega \rangle, \quad \omega \in \Omega^k.$$

Характер цикла (ω, d, I_C) над алгеброй $C_c^\infty(M)$ совпадает с циклическим коциклом на $C_c^\infty(M)$, задаваемым формулой

$$\psi_C(f^0, f^1, \dots, f^k) = \langle C, f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^k \rangle, \quad f^0, f^1, \dots, f^k \in C_c^\infty(M). \quad (3.3)$$

ПРИМЕР 3.6. Пусть Γ – дискретная группа. Универсальная дифференциальная градуированная алгебра $\Omega^*(\Gamma) = \Omega \text{СГ}$ групповой алгебры СГ состоит из конечных линейных комбинаций символов вида $\gamma_0 d\gamma_1 \cdots d\gamma_n$ с некоторыми $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$. Любой нормализованный коцикл $c \in Z^k(\Gamma, \mathbb{C})$ (см. пример 3.4) определяет замкнутый градуированный след на $\Omega^*(\Gamma)$ по формуле

$$\int \gamma_0 d\gamma_1 \cdots d\gamma_n = \begin{cases} c(\gamma_1, \dots, \gamma_k), & \text{если } n = k \text{ и } \gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_n = e, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Характер данного цикла совпадает с циклическим коциклом τ_c .

3.3. Некоммутативная конструкция Черна–Вейля. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра над $\mathbb{C}$. Характер Черна в K -гомологиях был построен в работе [58] как отображение $\text{ch}: K_0(A) \rightarrow \text{HDR}_{\text{ev}}(\mathcal{A})$. Эта конструкция является прямым обобщением классической конструкции Черна–Вейля и использует понятие связности и кривизны для конечно порожденных проективных $\mathcal{A}$ -модулей.

В когомологической постановке некоммутативный аналог конструкции Черна–Вейля [14] состоит в конструкции спаривания между $HC^*(\mathcal{A})$ и $K_*(\mathcal{A})$ для произвольной алгебры $\mathcal{A}$.

Спаривание между $HC^{\text{ev}}(\mathcal{A})$ и $K_0(\mathcal{A})$ определяется следующим образом. Для любого коцикла $\varphi = (\varphi_{2k})$ в $C^{\text{ev}}(\mathcal{A})$ и для любого идемпотента e в $M_q(\mathcal{A})$ положим

$$\langle [\varphi], [e] \rangle = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} \varphi_{2k} \# \text{Tr} \left(e - \frac{1}{2}, e, \dots, e \right), \quad (3.4)$$

где $\varphi_{2k} \# \text{Tr} - (2k+1)$ -линейное отображение на $M_q(\mathcal{A}) = M_q(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}$, задаваемое формулой

$$\varphi_{2k} \# \text{Tr}(\mu^0 \otimes a^0, \dots, \mu^{2k} \otimes a^{2k}) = \text{Tr}(\mu^0 \cdots \mu^{2k}) \varphi_{2k}(a^0, \dots, a^{2k}) \quad (3.5)$$

для любых $\mu^j \in M_q(\mathbb{C})$ и $a^j \in \mathcal{A}$.

Спаривание между $HC^{\text{odd}}(\mathcal{A})$ и $K_1(\mathcal{A})$ задается формулой

$$\langle [\varphi], [U] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2i\pi}} \sum_{k \geq 0} (-1)^k k! \varphi_{2k+1} \# \text{Tr}(U^{-1} - 1, U - 1, \dots, U^{-1} - 1, U - 1), \quad (3.6)$$

где $\varphi = (\varphi_{2k+1}) \in C^{\text{odd}}(\mathcal{A})$ и $U \in U_q(\mathcal{A})$.

Важную роль в теории индекса играет тот факт, что отображения индекса (2.1) и (2.2), ассоциированные с фредгольмовым модулем (H, F) , удовлетворяющим дополнительному условию p -суммируемости, можно вычислить в терминах спаривания элементов группы $K^*(\mathcal{A})$ с некоторым классом циклических когомологий $\tau = \text{ch}_*(H, F) \in HC^n(\mathcal{A})$, называемым характером Черна фредгольмова модуля (H, F) [14].

Напомним, что для любого $p \geq 1$ класс Шаттена $\mathcal{L}^p(H)$ состоит из всех компактных операторов T в гильбертовом пространстве H , для которых оператор $|T|^p$ является ядерным оператором. Пусть $\mu_1(T) \geq \mu_2(T) \geq \dots$ – сингулярные числа (s -числа) компактного оператора T в H , т.е. собственные числа оператора $|T| = \sqrt{T^*T}$, взятые с учетом кратности. Тогда

$$T \in \mathcal{L}^p(H) \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr} |T|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(T)|^p < \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Фредгольмов модуль (H, F) над алгеброй $\mathcal{A}$ называется p -суммируемым, если $(F^2 - 1)\rho(a)$, $(F - F^*)\rho(a)$ и $[F, \rho(a)]$ принадлежат $\mathcal{L}^p(H)$ для любого $a \in \mathcal{A}$.

Пусть (H, F) – фредгольмов модуль над алгеброй $\mathcal{A}$. Будем предполагать, что модуль является $(p+1)$ -суммируемым и четным, если p четно. Он определяет цикл над алгеброй $\mathcal{A}$ следующим образом. Прежде всего, можно считать, без потери общности, что $F^2 = 1$. Построим градуированную алгебру $\Omega = \bigoplus_{j=0}^n \Omega^j$. При $k = 0$ положим $\Omega^0 = \mathcal{A}$. При $k > 0$ пространство Ω^k является линейной оболочкой ограниченных операторов в H вида $\Omega = a^0[F, a^1] \cdots [F, a^k]$, где $a^0, a^1, \dots, a^k \in \mathcal{A}$. Произведение в Ω задается произведением операторов. Дифференциал $d: \Omega \rightarrow \Omega$ определяется по формуле

$$d\omega = F\omega - (-1)^k \omega F, \quad \omega \in \Omega^k.$$

Определим замкнутый градуированный след $\mathrm{Tr}_s: \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n > p$. Для любого оператора T в H такого, что $FT + TF \in \mathcal{L}^1(H)$, положим

$$\mathrm{Tr}'(T) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(F(FT + TF)).$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}'(T) = \mathrm{Tr}(T)$, если $T \in \mathcal{L}^1(H)$. Для любого $\omega \in \Omega^n$ положим $\mathrm{Tr}_s \omega = \mathrm{Tr}'(\omega)$, если n нечетно, и $\mathrm{Tr}_s \omega = \mathrm{Tr}'(\gamma\omega)$, если n четно, где γ обозначает оператор градуировки в H . Характер τ_n описанного выше цикла называется характером Черна фредгольмова модуля (H, F) . При условии $F^2 = 1$ в нечетном случае τ_n задается формулой

$$\tau_n(a^0, a^1, \dots, a^n) = \lambda_n \mathrm{tr}(a^0[F, a^1] \cdots [F, a^n]), \quad a^0, a^1, \dots, a^n \in \mathcal{A}, \quad (3.7)$$

где n – нечетное число, $n > p$, λ_n – некоторые постоянные, зависящие только от n . В четном случае τ_n задается формулой

$$\tau_n(a^0, a^1, \dots, a^n) = \lambda_n \mathrm{tr}(\gamma a^0[F, a^1] \cdots [F, a^n]), \quad a^0, a^1, \dots, a^n \in \mathcal{A}, \quad (3.8)$$

где n – четное число, $n > p$, λ_n – некоторые постоянные, зависящие только от n .

При различных $n > p$ характеры τ_n согласованы в том смысле, что имеет место соотношение $S\tau_n = \tau_{n+2}$. Поэтому корректно определен класс $\tau = \mathrm{ch}_*(H, F) \in HP^*(\mathcal{A})$ в периодических циклических когомологиях алгебры $\mathcal{A}$.

3.4. Гладкие алгебры. В этом пункте мы приведем общие факты о гладких подалгебрах C^* -алгебр, которые являются некоммутативным аналогом алгебры гладких функций на гладком многообразии. Пусть A – C^* -алгебра и A^+ – алгебра, получаемая присоединением единицы к A . Пусть $\mathcal{A}$ – $*$ -подалгебра алгебры A и $\mathcal{A}^+$ – алгебра, получаемая присоединением единицы к $\mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Скажем, что $\mathcal{A}$ – гладкая подалгебра алгебры A , если $\mathcal{A}$ – плотная $*$ -подалгебра C^* -алгебры A , инвариантная при голоморфном функциональном исчислении, т. е. для любого $a \in \mathcal{A}^+$ и для любой функции f , голоморфной в окрестности спектра элемента a (рассматриваемого как элемент алгебры A^+), $f(a) \in \mathcal{A}^+$.

Предположим, что $\mathcal{A}$ – плотная $*$ -подалгебра C^* -алгебры A , наделенная структурой алгебры Фреше, топология которой слабее, чем топология, индуцированная топологией алгебры A . Необходимое и достаточное условие того, чтобы алгебра $\mathcal{A}$ являлась гладкой алгеброй, дается условием спектральной инвариантности (см. [60; лемма 1.2]):

- $\mathcal{A}^+ \cap GL(A^+) = GL(\mathcal{A}^+)$, где $GL(\mathcal{A}^+)$ и $GL(A^+)$ обозначают соответственно группу обратимых элементов в $\mathcal{A}^+$ и A^+ .

Этот факт остается верным, если $\mathcal{A}$ – такая локально мультипликативно выпуклая алгебра Фреше (т. е. ее топология задается счетным семейством субмультипликативных полунорм), что группа обратимых элементов $GL(\mathcal{A}^+)$ открыта [60; лемма 1.2].

Если $\mathcal{A}$ – гладкая подалгебра C^* -алгебры A , то для любого n алгебра $M_n(\mathcal{A})$ является гладкой подалгеброй C^* -алгебры $M_n(A)$. В частности, $GL_n(\mathcal{A}^+)$ совпадает с пересечением $M_n(\mathcal{A}^+) \cap GL_n(A^+)$. Будем рассматривать $GL_n(\mathcal{A}^+)$

как топологическую группу, наделенную индуцированной топологией пространства $GL_n(A^+)$. Обозначим через $GL_\infty(\mathcal{A}^+)$ индуктивный предел топологических групп $GL_n(\mathcal{A}^+)$.

Одно из важнейших свойств гладких подалгебр состоит в следующем факте – аналоге сглаживания в операторной K -теории (см. [61; раздел VI.3], [62]).

ТЕОРЕМА 3.9. *Если $\mathcal{A}$ – гладкая подалгебра C^* -алгебры A , то вложение $\mathcal{A} \hookrightarrow A$ индуцирует изоморфизмы*

$$K_0(\mathcal{A}) \cong K_0(A) \quad \text{и} \quad \pi_n(GL_\infty(\mathcal{A}^+)) \rightarrow \pi_n(GL_\infty(A^+)) = K_{n+1}(A).$$

Для любого p -суммируемого фредгольмова модуля (H, F) над алгеброй $\mathcal{A}$ алгебра

$$\mathcal{C} = \{T \in \overline{\mathcal{A}} : [F, T] \in \mathcal{L}^p(H)\},$$

где $\overline{\mathcal{A}}$ обозначает равномерное замыкание алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{L}(H)$, является гладкой подалгеброй C^* -алгебры $\overline{\mathcal{A}}$. Более того, можно показать, что коцикл τ_n на алгебре $\mathcal{A}$, определяемый формулами (3.7) и (3.8), продолжается по непрерывности до циклического коцикла на алгебре $\mathcal{C}$. Этот факт, наряду с теоремой 3.9, позволяют утверждать, что спаривание с классом $\text{ch}_*(H, F) \in HC^n(\mathcal{A})$ определяет отображение $K_*(\overline{\mathcal{A}}) \cong K_*(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Этот факт называется свойством топологической инвариантности характера Черна $\text{ch}_*(H, F)$ фредгольмова модуля (H, F) .

3.5. Некоммутативная риманова геометрия. Согласно [63], [64], исходными данными некоммутативной римановой геометрии является спектральная тройка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Спектральной тройкой называется набор $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, где:

- 1) $\mathcal{A}$ – инволютивная алгебра;
- 2) $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, снабженное $*$ -представлением алгебры $\mathcal{A}$;
- 3) D – такой (неограниченный) самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, что
 - (i) для любого $a \in \mathcal{A}$ оператор $a(D - i)^{-1}$ является компактным оператором в $\mathcal{H}$;
 - (ii) D почти коммутирует с элементами алгебры $\mathcal{A}$ в том смысле, что оператор $[D, a]$ ограничен для любого $a \in \mathcal{A}$.

Спектральная тройка называется четной, если пространство $\mathcal{H}$ наделено $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$, причем $\gamma D = -D\gamma$ и $\gamma a = a\gamma$ для любого $a \in \mathcal{A}$. В противном случае спектральная тройка называется нечетной.

Спектральные тройки впервые рассматривались в работе [65], где они назывались неограниченными фредгольмовыми модулями. Спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ определяет фредгольмов модуль $(\mathcal{H}, F)$ над алгеброй $\mathcal{A}$, где $F = D(I + D^2)^{-1/2}$ [65]. Можно считать, что в некотором смысле оператор F связан с измерением углов и отвечает за конформную структуру, в то время как $|D|$ связан с измерением длин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ называется p -суммируемой (или p -мерной), если для любого $a \in \mathcal{A}$ оператор $a(D - i)^{-1}$ является элементом класса Шаттена $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$.

Спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ называется конечномерной, если она p -суммируема при некотором p .

Точная нижняя грань тех p , при которых конечномерная спектральная тройка является p -суммируемой, называется размерностью спектральной тройки.

Размерность спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ совпадает с размерностью соответствующего фредгольмова модуля $(\mathcal{H}, F)$, $F = D(I + D^2)^{-1/2}$, над алгеброй $\mathcal{A}$ [65].

Классической римановой геометрии соответствует спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, ассоциированная с компактным спинорным римановым многообразием (M, g) :

- 1) инволютивная алгебра $\mathcal{A}$ – алгебра $C^\infty(M)$ гладких функций на M ;
- 2) гильбертово пространство $\mathcal{H}$ – пространство $L^2(M, F(TM))$, на котором алгебра $\mathcal{A}$ действует при помощи умножения;
- 3) оператор D – спинорный оператор Дирака.

Из асимптотической формулы Вейля для собственных значений самосопряженных эллиптических операторов на компактном многообразии немедленно вытекает, что данная спектральная тройка конечномерна и ее размерность совпадает с размерностью многообразия M .

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – спектральная тройка. Предположим, для простоты, что алгебра $\mathcal{A}$ имеет единицу. Рассмотрим оператор $|D| = (D^2)^{1/2}$. Обозначим через δ (неограниченное) дифференцирование на алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, задаваемое формулой

$$\delta(T) = [|D|, T], \quad T \in \text{Dom } \delta \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (3.9)$$

Для любого $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ через $\delta^i(T)$ обозначим i -й коммутатор с $|D|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.12. Пространство OP^0 состоит из всех $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ таких, что $\delta^i(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ для любого $i \in \mathbb{N}$:

$$\text{OP}^0 = \bigcap_n \text{Dom } \delta^n.$$

Пространство OP^0 является гладкой подалгеброй C^* -алгебры $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (см., например, [66; теорема 1.2]). Равномерное замыкание $\overline{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ можно рассматривать как алгебру непрерывных функций на некотором виртуальном топологическом пространстве. В некотором смысле алгебра $\text{OP}^0 \cap \overline{\mathcal{A}}$ состоит из функций на данном пространстве, бесконечно дифференцируемых в квантовом смысле. Для спектральной тройки, ассоциированной с компактным римановым многообразием, алгебра $\text{OP}^0 \cap C(M)$ содержит алгебру $C^\infty(M)$. Мы отсылаем читателя к работе [67] по поводу задачи восстановления гладкой структуры многообразия M по ассоциированной с ним спектральной тройке $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.

Напомним, что риманова форма объема $d\nu$, ассоциированная с римановой метрикой g , задается в локальных координатах формулой $d\nu = \sqrt{\det g} \, dx$. Для

того чтобы определить ее некоммутативный аналог, используется след Tr_ω , введенный Диксмье в работе [68] в качестве примера нестандартного следа на алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Рассмотрим идеал $\mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H})$ в алгебре компактных операторов $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, состоящий из всех таких $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, что

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \mu_n(T) < \infty,$$

где $\mu_1(T) \geq \mu_2(T) \geq \dots$ – сингулярные числа оператора T . По каждому инвариантному среднему ω на аменабельной группе верхнетреугольных (2×2) -матриц Диксмье построил линейную форму $\lim_\omega$ на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\lim_\omega$ совпадает с функционалом взятия предела $\lim$ на подпространстве сходящихся последовательностей,
- 2) $\lim_\omega \{c_n\} \geq 0$, если $c_n \geq 0$ для любого n ,
- 3) $\lim_\omega \{c'_n\} = \lim_\omega \{c_n\}$, где $\{c'_n\} = \{c_1, c_1, c_2, c_2, c_3, c_3, \dots\}$,
- 4) $\lim_\omega \{c_{2n}\} = \lim_\omega \{c_n\}$.

Для положительного оператора $T \in \mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H})$ значение Tr_ω на T определяется формулой

$$\text{Tr}_\omega(T) = \lim_\omega \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^N \mu_n(T).$$

Пусть M – n -мерное компактное многообразие, E – векторное расслоение на M и $P \in \Psi^m(M, E)$ – классический псевдодифференциальный оператор. Тем самым, в любой локальной системе координат его полный символ p представим в виде асимптотической суммы $p \sim p_m + p_{m-1} + \dots$, где $p_l(x, \xi)$ – однородная функция степени l по ξ . Как показано в [69], след Диксмье $\text{Tr}_\omega(P)$ не зависит от выбора ω и совпадает со значением $\tau(P)$ следа τ на алгебре $\Psi^*(M, E)$ классических псевдодифференциальных операторов произвольного порядка, введенного Водзицким [70] и Гийемином [71]. След τ определяется следующим образом. Для оператора $P \in \Psi^*(M, E)$ определим в локальных координатах плотность ρ_P по формуле

$$\rho_P = \left(\int_{|\xi|=1} \text{Tr } p_{-n}(x, \xi) d\xi \right) |dx|.$$

Оказывается, что ρ_P не зависит от выбора локальной системы координат и, тем самым, корректно определяет плотность на M . Интеграл плотности ρ_P по M определяет значение следа Водзицкого–Гийемина:

$$\tau(P) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \rho_P = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S^*M} \text{Tr } p_{-n}(x, \xi) dx d\xi. \quad (3.10)$$

Водзицкий [70] показал, что τ является единственным следом на $\Psi^*(M, E)$.

Согласно [69] (см. также [20]), любой оператор $P \in \Psi^{-n}(M, E)$ принадлежит идеалу $\mathcal{L}^{1+}(L^2(M, E))$ и для любого инвариантного среднего ω

$$\text{Tr}_\omega(P) = \tau(P).$$

Из приведенных выше результатов следует формула

$$\int_M f \, d\nu = c(n) \operatorname{Tr}_\omega(f|D|^{-n}), \quad f \in \mathcal{A},$$

где $c(n) = 2^{n-[n/2]} \pi^{n/2} \Gamma(n/2 + 1)$. Таким образом, след Диксмье Tr_ω можно рассматривать как корректное некоммутативное обобщение интеграла.

3.6. Некоммутативная локальная теорема об индексе. Если смотреть на геометрическое пространство как на объединение частей различных размерностей, понятие размерности для соответствующей спектральной тройки, введенное в определении 3.11, дает только максимум размерностей частей данного пространства. Для того чтобы учесть части меньшей размерности, Конн и Московичи [63], [64] предложили в качестве более правильного понятия размерности гладкой спектральной тройки рассматривать не одно вещественное число d , а подмножество $\operatorname{Sd} \subset \mathbb{C}$, которое называется ее спектром размерностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.13. Спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ называется гладкой, если для любого $a \in \mathcal{A}$ имеют место включения $a, [D, a] \in \operatorname{OP}^0$.

Спектральная тройка, ассоциированная с гладким римановым многообразием M , является гладкой. Условие гладкости спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ можно понимать в том смысле, что алгебра $\mathcal{A}$ состоит из гладких (в квантовом смысле) функций на соответствующем некоммутативном пространстве (см. комментарии после определения 3.12).

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – гладкая спектральная тройка. Обозначим через $\mathcal{B}$ алгебру, порожденную всеми элементами вида $\delta^n(a)$, где $a \in \mathcal{A}$ и $n \in \mathbb{N}$. Тем самым, $\mathcal{B}$ является наименьшей подалгеброй в OP^0 , содержащей алгебру $\mathcal{A}$ и инвариантной при действии δ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.14. Спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ имеет дискретный спектр размерностей $\operatorname{Sd} \subset \mathbb{C}$, если Sd – дискретное подмножество в $\mathbb{C}$, тройка является гладкой и для любого $b \in \mathcal{B}$ обобщенная дзета-функция $\zeta_b(z)$ оператора $|D|$, задаваемая формулой

$$\zeta_b(z) = \operatorname{tr} b |D|^{-z},$$

определена в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > d\}$ и продолжается до голоморфной функции на $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sd}$.

Скажем, что спектр размерностей является простым, если особенности функции $\zeta_b(z)$ в точках $z \in \operatorname{Sd}$ являются не более чем простыми полюсами.

ПРИМЕР 3.15. Пусть M – компактное многообразие размерности n , E – векторное расслоение на M и $D \in \Psi^1(M, E)$ – самосопряженный эллиптический оператор. Тогда тройка $(C^\infty(M), L^2(M, E), D)$ является гладкой n -мерной спектральной тройкой. Алгебра $\mathcal{B}$ содержится в алгебре $\Psi^0(M, E)$ классических псевдодифференциальных операторов порядка 0. Для любого классического псевдодифференциального оператора $P \in \Psi^m(M, E)$, $m \in \mathbb{Z}$, функция $z \mapsto \operatorname{tr} P |D|^{-z}$ имеет мероморфное продолжение на $\mathbb{C}$ с не более чем простыми полюсами в целых точках k , $k \leq m + n$. Вычет этой функции при $z = 0$

совпадает со следом Водзицкого–Гийемина $\tau(P)$ оператора P (см. (3.10)):

$$\operatorname{res}_{z=0} \operatorname{tr} P |D|^{-z} = \tau(P). \quad (3.11)$$

В частности, данная спектральная тройка имеет простой дискретный спектр размерностей, содержащийся в множестве $\{k \in \mathbb{Z} : k \leq n\}$.

В работах [63], [64] дано определение алгебры $\Psi^*(\mathcal{A})$ псевдодифференциальных операторов, ассоциированной с гладкой спектральной тройкой $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, в случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ унитарна. Согласно спектральной теореме, при любом $s \in \mathbb{R}$ оператор $|D|^s$ является корректно определенным положительным самосопряженным оператором в пространстве $\mathcal{H}$, который неограничен при $s > 0$. Для любого $s \geq 0$ обозначим через $\mathcal{H}^s$ область определения оператора $\langle D \rangle^s$ и при $s < 0$ положим $\mathcal{H}^s = (\mathcal{H}^{-s})^*$. Пусть также $\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{s \geq 0} \mathcal{H}^s$, $\mathcal{H}^{-\infty} = (\mathcal{H}^\infty)^*$. Скажем, что ограниченный оператор P в пространстве $\mathcal{H}^\infty$ принадлежит классу OP^α , если $P \langle D \rangle^{-\alpha} \in \operatorname{OP}^0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.16. Скажем, что оператор $P: \mathcal{H}^\infty \rightarrow \mathcal{H}^{-\infty}$ принадлежит классу $\Psi^*(\mathcal{A})$, если он допускает асимптотическое разложение

$$P \sim \sum_{j=0}^{+\infty} b_{q-j} |D|^{q-j}, \quad b_{q-j} \in \mathcal{B},$$

что означает, что для любого N

$$P - (b_q |D|^q + b_{q-1} |D|^{q-1} + \dots + b_{-N} |D|^{-N}) \in \operatorname{OP}^{-N-1}.$$

В [63; приложение В] доказано, что $\Psi^*(\mathcal{A})$ является алгеброй. Для спектральной тройки $(C^\infty(M), L^2(M, E), D)$, описанной в примере 3.15, алгебра $\Psi^*(\mathcal{A})$ содержится в $\Psi^*(M, E)$.

Напомним, что спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ определяет фредгольмов модуль $(\mathcal{H}, F)$ над алгеброй $\mathcal{A}$, где $F = D(I + D^2)^{1/2}$, и, тем самым, отображение индекса $\operatorname{Ind}: K_*(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ (см. формулы (2.1) и (2.2)). Выше были приведены выражения для этого отображения в терминах спаривания с некоторым классом циклических кохомологий $\operatorname{ch}_*(\mathcal{H}, F) \in HP^*(\mathcal{A})$, характером Черна фредгольмова модуля $(\mathcal{H}, F)$ (см. формулы (3.7) и (3.8)). Будем называть класс $\operatorname{ch}_*(\mathcal{H}, F)$ характером Черна спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ и обозначать его через $\operatorname{ch}_*(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. Недостаток формул (3.7) и (3.8) состоит в том, что в них отображение Ind выражается в терминах операторных следов. В классическом случае эти следы являются нелокальными функционалами и их нельзя вычислить в координатных картах. Чтобы исправить этот недостаток, Конн и Московичи доказали другую формулу для отображения индекса, в которую входят функционалы типа следа Водзицкого–Гийемина. Эти функционалы являются локальными в смысле некоммутативной геометрии, поскольку они обращаются в нуль на любом ядерном операторе в $\mathcal{H}$. Поэтому формулу Конна–Московичи естественно назвать некоммутативной локальной теоремой об индексе.

Предположим, что спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является гладкой и, для простоты, имеет простой дискретный спектр размерностей. Определим некоммутативный интеграл, определяемый данной спектральной тройкой, полагая

$$\oint b = \operatorname{res}_{z=0} \operatorname{tr} b |D|^{-z}, \quad b \in \mathcal{B}. \quad (3.12)$$

Функционал $\oint$ является следом на алгебре $\mathcal{B}$, который локализован в смысле некоммутативной геометрии.

ТЕОРЕМА 3.17 [63; теорема II.3]. *Предположим, что $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – четная спектральная тройка, которая p -суммируема и имеет простой дискретный спектр размерностей. Тогда:*

1) *следующие формулы определяют четный коцикл $\varphi_{\text{CM}}^{\text{ev}} = (\varphi_{2k})$ в (b, B) -бикомплексе алгебры $\mathcal{A}$: при $k = 0$*

$$\varphi_0(a^0) = \operatorname{res}_{z=0} z^{-1} \operatorname{tr} \gamma a^0 |D|^{-z},$$

в то время как при $k \neq 0$

$$\varphi_{2k}(a^0, \dots, a^{2k}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{k,\alpha} \oint \gamma a^0 [D, a^1]^{[\alpha_1]} \dots [D, a^{2k}]^{[\alpha_{2k}]} |D|^{-2(|\alpha|+k)},$$

где

$$c_{k,\alpha} = \frac{(-1)^{|\alpha|} \cdot 2\Gamma(|\alpha| + k)}{\alpha! (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1 + \dots + \alpha_{2k} + 2k)}$$

и символ $T^{[j]}$ обозначает j -кратный коммутатор с D^2 ;

2) *класс когомологий, определяемый коциклом $\varphi_{\text{CM}}^{\text{ev}}$ в $HP^{\text{ev}}(\mathcal{A})$, совпадает с характером Черна $\operatorname{ch}_*(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.*

ТЕОРЕМА 3.18 [63; теорема II.2]. *Предположим, что $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – спектральная тройка, которая p -суммируема и имеет простой дискретный спектр размерностей. Тогда:*

1) *определен нечетный коцикл $\varphi_{\text{CM}}^{\text{odd}} = (\varphi_{2k+1})$ в (b, B) -бикомплексе алгебры $\mathcal{A}$, задаваемый формулой*

$$\begin{aligned} \varphi_{2k+1}(a^0, \dots, a^{2k+1}) \\ = \sqrt{2i\pi} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{k,\alpha} \oint a^0 [D, a^1]^{[\alpha_1]} \dots [D, a^{2k+1}]^{[\alpha_{2k+1}]} |D|^{-2(|\alpha|+k)-1}, \end{aligned}$$

где

$$c_{k,\alpha} = \frac{(-1)^{|\alpha|} \Gamma(|\alpha| + k + 1/2)}{\alpha! (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_1 + \dots + \alpha_{2k+1} + 2k + 1)};$$

2) *класс когомологий, определяемый коциклом $\varphi_{\text{CM}}^{\text{odd}}$ в $HP^{\text{odd}}(\mathcal{A})$, совпадает с характером Черна $\operatorname{ch}_*(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$.*

ПРИМЕР 3.19. Пусть M – компактное многообразие размерности n и D – самосопряженный эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка 1 на M , действующий на сечениях векторного расслоения E на M . Тогда некоммутативный интеграл $\oint$, определяемый спектральной тройкой $(C^\infty(M), L^2(M, E), D)$, совпадает с следом Водзицкого–Гийемина τ (см. (3.10) и пример 3.15).

В случае, когда D – спинорный оператор Дирака на компактном спинорном римановом многообразии M , в теореме 3.17 для любых $f^0, f^1, \dots, f^m \in C^\infty(M)$ при $|\alpha| \neq 0$ имеем

$$\tau(\gamma f^0 [D, f^1]^{[\alpha_1]} \dots [D, f^m]^{[\alpha_m]} |D|^{-(2|\alpha|+m)}) = 0$$

и при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2k} = 0$

$$\tau(\gamma f^0 [D, f^1] \dots [D, f^m] |D|^{-m}) = c_m \int_M f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^m \wedge \widehat{A}(TM, \nabla),$$

где c_m – некоторая постоянная.

Если размерность многообразия M четна, то спектральная тройка четна и компоненты соответствующего четного коцикла $\varphi_{\text{CM}}^{\text{ev}} = (\varphi_{2k})$ задаются формулами

$$\varphi_{2k}(f^0, \dots, f^{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \int_M f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^{2k} \wedge \widehat{A}(TM, \nabla)^{(n-2k)},$$

где $f^0, f^1, \dots, f^{2k} \in C^\infty(M)$.

Если размерность многообразия M нечетна, то спектральная тройка нечетна и компоненты соответствующего нечетного коцикла $\varphi_{\text{CM}}^{\text{odd}} = (\varphi_{2k+1})$ задаются формулами

$$\begin{aligned} \varphi_{2k+1}(f^0, \dots, f^{2k}) &= \sqrt{2i\pi} \frac{(2i\pi)^{-[n/2]+1}}{(2k+1)!} \\ &\times \int_M f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^{2k+1} \wedge \widehat{A}(TM, \nabla)^{(n-2k-1)}, \end{aligned}$$

где $f^0, f^1, \dots, f^{2k+1} \in C^\infty(M)$.

3.7. Полукопечные спектральные тройки. Исследования задач теории индекса в различных ситуациях, таких, как измеримые слоения, накрытия Галуа, почти периодические операторы, послужили мотивировкой для распространения методов некоммутативной геометрии на случай, когда алгебра ограниченных операторов в гильбертовом пространстве заменяется на произвольную полукопечную алгебру фон Неймана. В данном пункте мы приведем некоторые сведения из полукопечной некоммутативной геометрии (по поводу дальнейшей информации см., например, обзор [72] и имеющуюся в нем библиографию).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.20. Полукопечной спектральной тройкой называется набор $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, где:

- 1) $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство;
- 2) $\mathcal{A}$ – инволютивная подалгебра полуконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{N}$, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;
- 3) D – такой (неограниченный) самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, присоединенный к $\mathcal{N}$, что
 - (i) оператор $(D - i)^{-1}$ является τ -компактным оператором в $\mathcal{N}$ (относительно некоторого точного, нормального полуконечного следа τ на $\mathcal{N}$);
 - (ii) оператор $[D, a]$ является ограниченным оператором, принадлежащим $\mathcal{N}$, для любого $a \in \mathcal{A}$.

Спектральная тройка называется четной, если пространство $\mathcal{H}$ наделено $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$, причем $\gamma D = -D\gamma$ и $\gamma a = a\gamma$ для любого $a \in \mathcal{A}$. В противном случае спектральная тройка называется нечетной.

Для элемента $S \in \mathcal{N}$ его t -е обобщенное сингулярное число ($t \in \mathbb{R}$) задается формулой

$$\mu_t(S) = \inf\{\|SE\| \mid E - \text{проектор в } \mathcal{N} \text{ с } \tau(1 - E) \leq t\}.$$

Пространство $\mathcal{L}^{(1,\infty)}(\mathcal{N})$ состоит из таких элементов $T \in \mathcal{N}$, что

$$\|T\|_{\mathcal{L}^{(1,\infty)}} = \sup_{t>1} \frac{1}{\log(1+t)} \int_0^t \mu_s(T) ds < \infty.$$

Для любого $p > 1$ положим

$$\psi_p(t) = \begin{cases} t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ t^{1-1/p} & \text{при } 1 \leq t. \end{cases}$$

Пространство $\mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{N})$ состоит из таких элементов $T \in \mathcal{N}$, что

$$\|T\|_{\mathcal{L}^{(p,\infty)}} = \sup_{t>1} \frac{1}{\psi_p(t)} \int_0^t \mu_s(T) ds < \infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.21. Полуконечная спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ называется (p, ∞) -суммируемой, если для любого $a \in \mathcal{A}$ оператор $(1 + D^2)^{-1/2}$ является элементом класса $\mathcal{L}^{(p,\infty)}(\mathcal{N})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.22. Фредгольмовым предмодулем над унитарной банаховой алгеброй $\mathcal{A}$ называется пара $(\mathcal{H}, F)$, где

- 1) $\mathcal{A}$ имеет непрерывное представление в полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{N}$, действующей в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$;
- 2) F – такой самосопряженный оператор Брейера–Фредгольма в $\mathcal{H}$, что $1 - F^2 \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}$ и $[F, a] \in \mathcal{K}_{\mathcal{N}}$ для любого $a \in \mathcal{A}$.

Если $1 - F^2 = 0$, то $(\mathcal{H}, F)$ называется фредгольмовым модулем.

Фредгольмов предмодуль $(\mathcal{H}, F)$ называется четным, если гильбертово пространство $\mathcal{H}$ наделено такой $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой γ , что операторы $\rho(a)$ являются четными, $\gamma a = a\gamma$, а оператор F нечетен, $\gamma F = -F\gamma$. В противном случае он называется нечетным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.23. Фредгольмов предмодуль $(\mathcal{H}, F)$ называется (p, ∞) -суммируемым, если $1 - F^2 \in \mathcal{L}^{(p/2, \infty)}(\mathcal{N})$ и $[F, a] \in \mathcal{L}^{(p, \infty)}(\mathcal{N})$ для плотного множества элементов $a \in \mathcal{A}$.

Если $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – полуконечная спектральная тройка, то пара $(\mathcal{H}, F)$, где $F = D(I + D^2)^{1/2}$, является фредгольмовым предмодулем над алгеброй $\mathcal{A}$. Используя точный, нормальный полуконечный след τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{N}$ вместо стандартного следа на алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, можно определить при помощи стандартных формул характер Черна произвольного (p, ∞) -суммируемого фредгольмова предмодуля $(\mathcal{H}, F)$ и, следовательно, характер Черна любой конечномерной полуконечной спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. В работах [73], [74] доказана некоммутативная локальная теорема об индексе для полуконечных спектральных троек. Ее формулировка аналогична формулировке некоммутативной локальной теоремы об индексе (см. теоремы 3.17 и 3.18) с той лишь разницей, что роль следа Диксмье Tr_ω в этих теоремах играет его обобщение на случай произвольной полуконечной алгебры фон Неймана. По поводу следов Диксмье и общих сингулярных следов на полуконечных алгебрах фон Неймана и их приложений см. обзор [72] и приведенную в нем библиографию.

3.8. Некоммутативная спектральная геометрия и тип III. В работе [75] авторы ввели понятие скрученной (или σ -спектральной) тройки, что позволяет применить методы некоммутативной геометрии для некоторых некоммутативных пространств типа III.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.24. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, наделенная автоморфизмом σ . Неградуированной σ -спектральной тройкой над алгеброй $\mathcal{A}$ называется набор $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, где:

- 1) $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, в котором задано действие алгебры $\mathcal{A}$;
- 2) D – такой (неограниченный) самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, что оператор $(D - i)^{-1}$ является компактным оператором в $\mathcal{H}$ и оператор $Da - \sigma(a)D$ ограничен для любого $a \in \mathcal{A}$.

Если алгебра $\mathcal{A}$ инволютивна и ее представление в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является $*$ -представлением, то дополнительно накладывается условие унитарности

$$\sigma(a^*) = (\sigma^{-1}(a))^*, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Градуированная σ -спектральная тройка определяется аналогичным образом, но в ней пространство $\mathcal{H}$ наделено $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой $\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\gamma = \gamma^*$, $\gamma^2 = 1$, причем $\gamma D = -D\gamma$ и $\gamma a = a\gamma$ для любого $a \in \mathcal{A}$.

ПРИМЕР 3.25. Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – произвольная спектральная тройка и $h \in \mathcal{A}$ – самосопряженный элемент, $h = h^*$. Рассмотрим автоморфизм σ алгебры $\mathcal{A}$, задаваемый формулой

$$\sigma(a) = e^{2h} a e^{-2h}, \quad a \in \mathcal{A}.$$

“Возмущенная” спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D')$, где $D' = e^h D e^{-h}$, является σ -спектральной тройкой.

Другой пример σ -спектральных троек возникает из трансверсальной геометрии произвольного слоения коразмерности один (см. пример 7.7). Самым насущным открытым вопросом является задача распространения приведенных выше понятий на случай слоений большей коразмерности. Ожидается, что общий случай потребует использование двойственных действий групп Ли таких, как $GL(n)$ и, более обще, квантовых групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.26. σ -спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ называется регулярной по Липшицу, если оператор $|D|a - \sigma(a)|D|$ ограничен для любого $a \in \mathcal{A}$.

Если σ -спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ регулярна по Липшицу и $F = D|D|^{-1}$, то $(\mathcal{H}, F)$ является фредгольмовым модулем над алгеброй $\mathcal{A}$. Более того, если $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ конечномерна, то фредгольмов модуль $(\mathcal{H}, F)$ также является конечномерным. Таким образом, для любой конечномерной регулярной по Липшицу σ -спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ определен характер Черна $\text{ch}(\mathcal{H}, F) \in HP^*(\mathcal{A})$. С другой стороны, для любой σ -спектральной тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ такой, что $D^{-1} \in \mathcal{L}^{(n, \infty)}$ при некотором четном n , можно определить циклический коцикл $\Psi_{D, \sigma}$ на алгебре $\mathcal{A}$ по формуле

$$\Psi_{D, \sigma}(a^0, a^1, \dots, a^n) = \text{tr}(\gamma d_\sigma a^0 D^{-1} d_\sigma a^1 \cdots D^{-1} d_\sigma a^n), \quad a^0, a^1, \dots, a^n \in \mathcal{A},$$

где $d_\sigma a = Da - \sigma(a)D$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Если σ -спектральная тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ удовлетворяет более сильному условию

$$|D|^{-t}(|D|^t a - \sigma^t(a)|D|^t) \in \mathcal{L}^{(n, \infty)}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad t \in \mathbb{R},$$

то коцикл $\Psi_{D, \sigma}$ определяет тот же самый класс когомологий, что и характер Черна $\text{ch}(\mathcal{H}, F) \in HP^*(\mathcal{A})$.

Аналог некоммутативной локальной теоремы об индексе в данном случае остается открытым вопросом. Для некоторого класса скрученных спектральных троек типа III такая теорема доказана совсем недавно в работе [76].

4. Некоторые сведения из теории слоений

4.1. Слоения: определения и примеры. В данном разделе мы напомним определение многообразия со слоением и некоторые понятия, связанные со слоениями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. 1) Атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$, где $\phi_i: U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, гладкого многообразия M размерности n называется атласом слоения размерности p и коразмерности q ($p \leq n$, $p + q = n$), если для любых i и j таких, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, координатные преобразования $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}: \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ имеют вид

$$\phi_{ij}(x, y) = (\alpha_{ij}(x, y), \gamma_{ij}(y)), \quad (x, y) \in \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q.$$

2) Два атласа слоения размерности p эквивалентны, если их объединение снова является атласом слоения размерности p .

3) Многообразие M , наделенное классом эквивалентности $\mathcal{F}$ атласов слоения размерности p , называется многообразием со слоением размерности p .

Класс эквивалентности $\mathcal{F}$ атласов слоения также называется полным атласом слоения. Мы также будем говорить, что $\mathcal{F}$ является слоением на многообразии M .

Пара (U, ϕ) , принадлежащая некоторому атласу слоения $\mathcal{F}$, а также соответствующее отображение $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется расслоенной картой слоения $\mathcal{F}$, а U называется расслоенной координатной окрестностью.

Пусть $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ – расслоенная карта. Компоненты связности множества $\phi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{y\})$, $y \in \mathbb{R}^q$, называются локальными слоями слоения $\mathcal{F}$.

Локальные слои слоения $\mathcal{F}$ для всевозможных расслоенных карт образуют базис некоторой топологии на M . Данная топология называется топологией слоя на M . Мы также будем обозначать через $\mathcal{F}$ множество M , наделенное топологией слоя. На $\mathcal{F}$ можно ввести структуру p -мерного гладкого многообразия.

Компоненты связности многообразия $\mathcal{F}$ называются слоями слоения $\mathcal{F}$. Слои являются (взаимно однозначно) погруженными p -мерными подмногообразиями в M . Для любой точки $x \in M$ существует только один слой, который проходит через x . Мы будем обозначать этот слой через L_x .

Можно дать эквивалентное определение слоения, сказав, что на n -мерном многообразии M задано слоение $\mathcal{F}$ размерности p , если M представлено в виде объединения семейства $\{L_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ непересекающихся, связных (взаимно однозначно) погруженных подмногообразий размерности p и имеется такой атлас $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ многообразия M , что для любой координатной карты (U_i, ϕ_i) с локальными координатами $(x_1, \dots, x_n)$ и для любого $\lambda \in \mathcal{L}$ связные компоненты множества $L_\lambda \cap U_i$ задаются уравнениями вида $x_{p+1} = c_{p+1}, \dots, x_n = c_n$ для некоторых постоянных $c_{p+1}, \dots, c_n$.

ПРИМЕР 4.2. Пусть M – n -мерное гладкое многообразие, B – q -мерное гладкое многообразие и $\pi: M \rightarrow B$ – субмерсия (т.е. дифференциал $d\pi_x: T_x M \rightarrow T_{\pi(x)} B$ сюръективен для любого $x \in M$). Связные компоненты прообразов точек многообразия B при отображении π задают слоение коразмерности q на многообразии M , которое называется слоением, определяемым субмерсией π . Если, кроме того, прообразы $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, связны, то слоение называется простым.

ПРИМЕР 4.3. Если X – неособое (т.е. не обращающееся в нуль) гладкое векторное поле на многообразии M , то его фазовые кривые образуют слоение размерности 1.

Более обще, пусть связная группа Ли G действует гладко на гладком многообразии M , причем размерность стационарной подгруппы $G_x = \{x \in G : gx = x\}$ не зависит от $x \in M$. В частности, можно предположить, что действие локально свободно, что означает дискретность группы изотропии G_x для любого $x \in M$. Тогда орбиты действия группы G определяют слоение на M .

ПРИМЕР 4.4 (линейное слоение на торе). Рассмотрим векторное поле $\tilde{X}$ на $\mathbb{R}^2$, задаваемое формулой

$$\tilde{X} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}$$

с постоянными α и β . Поскольку $\tilde{X}$ инвариантно при всех сдвигах, оно определяет векторное поле X на двумерном торе $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Векторное поле X определяет слоение $\mathcal{F}$ на T^2 . Слоями слоения $\mathcal{F}$ являются образы параллельных прямых $\tilde{L} = \{(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) : t \in \mathbb{R}\}$ с наклоном $\theta = \beta/\alpha$ при проекции $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$.

В случае, когда θ рационально, все слои слоения $\mathcal{F}$ замкнуты и являются окружностями, а само слоение $\mathcal{F}$ задается слоями расслоения $T^2 \rightarrow S^1$. В случае, когда θ иррационально, все слои слоения $\mathcal{F}$ всюду плотны в T^2 .

ПРИМЕР 4.5 (однородные слоения). Пусть G – группа Ли и $H \subset G$ – ее связная подгруппа Ли. Семейство $\{gH : g \in G\}$ правых классов смежности по подгруппе H образует слоение $\mathcal{H}$ на G . Если H – замкнутая подгруппа, то G/H – многообразие и $\mathcal{H}$ – слоение, слоями которого являются слои расслоения $\pi : G \rightarrow G/H$.

Более того, предположим, что $\Gamma \subset G$ – дискретная подгруппа группы G . Тогда множество $M = \Gamma \backslash G$ левых классов смежности по подгруппе Γ является многообразием той же размерности, что и G . Если Γ кокомпактна в G , то многообразие M компактно. В любом случае, поскольку слоение $\mathcal{H}$ инвариантно при левых сдвигах и Γ действует слева, слоение $\mathcal{H}$ переходит при отображении $G \rightarrow M = \Gamma \backslash G$ в корректно определенное слоение $\mathcal{H}_\Gamma$ на M , которое часто обозначается $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ и называется локально однородным слоением. Слой слоения $\mathcal{H}_\Gamma$, проходящий через точку $\Gamma g \in M$, диффеоморфен $H/(g\Gamma g^{-1} \cap H)$.

ПРИМЕР 4.6 (надстройка). Пусть B – связное многообразие и $\tilde{B}$ – его универсальное накрытие, на котором фундаментальная группа $\Gamma = \pi_1(B)$ действует как группа покрывающих преобразований. Предположим, что задан гомоморфизм $\phi : \Gamma \rightarrow \text{Diff}(F)$ группы Γ в группу диффеоморфизмов $\text{Diff}(F)$ гладкого многообразия F . Определим многообразие $M = \tilde{B} \times_\Gamma F$ как пространство орбит многообразия $\tilde{B} \times F$ относительно действия группы Γ , задаваемого для любого $\gamma \in \Gamma$ формулой

$$\gamma(b, f) = (\gamma b, \phi(\gamma)f), \quad (b, f) \in \tilde{B} \times F.$$

На M имеется естественное слоение $\mathcal{F}$, слои которого являются образами множеств $\tilde{B} \times \{f\}$, $f \in F$, при проекции $\tilde{B} \times F \rightarrow M$. Если для любого $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$, диффеоморфизм $\phi(\gamma)$ не имеет неподвижных точек, то все слои слоения $\mathcal{F}$ диффеоморфны $\tilde{B}$.

Определено расслоение $\pi : M \rightarrow B : [(b, f)] \mapsto b \pmod{\Gamma}$ такое, что слои слоения $\mathcal{F}$ трансверсальны слоям расслоения π . Часто говорят, что расслоение $\pi : M \rightarrow B$ является плоским слоеным расслоением.

Слоение $\mathcal{F}$ определяет подрасслоение $F = T\mathcal{F}$ касательного расслоения TM , называемое касательным расслоением к $\mathcal{F}$. Оно состоит из всех векторов, касающихся слоев слоения $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathcal{X}(M) = C^\infty(M, TM)$ алгебру Ли всех гладких векторных полей на M по отношению к скобке Ли и через $\mathcal{X}(\mathcal{F}) = C^\infty(M, F)$ подпространство векторных полей на M , касающихся слоев слоения $\mathcal{F}$ в каждой точке. Подпространство $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathcal{X}(M)$. Более того, по теореме Фробениуса подрасслоение E расслоения TM является касательным расслоением к некоторому

слоению тогда и только тогда, когда оно инволютивно, т.е. пространство сечений этого расслоения является подалгеброй Ли алгебры Ли $\mathcal{X}(M)$: для любых $X, Y \in C^\infty(M, E)$ мы имеем $[X, Y] \in C^\infty(M, E)$.

Введем также следующие объекты: $\tau = TM/T\mathcal{F}$ – нормальное расслоение к $\mathcal{F}$; $P_\tau: TM \rightarrow \tau$ – естественная проекция; $N^*\mathcal{F} = \{\nu \in T^*M : \langle \nu, X \rangle = 0 \text{ для любого } X \in F\}$ – конормальное расслоение к $\mathcal{F}$. Обычно мы будем обозначать через $(x, y) \in I^p \times I^q$ ($I = (0, 1)$ – открытый интервал) локальные координаты в расслоенной карте $\phi: U \rightarrow I^p \times I^q$ и через $(x, y, \xi, \eta) \in I^p \times I^q \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ локальные координаты в соответствующей карте на T^*M . Тогда подмножество $N^*\mathcal{F} \cap \pi^{-1}(U) = U_1$ (здесь $\pi: T^*M \rightarrow M$ – отображение расслоения) задается уравнением $\xi = 0$. Поэтому ϕ естественно определяет координатную карту $\phi_n: U_1 \rightarrow I^p \times I^q \times \mathbb{R}^q$ на $N^*\mathcal{F}$ с координатами (x, y, η) .

q -мерное распределение $Q \subset TM$ такое, что $TM = F \oplus Q$, называется распределением, трансверсальным к слоению, или связностью на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$. Любая риманова метрика g на M определяет трансверсальное распределение H , образованное ортогональным дополнением к F относительно данной метрики:

$$H = F^\perp = \{X \in TM : g(X, Y) = 0 \text{ для любого } Y \in F\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Векторное поле V на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ называется инфинитезимальным преобразованием слоения $\mathcal{F}$, если $[V, X] \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ для любого $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$.

Множество всех инфинитезимальных преобразований слоения $\mathcal{F}$ обозначается через $\mathcal{X}(M/\mathcal{F})$. Если $V \in \mathcal{X}(M/\mathcal{F})$ и $T_t: M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, – поток векторного поля V , то диффеоморфизмы T_t являются автоморфизмами многообразия со слоением $(M, \mathcal{F})$, т.е. переводят каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в (возможно, другой) слой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8. Векторное поле V на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ называется проектируемым, если его нормальная компонента $P_\tau(V)$ локально является подъемом некоторого векторного поля на локальной базе.

Другими словами, векторное поле V на M является проектируемым, если в любой расслоенной карте с локальными координатами (x, y) , $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, оно имеет вид

$$V = \sum_{i=1}^p f^i(x, y) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^q g^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Имеется естественное действие алгебры Ли $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ на пространстве $C^\infty(M, \tau)$. Действие векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ на $N \in C^\infty(M, \tau)$ задается формулой

$$\theta(X)N = P_\tau[X, \tilde{N}],$$

где $\tilde{N} \in \mathcal{X}(M)$ – любое векторное поле на M такое, что $P_\tau(\tilde{N}) = N$. Векторное поле $N \in \mathcal{X}(M)$ является проектируемым тогда и только тогда, когда его трансверсальная компонента $P_\tau(N) \in C^\infty(M, \tau)$ инвариантна при $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ -действии θ . Отсюда легко увидеть, что векторное поле на многообразии со слоением является проектируемым тогда и только тогда, когда оно является инфинитезимальным преобразованием слоения.

4.2. Голономия и трансверсальные структуры. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением. Отображение голономии является обобщением на случай слоений отображения последования (или отображения Пуанкаре) для потоков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.9. Гладкой трансверсалью называется компактное q -мерное многообразие T (вообще говоря, несвязное и с краем) и вложение $i: T \rightarrow M$, образ которого всюду трансверсален к слоям слоения $\mathcal{F}$: $T_{i(t)}i(T) \oplus T_{i(t)}\mathcal{F} = T_{i(t)}M$ для любого $t \in T$.

Будем отождествлять трансверсаль T с образом $i(T) \subset M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.10. Трансверсаль называется полной, если она пересекает каждый слой слоения.

Возьмем произвольный непрерывный послыйный путь γ с началом $\gamma(0) = x$ и концом $\gamma(1) = y$. (Мы будем называть путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ послыйным, если его образ $\gamma([0, 1])$ целиком содержится в одном слое слоения.) Пусть T_0 и T_1 – такие гладкие трансверсали, что $x \in T_0$ и $y \in T_1$.

Выберем такое разбиение $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$, что для любого $i = 1, \dots, k$ кривая $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ содержится в некоторой координатной окрестности U_i . Уменьшая, если необходимо, окрестности U_1 и U_2 , можно предположить, что для любого локального слоя P_1 окрестности U_1 существует единственный локальный слой P_2 окрестности U_2 , который пересекает P_1 . Уменьшая, если необходимо, окрестности U_1 , U_2 и U_3 , можно предположить, что для любого локального слоя P_2 окрестности U_2 существует единственный локальный слой P_3 окрестности U_3 , который пересекает P_2 , и т. д. В конце концов мы получим такое семейство $\{U_1, \dots, U_k\}$ расслоенных координатных окрестностей, покрывающее кривую $\gamma([0, 1])$, что при любом $i = 1, \dots, k$ для любого локального слоя P_{i-1} окрестности U_{i-1} существует единственный локальный слой P_i окрестности U_i , который пересекает P_{i-1} . В частности, мы получаем взаимно однозначное соответствие между локальными слоями окрестности U_1 и локальными слоями окрестности U_k .

Гладкая трансверсаль T_0 определяет параметризацию локальных слоев окрестности U_1 вблизи точки x . Соответственно гладкая трансверсаль T_1 определяет параметризацию локальных слоев окрестности U_k вблизи точки y . Принимая во внимание построенное выше взаимно однозначное соответствие между локальными слоями окрестностей U_1 и U_k , получаем диффеоморфизм $H_{T_0 T_1}(\gamma)$ некоторой окрестности точки x в T_0 на некоторую окрестность точки y в T_1 , который называется отображением голономии вдоль пути γ .

Легко видеть, что росток диффеоморфизма $H_{T_0 T_1}(\gamma)$ в точке x не зависит от выбора разбиения $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ отрезка $[0, 1]$ и семейства расслоенных координатных окрестностей $\{U_1, \dots, U_k\}$. Более того, росток диффеоморфизма $H_{T_0 T_1}(\gamma)$ в точке x не изменится, если заменить путь γ любым другим непрерывным послыйным путем γ_1 с началом в точке x и концом в точке y , который гомотопен пути γ в классе непрерывных послыйных путей с началом в точке x и концом в точке y .

Если γ – замкнутый послойный путь с началом и концом в точке x и T – такая гладкая трансверсаль, что $x \in T$, то $H_{TT}(\gamma)$ есть локальный диффеоморфизм трансверсали T , переводящий точку x в себя. Соответствие $\gamma \rightarrow H_{TT}(\gamma)$ определяет гомоморфизм H_T фундаментальной группы $\pi_1(L_x, x)$ слоя L_x в группу $\text{Diff}_x(T)$ ростков в точке x локальных диффеоморфизмов трансверсали T , переводящих точку x в себя. Образ гомоморфизма H_T называется группой голономии слоя L_x в точке x . Группа голономии слоя L в точке $x \in L$ не зависит с точностью до изоморфизма от выбора трансверсали T и от выбора точки x . Будем говорить, что слой имеет тривиальную голономию, если его группа голономии тривиальна.

ПРИМЕР 4.11. Пусть X – полное неособое векторное поле на n -мерном многообразии M , x_0 – (для простоты, изолированная) периодическая точка потока X_t данного векторного поля и C – соответствующая замкнутая фазовая кривая. Пусть T – $(n-1)$ -мерное подмногообразие многообразия M , проходящее через точку x_0 трансверсально вектору $X(x_0)$:

$$T_x M = T_x T \oplus \mathbb{R}X(x_0).$$

Для всех точек $x \in T$, достаточно близких к точке x_0 , существует наименьшее $t(x) > 0$, при котором соответствующая положительная полутраектория потока $\{X_t(x) : t > 0\}$ пересекает трансверсаль T : $X_{t(x)}(x) \in T$. Тем самым, получаем локальный диффеоморфизм $\phi_T : x \mapsto X_{t(x)}(x)$ трансверсали T , определенный в некоторой окрестности точки x_0 и переводящий x_0 в себя. Этот диффеоморфизм называется отображением последования (или отображением Пуанкаре) вдоль кривой C .

Если $\mathcal{F}$ – слоение на M , задаваемое траекториями векторного поля X , то группа голономии слоя C совпадает с $\mathbb{Z}$ и росток диффеоморфизма ϕ_T в точке x_0 есть генератор этой группы.

Для любой гладкой трансверсали T и точки $x \in T$ имеется естественный изоморфизм касательного пространства $T_x T$ с нормальным пространством τ_x к слоению $\mathcal{F}$. Тем самым, нормальное расслоение τ играет роль касательного расслоения к (росткам) трансверсалей к слоению $\mathcal{F}$. Для любого непрерывного послойного пути γ с началом в точке x и концом в точке y и для любых гладких трансверсалей T_0 и T_1 таких, что $x \in T_0$ и $y \in T_1$, дифференциал отображения голономии $H_{T_0 T_1}(\gamma)$ в точке x определяет линейное отображение $dH_{T_0 T_1}(\gamma)_x : \tau_x \rightarrow \tau_y$. Легко проверить, что это отображение не зависит от выбора трансверсалей T_0 и T_1 . Оно называется отображением линейной голономии и обозначается $dh_\gamma : \tau_x \rightarrow \tau_y$. Взятие сопряженного отображения к dh_γ определяет линейное отображение $dh_\gamma^* : N^* \mathcal{F}_y \rightarrow N^* \mathcal{F}_x$.

Перейдем теперь к другому понятию, связанному с голономией, – понятию псевдогруппы голономии. Сначала напомним общее определение псевдогруппы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.12. Семейство Γ , состоящее из диффеоморфизмов между открытыми подмножествами многообразия X (или, другими словами, локальных диффеоморфизмов многообразия X), называется псевдогруппой на X , если выполнены следующие условия:

- 1) если $\Phi \in \Gamma$, то $\Phi^{-1} \in \Gamma$;
- 2) если $\Phi_1: U \rightarrow U_1$ и $\Phi_2: U_1 \rightarrow U_2$ принадлежат Γ , то $\Phi_2 \circ \Phi_1: U \rightarrow U_2$ принадлежит Γ ;
- 3) если $\Phi: U \rightarrow U_1$ принадлежит Γ , то его ограничение на любое открытое подмножество $V \subset U$ принадлежит Γ ;
- 4) если диффеоморфизм $\Phi: U \rightarrow U_1$ совпадает на некоторой окрестности каждой точки в U с некоторым элементом семейства Γ , то $\Phi \in \Gamma$;
- 5) тождественный диффеоморфизм принадлежит Γ .

ПРИМЕР 4.13. Множество всех локальных диффеоморфизмов многообразия X образует псевдогруппу на X . Можно рассматривать также псевдогруппы, состоящие из локальных диффеоморфизмов многообразия X , сохраняющих некоторую геометрическую структуру, например псевдогруппу локальных изометрий риманова многообразия и т. п.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.14. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – гладкое многообразие со слоением и X – дизъюнктное объединение всех гладких трансверселей к $\mathcal{F}$. Псевдогруппой голономии слоения $\mathcal{F}$ называется псевдогруппа Γ , состоящая из всех локальных диффеоморфизмов X , ростки которых в любой точке совпадают с ростком отображения голономии вдоль некоторого послойного пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.15. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – гладкое многообразие со слоением и T – гладкая трансверсаль. Псевдогруппой голономии, индуцированной слоением $\mathcal{F}$ на T , называется псевдогруппа Γ_T , состоящая из таких локальных диффеоморфизмов трансверсали T , ростки которых в любой точке трансверсали совпадают с ростком отображения голономии вдоль некоторого послойного пути.

Имеется специальный класс гладких трансверселей, задаваемых хорошими покрытиями многообразия M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.16. Расслоенная карта $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ называется регулярной, если она допускает продолжение до такой расслоенной карты $\bar{\phi}: V \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, что $\bar{U} \subset V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.17. Назовем покрытие многообразия M расслоенными окрестностями $\{U_i\}$ хорошим, если:

- 1) любая карта (U_i, ϕ_i) является регулярной расслоенной картой;
- 2) если $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j \neq \emptyset$, то $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ и множество $U_i \cap U_j$ связно; то же самое верно и для соответствующих расслоенных окрестностей V_i ;
- 3) каждый локальный слой окрестности V_i пересекает не более одного локального слоя окрестности V_j ; локальный слой окрестности U_i пересекает некоторый локальный слой окрестности U_j тогда и только тогда, когда пересекаются соответствующие локальные слои окрестностей V_i и V_j .

Хорошие покрытия всегда существуют.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}$ – хорошее покрытие для слоения $\mathcal{F}$, $\phi_i: U_i \xrightarrow{\cong} I^p \times I^q$. Для каждого i положим

$$T_i = \phi_i^{-1}(\{0\} \times I^q).$$

Тогда T_i является трансверсалью, а $T = \bigcup T_i$ – полной трансверсалью. Для $y \in T_i$ обозначим через $P_i(y)$ локальный слой окрестности U_i , проходящий через y . Для любой пары индексов i и j такой, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, определим

$$T_{ij} = \{y \in T_i : P_i(y) \cap U_j \neq \emptyset\}.$$

Определена функция перехода $f_{ij}: T_{ij} \rightarrow T_{ji}$, задающаяся для $y \in T_{ij}$ формулой $f_{ij}(y) = y_1$, где $y_1 \in T_{ji}$ соответствует единственному локальному слою $P_j(y_1)$, для которого $P_i(y) \cap P_j(y_1) \neq \emptyset$. Псевдогруппа голономии Γ_T , индуцированная слоением $\mathcal{F}$ на T , совпадает с псевдогруппой, порожденной отображениями f_{ij} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.18 (см., например, [77]). Трансверсальной структурой на слоении $\mathcal{F}$ называется структура на полной трансверсали T , инвариантная под действием псевдогруппы голономии Γ_T .

Использование понятия трансверсальной структуры позволяет выделять классы слоений, обладающие специфическими трансверсальными свойствами. Например, если полная трансверсаль T наделена римановой метрикой, а псевдогруппа голономии Γ_T состоит из локальных изометрий этой римановой метрики, мы получаем класс римановых слоений (см. п. 4.3). Аналогично, если полная трансверсаль T наделена симплектической структурой, а псевдогруппа голономии Γ_T состоит из локальных диффеоморфизмов, сохраняющих эту симплектическую структуру, мы получаем класс симплектических слоений. Также можно рассматривать кэлеровы слоения, измеримые слоения и т. п.

В работе [78] Хефлигер определил группы когомологий, ассоциированные с трансверсальной структурой слоения. Пусть, как и выше, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ – хорошее покрытие для слоения $\mathcal{F}$, $T = \bigcup T_i$ – соответствующая полная трансверсаль и Γ_T – псевдогруппа голономии, индуцированная слоением $\mathcal{F}$ на T . Обозначим через $\Omega_c^k(M/\mathcal{F})$ факторпространство пространства $\Omega_c^k(T)$ гладких финитных дифференциальных k -форм на T по подпространству, порожденному формами вида $\alpha - h^*\alpha$, где $h \in \Gamma_T$ и $\alpha \in \Omega_c^k(T)$ имеет носитель, содержащийся в образе h . Наделим пространство $\Omega_c^k(M/\mathcal{F})$ фактортопологией, индуцированной обычной C^∞ -топологией на $\Omega_c^k(T)$. Вообще говоря, $\Omega_c^k(M/\mathcal{F})$ не является хаусдорфовым топологическим пространством. Дифференциал де Рама $d_T: \Omega_c^k(T) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(T)$ индуцирует непрерывный дифференциал $d_H: \Omega_c^k(M/\mathcal{F}) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M/\mathcal{F})$. Следует отметить, что ни $\Omega_c^k(M/\mathcal{F})$, ни d_H не зависят от выбора хорошего покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Комплекс $(\Omega_c(M/\mathcal{F}), d_H)$ и его когомологии $H_c^*(M/\mathcal{F})$ называются соответственно формами Хефлигера и когомологиями Хефлигера слоения $\mathcal{F}$.

Если касательное расслоение $T\mathcal{F}$ ориентировано, то определено непрерывное, открытое, сюръективное линейное отображение, называемое интегрированием вдоль слоев,

$$\int_{\mathcal{F}} : \Omega^{k+p}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M/\mathcal{F}),$$

которое удовлетворяет условию $d_H \circ \int_{\mathcal{F}} = \int_{\mathcal{F}} \circ d$, где d – дифференциал де Рама на $\Omega(M)$. Таким образом, определено индуцированное отображение

$$\int_{\mathcal{F}} : H^{k+p}(M) \rightarrow H_c^k(M/\mathcal{F}).$$

Прежде чем переходить к обсуждению аналога понятия меры на пространстве слоев слоения, напомним некоторые основные факты, относящиеся к плотностям и интегрированию плотностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.19. Пусть L – n -мерное линейное пространство и $\mathcal{B}(L)$ – множество базисов в L . Назовем α -плотностью на L ($\alpha \in \mathbb{R}$) такую функцию $\rho: \mathcal{B}(L) \rightarrow \mathbb{C}$, что для любых $A = (A_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ и $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{B}(L)$ справедливо равенство

$$\rho(e \cdot A) = |\det A|^\alpha \rho(e),$$

где $(e \cdot A)_i = \sum_{j=1}^n e_j A_{ji}$, $i = 1, \dots, n$.

Будем обозначать пространство всех α -плотностей на L через $|L|^\alpha$. Для любого векторного расслоения V на M обозначим через $|V|^\alpha$ ассоциированное расслоение α -плотностей, $|V| = |V|^1$.

Для любой гладкой финитной плотности ρ на гладком многообразии M корректно определен ее интеграл $\int_M \rho$, не зависящий от того, ориентируемо многообразие M или нет. Этот факт позволяет определить гильбертово пространство $L^2(M)$, канонически связанное с многообразием M , которое состоит из квадратично интегрируемых полуплотностей на M . Группа диффеоморфизмов многообразия M действует унитарными преобразованиями в пространстве $L^2(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.20. (Борелевской) трансверсалью к слоению $\mathcal{F}$ называется такое борелевское подмножество многообразия M , которое пересекает каждый слой слоения по не более чем счетному множеству.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.21. Трансверсальной мерой Λ называется счетно аддитивная мера Радона, определенная на множестве всех трансверсалей к слоению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.22. Трансверсальная мера Λ называется голономно инвариантной, если для любых трансверсалей B_1 и B_2 и такого биективного борелевского отображения $\phi: B_1 \rightarrow B_2$, что для любого $x \in B_1$ точка $\phi(x)$ принадлежит слою, проходящему через точку x , справедливо соотношение $\Lambda(B_1) = \Lambda(B_2)$.

ПРИМЕР 4.23. Назовем трансверсальной плотностью любое сечение расслоения $|\tau|$. Поскольку для любой гладкой трансверсали T имеется канонический изоморфизм $T_x T \cong \tau_x$, то непрерывная положительная трансверсальная плотность ρ задает непрерывную положительную плотность на T , определяя тем самым трансверсальную меру. Данная трансверсальная мера голономно инвариантна тогда и только тогда, когда трансверсальная плотность ρ инвариантна при действии линейной голономии.

ПРИМЕР 4.24. Любой компактный слой L слоения $\mathcal{F}$ определяет голономно инвариантную трансверсальную меру Λ . Для любой трансверсали T и для любого множества $A \subset T$ его мера $\Lambda(A)$ равна числу элементов в $A \cap L$.

ПРИМЕР 4.25. Пусть $\mathcal{F}$ – горизонтальное слоение на плоском слоеном расслоении $M = \tilde{B} \times_{\Gamma} F$ (см. пример 4.6). Любая мера на F , инвариантная при действии группы Γ , определяет голономно инвариантную меру для $\mathcal{F}$.

Пусть $\alpha \in C^\infty(M, |T\mathcal{F}|)$ – гладкая положительная послойная плотность на M . Исходя из трансверсальной меры Λ и плотности α , можно следующим образом построить борелевскую меру μ на M . Возьмем хорошее покрытие $\{U_i\}$ многообразия M расслоенными координатными окрестностями с соответствующими координатными отображениями $\phi_i: U_i \rightarrow I^p \times I^q$ и подчиненное этому покрытию разбиение единицы $\{\psi_i\}$. Рассмотрим соответствующую полную трансверсаль $T = \bigcup_i T_i$, где $T_i = \phi_i^{-1}(\{0\} \times I^q)$. В любой расслоенной карте (U_i, ϕ_i) трансверсальная мера Λ определяет меру Λ_i на T_i , а гладкая положительная послойная плотность α определяет семейство $\{\alpha_{i,y} : y \in T_i\}$, где $\{\alpha_{i,y}\}$ – гладкая положительная плотность на локальном слое $P_i(y)$. Отметим, что мера Λ голономно инвариантна тогда и только тогда, когда для любой пары индексов i и j такой, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, справедливо соотношение $f_{ij}(\Lambda_i) = \Lambda_j$.

Для любой функции $u \in C_c^\infty(M)$ положим

$$\int_M u(m) d\mu(m) = \sum_i \int_{T_i} \int_{P_i(y)} \psi_i(x, y) u(x, y) \alpha_{i,y}(x) d\Lambda_i(y). \quad (4.1)$$

Можно показать, что данная формула определяет меру μ на M , которая не зависит от выбора покрытия $\{U_i\}$ и разбиения единицы $\{\psi_i\}$.

Будем называть меру μ на M голономно инвариантной, если она получается из голономно инвариантной трансверсальной меры Λ при помощи указанной выше конструкции при некотором выборе гладкой положительной послойной плотности α .

Если в приведенной выше конструкции вместо послойной плотности $u \cdot \alpha$ взять ограничения на слои произвольной дифференциальной p -формы ω на M , получается корректно определенный функционал C на пространстве $C_c^\infty(M, \Lambda^p T^*M)$, называемый потоком Рюэлля–Сулливана, соответствующим трансверсальной мере Λ :

$$\langle C, \omega \rangle = \sum_i \int_{T_i} \int_{P_i(y)} \psi_i(x, y) \omega_{i,y}(x) d\Lambda_i(y), \quad \omega \in C_c^\infty(M, \Lambda^p T^*M),$$

где $\omega_{i,y}$ – ограничение формы ω на локальный слой $P_i(y)$, $y \in T_i$.

Трансверсальная мера Λ голономно инвариантна тогда и только тогда, когда соответствующий поток Рюэлля–Сулливана C замкнут:

$$\langle C, d\sigma \rangle = 0, \quad \sigma \in C_c^\infty(M, \Lambda^{p-1} T^*M).$$

ПРИМЕР 4.26. Предположим, что трансверсальная мера Λ задается гладкой положительной трансверсальной плотностью $\rho \in C^\infty(M, |\tau|)$. Возьмем положительную послойную плотность $\alpha \in C^\infty(M, |T\mathcal{F}|)$. Тогда соответству-

ющая мера μ на M задается гладкой положительной плотностью $\alpha \otimes \rho \in C^\infty(M, |TM|)$, которая соответствует плотностям α и ρ при каноническом изоморфизме $|TM| \cong |T\mathcal{F}| \otimes |\tau|$, задаваемом короткой точной последовательностью $0 \rightarrow T\mathcal{F} \rightarrow TM \rightarrow \tau \rightarrow 0$.

ПРИМЕР 4.27. Пусть голономно инвариантная трансверсальная мера Λ задается компактным слоем L слоения $\mathcal{F}$, и пусть $\alpha \in C^\infty(M, |T\mathcal{F}|)$ – гладкая положительная послойная плотность на M . Тогда соответствующая мера μ на M является δ -функцией вдоль L :

$$\int_M f(x) d\mu(x) = \int_L f(x) \alpha(x), \quad f \in C_c(M).$$

ПРИМЕР 4.28. Предположим, что слоение $\mathcal{F}$ задается орбитами локально свободного действия группы Ли H на компактном многообразии M и гладкая послойная плотность α задается фиксированной мерой Хаара dh на H . Соответствующая мера μ на M голономно инвариантна тогда и только тогда, когда она инвариантна под действием H .

4.3. Трансверсальная риманова геометрия. Инфинитезимальным выражением голономии на многообразии со слоением является каноническая плоская связность

$$\overset{\circ}{\nabla}: \mathcal{X}(\mathcal{F}) \times C^\infty(M, \tau) \rightarrow C^\infty(M, \tau)$$

в нормальном расслоении τ , определенная вдоль слоев слоения $\mathcal{F}$ (связность Ботта) [79]. Она задается формулой

$$\overset{\circ}{\nabla}_X N = \theta(X)N = P_\tau[X, \tilde{N}], \quad X \in \mathcal{X}(\mathcal{F}), \quad N \in C^\infty(M, \tau), \quad (4.2)$$

где $\tilde{N} \in C^\infty(M, TM)$ – любое векторное поле на M такое, что $P_\tau(\tilde{N}) = N$. Тем самым, ограничение расслоения τ на любой слой слоения $\mathcal{F}$ является плоским векторным расслоением. Параллельный перенос в расслоении τ вдоль любого послойного пути $\gamma: x \rightarrow y$, задаваемый связностью $\overset{\circ}{\nabla}$, совпадает с отображением линейной голономии $dh_\gamma: \tau_x \rightarrow \tau_y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.29. Связность $\nabla: \mathcal{X}(M) \times C^\infty(M, \tau) \rightarrow C^\infty(M, \tau)$ в нормальном расслоении τ называется адаптированной, если ее ограничение на $\mathcal{X}(\mathcal{F})$ совпадает со связностью Ботта $\overset{\circ}{\nabla}$.

Адаптированную связность можно построить, исходя из произвольной римановой метрики g_M на M . Обозначим через ∇^g связность Леви-Чивиты, задаваемую метрикой g_M . Адаптированная связность ∇ задается формулами

$$\begin{aligned} \nabla_X N &= P_\tau[X, \tilde{N}], & X \in \mathcal{X}(\mathcal{F}), \quad N \in C^\infty(M, \tau), \\ \nabla_X N &= P_\tau \nabla_X^g \tilde{N}, & X \in C^\infty(M, F^\perp), \quad N \in C^\infty(M, \tau), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\tilde{N} \in C^\infty(M, TM)$ – любое векторное поле такое, что $P_\tau(\tilde{N}) = N$. Можно показать, что описанная выше адаптированная связность ∇ не имеет кручения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.30. Адаптированная связность ∇ в нормальном расслоении τ называется голономно инвариантной, если для любых $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$, $Y \in \mathcal{X}(M)$ и $N \in C^\infty(M, \tau)$ справедливо равенство

$$(\theta(X)\nabla)_Y N := \theta(X)[\nabla_Y N] - \nabla_{\theta(X)Y} N - \nabla_Y[\theta_Y N] = 0.$$

Голономно инвариантная адаптированная связность в τ называется базисной (или трансверсально проектируемой) связностью.

Фундаментальным свойством базисных связностей является тот факт, что их кривизна R_∇ является базисной формой, т. е. $i_X R_\nabla = 0$, $\theta(X)R_\nabla = 0$ для любого $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$. Имеются топологические препятствия для существования базисных связностей для произвольного слоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.31. Слоение $\mathcal{F}$ на многообразии M называется римановым, если оно имеет трансверсальную риманову структуру. Другими словами, слоение $\mathcal{F}$ называется римановым, если существуют такое покрытие $\{U_i\}$ многообразия M расслоенными координатными картами, $\phi_i: U_i \rightarrow I^p \times I^q$, и такие римановы метрики $g^{(i)}(y) = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{(i)}(y) dy^\alpha dy^\beta$, определенные на локальных базах I^q слоения $\mathcal{F}$, что для любого координатного преобразования

$$\phi_{ij}(x, y) = (\alpha_{ij}(x, y), \gamma_{ij}(y)), \quad (x, y) \in \phi_j(U_i \cap U_j),$$

отображение γ_{ij} сохраняет метрику на I^q , $\gamma_{ij}^*(g^{(j)}) = g^{(i)}$.

ТЕОРЕМА 4.32. Слоение $\mathcal{F}$ является римановым тогда и только тогда, когда существует такая риманова метрика g_M на M , что индуцированная метрика g_τ на нормальном расслоении τ голономно инвариантна: для любого $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ и для любых $U, V \in C^\infty(M, \tau)$

$$\overset{\circ}{\nabla}_X g_\tau(U, V) := X[g_\tau(U, V)] - g_\tau(\overset{\circ}{\nabla}_X U, V) - g_\tau(U, \overset{\circ}{\nabla}_X V) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.33. Любая риманова метрика на многообразии M , удовлетворяющая условиям теоремы 4.32, называется трансверсально проектируемой.

Для риманова слоения $\mathcal{F}$ и трансверсально проектируемой метрики g_M адаптированная связность ∇ на нормальном расслоении τ , задаваемая формулами (4.3), является римановой связностью: для любых $Y \in \mathcal{X}(M)$ и $U, V \in C^\infty(M, \tau)$

$$Y[g_\tau(U, V)] = g_\tau(\nabla_Y U, V) + g_\tau(U, \nabla_Y V).$$

Можно доказать, что риманова связность (без кручения) на нормальном расслоении τ риманова слоения $\mathcal{F}$ единственна. Она однозначно определяется трансверсальной метрикой g_τ и называется трансверсальной связностью Леви-Чивиты для $\mathcal{F}$. Тем самым, трансверсальная связность Леви-Чивиты является адаптированной связностью. Более того, оказывается, что трансверсальная связность Леви-Чивиты голономно инвариантна и, тем самым, является базисной связностью. Это, в частности, доказывает существование базисной связности для любого риманова слоения.

Существование трансверсально проектируемой метрики на многообразии со слоением накладывает сильные ограничения на геометрию слоения. Имеются

структурные теоремы для римановых слоений, полученные Молино. С помощью этих структурных теорем многие вопросы, касающиеся римановых слоений, сводятся к случаю слоений Ли, т. е. слоений, трансверсальная структура которых моделируется некоторой конечномерной группой Ли (см. пример 4.36).

ПРИМЕР 4.34. Любое слоение, определяемое субмерсией $\pi: M \rightarrow B$, является римановым.

ПРИМЕР 4.35. Орбиты локально свободного изометрического действия группы Ли на римановом многообразии определяют риманово слоение. С другой стороны, потоки, орбиты которых образуют риманово слоение, называются римановыми потоками. Имеются примеры римановых потоков, которые не изометричны (см., например, [80]).

ПРИМЕР 4.36. Пусть M – гладкое многообразие, $\mathfrak{g}$ – вещественная конечномерная алгебра Ли и ω – 1-форма на M со значениями в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям:

- 1) отображение $\omega_x: T_x M \rightarrow \mathfrak{g}$ сюръективно для любого $x \in M$;
- 2) $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$.

Распределение $F_x = \ker \omega_x$ интегрируемо и, следовательно, определяет слоение коразмерности $q = \dim \mathfrak{g}$ на M . Такое слоение называется $\mathfrak{g}$ -слоением Ли. Любое слоение Ли является римановым.

ПРИМЕР 4.37. Горизонтальное слоение $\mathcal{F}$ на плоском слоеном расслоении M (см. пример 4.6) является римановым тогда и только тогда, когда для любого $\gamma \in \Gamma$ диффеоморфизм $\phi(\gamma)$ сохраняет некоторую риманову метрику на F .

Пусть $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентированное риманово слоение и g – трансверсально проектируемая риманова метрика. Индуцированная метрика на τ задает форму трансверсального объема $v_\tau \in C^\infty(M, \Lambda^q \tau^*) = C^\infty(M, \Lambda^q N^* \mathcal{F})$, которая голономно инвариантна и определяет, тем самым, голономно инвариантную трансверсальную меру на $\mathcal{F}$.

5. Некоммутативная топология слоений

В этом разделе мы опишем некоммутативные алгебры, ассоциированные с пространством слоев слоения. Сначала мы определим алгебру, состоящую из очень хороших функций, на которых определены основные операторы анализа, затем в зависимости от рассматриваемой задачи мы будем пополнять эту алгебру, получая аналог алгебры измеримых, непрерывных или гладких функций. Роль “хорошей” алгебры играет алгебра $C_c^\infty(G)$ гладких финитных функций на группоиде голономии слоения G . Поэтому мы начнем с понятия группоида голономии слоения.

5.1. Группоид голономии. Слоение $\mathcal{F}$ задает отношение эквивалентности $\mathcal{R} \subset M \times M$ на M : $(x, y) \in \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда x и y лежат на одном слое слоения $\mathcal{F}$. Вообще говоря, $\mathcal{R}$ не является гладким многообразием, но его особенности можно разрешить, построив гладкое многообразие G , называемое группоидом голономии или графом слоения, которое совпадает с $\mathcal{R}$

“почти всюду” и которое во многих случаях можно использовать вместо $\mathcal{R}$. Идея группоида голономии появилась в работах Эресмана, Роба и Тома и была полностью реализована Винкельнхемпером в [81]. Прежде всего, приведем общее определение группоида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Скажем, что на множестве G задана структура группоида с множеством единиц $G^{(0)}$, если определены отображения

- 1) $\Delta: G^{(0)} \rightarrow G$ (диагональное отображение или отображение единиц);
- 2) инволюция $i: G \rightarrow G$, называемая операцией взятия обратного элемента и записываемая в виде $i(\gamma) = \gamma^{-1}$;
- 3) отображения образа $r: G \rightarrow G^{(0)}$ и источника $s: G \rightarrow G^{(0)}$;
- 4) ассоциативное умножение $m: (\gamma, \gamma') \rightarrow \gamma\gamma'$, определенное на множестве

$$G^{(2)} = \{(\gamma, \gamma') \in G \times G : r(\gamma') = s(\gamma)\},$$

удовлетворяющие условиям

- (i) $r(\Delta(x)) = s(\Delta(x)) = x$ и $\gamma\Delta(s(\gamma)) = \gamma$, $\Delta(r(\gamma))\gamma = \gamma$;
- (ii) $r(\gamma^{-1}) = s(\gamma)$ и $\gamma\gamma^{-1} = \Delta(r(\gamma))$.

Альтернативным образом можно определить группоид как малую категорию, в которой каждый морфизм является изоморфизмом. В частности, элемент $\gamma \in G$ удобно изображать в виде стрелки $\gamma: x \rightarrow y$, где $x = s(\gamma)$ и $y = r(\gamma)$. Мы будем также использовать стандартные обозначения (для $x, y \in G^{(0)}$):

$$G^x = \{\gamma \in G : r(\gamma) = x\} = r^{-1}(x), \quad G_x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x\} = s^{-1}(x), \\ G_y^x = \{\gamma \in G : s(\gamma) = x, r(\gamma) = y\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Группоид G называется гладким (или группоидом Ли), если множества $G^{(0)}$, G и $G^{(2)}$ являются гладкими многообразиями, отображения r , s , i и m являются гладкими отображениями, отображения r и s являются сублимерсиями и отображение Δ является вложением.

ПРИМЕР 5.3 (тривиальный группоид). Пусть X – произвольное множество. Положим $G = X$, $G^{(0)} = X$, отображения s и r являются тождественными отображениями (другими словами, каждый элемент $x \in G^{(0)} = X$ отождествляется с единственным элементом $\gamma: x \rightarrow x$).

ПРИМЕР 5.4 (отношения эквивалентности). Любое отношение эквивалентности $R \subset X \times X$ задает группоид, если положить $G^{(0)} = X$, $G = R$, отображения $s: R \rightarrow X$ и $r: R \rightarrow X$ задаются формулами $s(x, y) = y$, $r(x, y) = x$. Тем самым, пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) можно перемножить тогда и только тогда, когда $y_1 = x_2$, при этом $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1, y_2)$. Кроме того,

$$\Delta(x) = (x, x), \quad x \in X, \\ (x, y)^{-1} = (y, x), \quad (x, y) \in R.$$

В частном случае, когда $R = X \times X$, получаем так называемый главный группоид.

ПРИМЕР 5.5 (группы Ли). Группа Ли H определяет гладкий группоид следующим образом: $G = H$, $G^{(0)}$ состоит из одной точки, отображения i и m задаются групповыми операциями в H .

ПРИМЕР 5.6 (групповые действия). Пусть группа Ли H действует гладко слева на гладком многообразии X . Группоид скрещенного произведения $X \rtimes H$ определяется следующим образом: $G^{(0)} = X$, $G = X \times H$. Отображения $s: X \times H \rightarrow X$ и $r: X \times H \rightarrow X$ имеют вид $s(x, h) = h^{-1}x$, $r(x, h) = x$. Тем самым, пары (x_1, h_1) и (x_2, h_2) можно перемножить тогда и только тогда, когда $x_2 = h_1^{-1}x_1$, при этом $(x_1, h_1)(x_2, h_2) = (x_1, h_1h_2)$. Кроме того,

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= (x, e), & x \in X, \\ (x, h)^{-1} &= (h^{-1}x, h^{-1}), & x \in X, \quad h \in H.\end{aligned}$$

ПРИМЕР 5.7 (фундаментальный группоид). Пусть X – топологическое пространство, $G = \Pi(X)$ – множество гомотопических классов путей в X со всевозможными конечными точками. Точнее, если $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ – путь, идущий из $x = \gamma(0)$ в $y = \gamma(1)$, то обозначим через $[\gamma]$ гомотопический класс пути γ с фиксированными x и y . Определим группоид $\Pi(X)$ как множество троек $(x, [\gamma], y)$, где $x, y \in X$, γ – путь с началом в $x = \gamma(0)$ и концом в $y = \gamma(1)$, в котором умножение задается произведением путей. Группоид $\Pi(X)$ называется фундаментальным группоидом пространства X .

ПРИМЕР 5.8 (группоид Хефлигера Γ_n [82], [83]). Пусть M – гладкое многообразие. Группоид Γ_M состоит из ростков локальных диффеоморфизмов многообразия M во всевозможных точках многообразия M . Таким образом, $(\Gamma_M)^{(0)} = M$. Если $\gamma \in \Gamma_M$ – росток в точке $x \in M$ диффеоморфизма f некоторой окрестности U точки x на открытое множество $f(U)$, то $s(\gamma) = x$, $r(\gamma) = f(x)$. Композиция в Γ_M задается композицией отображений. Если $M = \mathbb{R}^n$, то группоид Γ_M обозначается через Γ_n .

Группоид голономии $G = G(M, \mathcal{F})$ многообразия со слоением $(M, \mathcal{F})$ определяется следующим образом. Пусть $\sim_h$ – отношение эквивалентности на множестве непрерывных послойных путей $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, полагающее $\gamma_1 \sim_h \gamma_2$, если γ_1 и γ_2 имеют одинаковые начальные и конечные точки и ассоциированные отображения голономии совпадают: $h_{\gamma_1} = h_{\gamma_2}$. Группоид голономии G есть множество классов $\sim_h$ -эквивалентности послойных путей. Пространством единиц $G^{(0)}$ является многообразие M . Умножение в G задается произведением путей. Соответствующие отображения источника и образа $s, r: G \rightarrow M$ задаются формулами $s(\gamma) = \gamma(0)$ и $r(\gamma) = \gamma(1)$. Наконец, диагональное отображение $\Delta: M \rightarrow G$ ставит в соответствие точке $x \in M$ элемент в G , задаваемый постоянным путем $\gamma(t) = x$, $t \in [0, 1]$. Для простоты обозначений будем отождествлять $x \in M$ с элементом $\Delta(x) \in G$.

Для любого $x \in M$ отображение s отображает G^x на слой L_x , проходящий через точку x . Группа G_x^x совпадает с группой голономии слоя L_x . Отображение $s: G^x \rightarrow L_x$ является регулярным накрытием с группой накрытия G_x^x , которое называется голономным накрытием.

Группоид голономии G имеет структуру гладкого (вообще говоря, не являющегося хаусдорфовым и паракомпактным) многообразия размерности $2p + q$. Напомним конструкцию атласа на G [15].

Пусть $\phi: U \rightarrow I^p \times I^q$, $\phi': U' \rightarrow I^p \times I^q$ – две расслоенные карты, $\pi = \text{pr}_{nq} \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\pi' = \text{pr}_{nq} \circ \phi': U' \rightarrow \mathbb{R}^q$ – соответствующие различающие отображения. Расслоенные карты ϕ, ϕ' называются согласованными, если для любых точек $m \in U$ и $m' \in U'$ с $\pi(m) = \pi'(m')$ существует такой послойный путь γ из m в m' , что соответствующее отображение голономии h_γ отображает росток π_m различающего отображения π в точке m в росток $\pi'_{m'}$ различающего отображения π' в точке m' .

Для любой пары согласованных расслоенных карт ϕ и ϕ' обозначим через $W(\phi, \phi')$ подмножество в G , состоящее из всех $\gamma \in G$ с $s(\gamma) = m = \phi^{-1}(x, y) \in U$ и $r(\gamma) = m' = \phi'^{-1}(x', y) \in U'$ таких, что соответствующее отображение голономии h_γ отображает росток π_m различающего отображения $\pi = \text{pr}_{nq} \circ \phi$ в точке m в росток $\pi'_{m'}$ различающего отображения $\pi' = \text{pr}_{nq} \circ \phi'$ в точке m' . Определим координатное отображение

$$\Gamma: W(\phi, \phi') \rightarrow I^p \times I^p \times I^q, \quad (5.1)$$

ставя в соответствие каждому элементу $\gamma \in W(\phi, \phi')$ такому, что $s(\gamma) = m = \phi^{-1}(x, y)$, $r(\gamma) = m' = \phi'^{-1}(x', y)$ и $h_\gamma \pi_m = \pi'_{m'}$, тройку $(x, x', y) \in I^p \times I^p \times I^q$. Как показано в [15], координатные окрестности $W(\phi, \phi')$ образуют атлас $(2p + q)$ -мерного многообразия (вообще говоря, не хаусдорфова и не паракомпактного) на G . Более того, группоид G является гладким группоидом.

Нехаусдорфовость группоида голономии связана с явлением односторонней голономии. Простейший пример слоения с нехаусдорфовым группоидом голономии дается траекториями неособого векторного поля на плоскости, имеющего односторонний предельный цикл. Как показано в [81], группоид голономии является хаусдорфовым тогда и только тогда, когда отображения голономии $H_{T_0 T_1}(\gamma_1)$ и $H_{T_0 T_1}(\gamma_2)$ вдоль любых послойных путей γ_1 и γ_2 с началом в точке x и концом в точке y , задаваемые гладкими трансверсальями T_0 и T_1 , проходящими через точки x и y соответственно, совпадают, если они совпадают на некотором открытом подмножестве $U \subset T_0$ таком, что $x \in \bar{U}$. В частности, группоид голономии хаусдорфов, если голономия тривиальна или вещественно аналитична. Кроме того, группоид голономии риманова слоения является хаусдорфовым. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что G – хаусдорфово многообразие.

ПРИМЕР 5.9. Если $\mathcal{F}$ – простое слоение, задаваемое субмерсией $\pi: M \rightarrow B$, то его группоид голономии G состоит из всех $(x, y) \in M \times M$ таких, что $\pi(x) = \pi(y)$, причем $G^{(0)} = M$, отображения $s: G \rightarrow M$ и $r: G \rightarrow M$ задаются формулами $s(x, y) = y$, $r(x, y) = x$.

ПРИМЕР 5.10. Если слоение $\mathcal{F}$ задается орбитами свободного гладкого действия связной группы Ли H на многообразии M , то его группоид голономии совпадает с группоидом скрещенного произведения $M \rtimes H$.

ПРИМЕР 5.11. Рассмотрим горизонтальное слоение $\mathcal{F}$ на плоском слоеном расслоении M (см. пример 4.6). Предположим, что выполнено следующее условие: если для некоторого элемента $g \in \Gamma$ существует такое открытое множество U , что $xg = x$ для любого $x \in U$, то g является единичным элементом группы Γ . При данном условии группоид голономии G слоения $\mathcal{F}$ изоморфен пространству орбит действия группы Γ на многообразии $\tilde{B} \times \tilde{B} \times F$, задаваемого формулой $(b_1, b_2, f)g = (b_1g, b_2g, \phi(g)f)$, где $(b_1, b_2, f) \in \tilde{B} \times \tilde{B} \times F$, $g \in \Gamma$:

$$G \cong (\tilde{B} \times \tilde{B} \times F)/\Gamma.$$

Обозначим через $[b_1, b_2, f]$ класс эквивалентности элемента $(b_1, b_2, f) \in \tilde{B} \times \tilde{B} \times F$ в $(\tilde{B} \times \tilde{B} \times F)/\Gamma$. Тогда отображения образа и источника в группоиде G задаются формулами

$$r([b_1, b_2, f]) = [b_1, f], \quad s([b_1, b_2, f]) = [b_2, f].$$

Элементы $[b_1, b_2, f]$ и $[b'_1, b'_2, f']$ можно перемножить тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \Gamma$, что $b_2 = b'_1g$, $f = \phi(g)f'$. В этом случае

$$[b_1, b_2, f][b'_1, b'_2, f'] = [b_1g^{-1}, b'_2, f'].$$

Помимо группоида голономии, с данным слоением можно ассоциировать другие группоиды. Прежде всего, это группоид, задаваемый отношением эквивалентности на M , полагающим точки x и y эквивалентными, если они лежат на одном слое слоения (грубый группоид). Как отмечалось выше, этот группоид не является гладким. Можно рассматривать фундаментальный группоид слоения $\Pi(M, \mathcal{F})$, который также состоит из классов эквивалентности послойных путей, но в данном случае два послойных пути называются эквивалентными, если они гомотопны в классе послойных путей с фиксированными конечными точками. Фундаментальный группоид слоения $\Pi(M, \mathcal{F})$ является гладким группоидом (см., например, [84]).

На группоиде голономии G имеется слоение $\mathcal{G}$ размерности $2p$. В любой координатной карте $W(\phi, \phi')$, задаваемой парой согласованных расслоенных карт ϕ и ϕ' , слои слоения $\mathcal{G}$ задаются уравнениями вида $y = \text{const}$. Слой слоения $\mathcal{G}$, проходящий через точку $\gamma \in G$, состоит из всех $\gamma' \in G$ таких, что точки $r(\gamma)$ и $r(\gamma')$ лежат на одном слое слоения $\mathcal{F}$, и совпадает с группоидом голономии данного слоя. Группа голономии слоя слоения $\mathcal{G}$ совпадает с группой голономии соответствующего слоя слоения $\mathcal{F}$.

Дифференциал отображения $(r, s): G \rightarrow M \times M$ отображает изоморфно касательное расслоение $T\mathcal{G}$ к слоению $\mathcal{G}$ на расслоение $F \boxtimes F$ на $M \times M$, поэтому имеется канонический изоморфизм $T\mathcal{G} \cong r^*F \oplus s^*F$.

Распределение H на M , трансверсальное к слоению $\mathcal{F}$, определяет распределение HG на G , трансверсальное к слоению $\mathcal{G}$. Для любого вектора $X \in H_y$ существует единственный вектор $\hat{X} \in T_\gamma G$ такой, что $ds(\hat{X}) = dh_\gamma^{-1}(X)$ и $dr(\hat{X}) = X$, где $dh_\gamma: H_x \rightarrow H_y$ – отображение линейной голономии, ассоциированное с γ . Пространство $H_\gamma G$ состоит из векторов вида $\hat{X} \in T_\gamma G$ для различных $X \in H_y$. В любой координатной карте $W(\phi, \phi')$ на G касательное пространство $T_\gamma \mathcal{G}$ к слоению $\mathcal{G}$ в некоторой точке γ с координатами (x, x', y)

состоит из векторов вида $X \frac{\partial}{\partial x} + X' \frac{\partial}{\partial x'}$, а распределение $H_\gamma G$ – из таких векторов $X \frac{\partial}{\partial x} + X' \frac{\partial}{\partial x'} + Y \frac{\partial}{\partial y}$, что $X \frac{\partial}{\partial x} + Y \frac{\partial}{\partial y} \in H_{(x,y)}$ и $X' \frac{\partial}{\partial x'} + Y \frac{\partial}{\partial y} \in H_{(x',y)}$.

Пусть g_M – риманова метрика на M и $H = F^\perp$, тогда риманова метрика g_G на G определяется следующим образом. Все слагаемые в $T_\gamma G = F_y \oplus F_x \oplus H_\gamma G$ взаимно ортогональны и по определению g_G совпадает с g_M на $F_y \oplus H_\gamma G \cong F_y \oplus H_y = T_y M$ и с g_F на F_x .

Если слоение $\mathcal{F}$ является римановым и g_M – трансверсально проектируемая риманова метрика, то метрика g_G является трансверсально проектируемой и, тем самым, слоение $\mathcal{G}$ риманово. Более того, в этом случае отображения $s: G \rightarrow M$ и $r: G \rightarrow M$ являются римановыми субмерсиями и локально тривиальными расслоениями. В частности, все голономные накрытия G^x слоев слоения $\mathcal{F}$ диффеоморфны [81].

Пусть G – произвольный группоид Ли с множеством единиц $G^{(0)} = M$. Для любого (возможно, нехаусдорфова) гладкого многообразия Z и гладкого отображения $\rho: Z \rightarrow M$ положим

$$Z \times_\rho G = \{(z, \gamma) \in Z \times G : \rho(z) = s(\gamma)\}.$$

Гладким правым действием группоида G на Z назовем отображение $Z \times_\rho G \rightarrow Z$, $(z, \gamma) \mapsto z\gamma$, удовлетворяющее условиям

$$\rho(z\gamma) = r(\gamma), \quad (z\gamma)\gamma' = z(\gamma\gamma'), \quad z \cdot x = x.$$

В качестве примера приведем действие группоида G на M , задаваемое формулами

$$\rho = \text{id}: M \rightarrow M, \quad M \times_\rho G \ni (y, \gamma) \mapsto y\gamma = s(\gamma) \in M.$$

Действие группоида G на Z называется собственным, если:

- (i) отображение $Z \times_\rho G \rightarrow Z \times Z$, $(z, \gamma) \mapsto (z, z\gamma)$, является собственным (т. е. прообраз любого компакта есть компакт);
- (ii) множество классов эквивалентности Z/Γ отношения эквивалентности Γ на Z , полагающего $z \sim z'$, если существует такое $\gamma \in G$, что $z\gamma = z'$, хаусдорфово.

Если Z – G -многообразие, то орбиты G -действия определяют слоение на Z .

5.2. C^* -алгебра и алгебра фон Неймана слоения. В этом пункте мы опишем конструкцию C^* -алгебры, ассоциированной с произвольным слоением. Эту алгебру можно рассматривать как некоммутативный аналог алгебры непрерывных функций на пространстве слоев слоения. Мы будем рассматривать только хаусдорфовы группоиды. По поводу определения C^* -алгебры слоения в случае, когда группоид голономии не является хаусдорфовым, см., например, [13].

Имеется два способа определить C^* -алгебры, ассоциированные со слоением. Первый способ использует вспомогательный выбор гладкой системы Хаара, второй не использует никаких вспомогательных выборов и использует язык полуплотностей.

5.2.1. *Определения, использующие систему Хаара.* В данном пункте мы дадим определение C^* -алгебр, ассоциированных с произвольным гладким группоидом G . На самом деле, предположение гладкости группоида здесь не существенно и все определения можно дать для любого топологического группоида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.12. Гладкой системой Хаара на гладком группоиде G называется семейство положительных мер Радона $\{\nu^x : x \in G^{(0)}\}$ на G , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) носитель меры ν^x совпадает с G^x и ν^x является гладкой положительной плотностью на G^x ;
- 2) семейство $\{\nu^x : x \in G^{(0)}\}$ является левоинвариантным, т. е. для любой непрерывной финитной функции $f \in C_c(G^x)$, $f \geq 0$, и для любого $\gamma \in G$ такого, что $s(\gamma) = x$, $r(\gamma) = y$, имеем

$$\int_{G^y} f(\gamma_1) d\nu^y(\gamma_1) = \int_{G^x} f(\gamma\gamma_1) d\nu^x(\gamma_1);$$

- 3) семейство $\{\nu^x : x \in G^{(0)}\}$ является гладким, т. е. для любой $\phi \in C_c^\infty(G)$ функция

$$G^{(0)} \ni x \mapsto \int_{G^x} \phi(\gamma) d\nu^x(\gamma)$$

является гладкой функцией на $G^{(0)}$.

Для компактного многообразия со слоением $(M, \mathcal{F})$ гладкая система Хаара $\{\nu^x : x \in G^{(0)}\}$ на группоиде голономии G слоения $\mathcal{F}$ задается произвольной гладкой положительной послойной плотностью $\alpha \in C^\infty(M, |T\mathcal{F}|)$. Для любого $x \in M$ положительная мера Радона ν^x на G^x определяется как подъем плотности α при помощи голономного накрытия $s: G^x \rightarrow M$.

Пусть G – гладкий группоид, $G^{(0)} = M$ и $\{\nu^x : x \in M\}$ – гладкая система Хаара. На пространстве $C_c^\infty(G)$ введем структуру инволютивной алгебры по формулам

$$(k_1 * k_2)(\gamma) = \int_{G^x} k_1(\gamma_1) k_2(\gamma_1^{-1}\gamma) d\nu^x(\gamma_1), \quad \gamma \in G^x,$$

$$k^*(\gamma) = \overline{k(\gamma^{-1})}, \quad \gamma \in G.$$

Для любого $x \in M$ имеется естественное представление алгебры $C_c^\infty(G)$ в гильбертовом пространстве $L^2(G^x, \nu^x)$, задаваемое для $k \in C_c^\infty(G)$ и $\zeta \in L^2(G^x, \nu^x)$ формулой

$$R_x(k)\zeta(\gamma) = \int_{G^x} k(\gamma^{-1}\gamma_1)\zeta(\gamma_1) d\nu^x(\gamma_1), \quad r(\gamma) = x.$$

Полношение инволютивной алгебры $C_c^\infty(G)$ по норме

$$\|k\| = \sup_x \|R_x(k)\|$$

называется приведенной C^* -алгеброй группоида G и обозначается через $C_r^*(G)$. Определена также полная C^* -алгебра группоида $C^*(G)$, которая является пополнением инволютивной алгебры $C_c^\infty(G)$ по норме

$$\|k\|_{\max} = \sup \|\pi(k)\|,$$

где точная верхняя грань берется по множеству всех $*$ -представлений π алгебры $C_c^\infty(G)$ в гильбертовых пространствах.

ПРИМЕР 5.13. В примере 5.3 группоид G является гладким, если X – гладкое многообразие. В этом случае $G^x = \{x\}$ для любого $x \in X$ и гладкая система Хаара задается произвольной гладкой функцией на X . Операторные алгебры $C_r^*(G)$ и $C^*(G)$ совпадают с коммутативной C^* -алгеброй $C_0(X)$.

ПРИМЕР 5.14. Главный группоид, введенный в примере 5.4, является гладким, если X – гладкое многообразие. В этом случае любая гладкая система Хаара имеет следующий вид: ν^x – фиксированная положительная гладкая плотность μ в каждом $G^x \cong X$. Операции в $C_c^\infty(G)$ задаются формулами

$$(k_1 * k_2)(x, y) = \int_X k_1(x, z) k_2(z, y) d\mu(z), \quad (x, y) \in X \times X,$$

$$k^*(x, y) = \overline{k(y, x)}, \quad (x, y) \in X \times X,$$

где $k, k_1, k_2 \in C_c^\infty(G)$. Тем самым, элементы $C_c^\infty(G)$ можно рассматривать как ядра интегральных операторов в $C^\infty(X)$ (относительно плотности μ). Для любого $x \in X$ представление R_x ставит в соответствие каждому $k \in C_c^\infty(G) \subset C^\infty(X \times X)$ интегральный оператор в пространстве $L^2(G^x, \nu^x) \cong L^2(X, \mu)$ с интегральным ядром k :

$$R_x(k)u(y) = \int_X k(y, z)u(z) d\mu(z), \quad u \in L^2(X, \mu).$$

Операторные алгебры $C_r^*(G)$ и $C^*(G)$ совпадают с алгеброй $\mathcal{K}(L^2(X, \mu))$ компактных операторов в $L^2(X, \mu)$.

ПРИМЕР 5.15. В примере 5.5 гладкая система Хаара задается левоинвариантной мерой Хаара dh на H : $\nu^x = dh$. Умножение в $C_c^\infty(G)$ – классическая операция свертки, задаваемая для любых функций $u, v \in C_c^\infty(H)$ формулой

$$(u * v)(g) = \int_H u(h)v(h^{-1}g) dh, \quad g \in H,$$

инволюция задается формулой

$$u^*(g) = \overline{u(g^{-1})}, \quad u \in C_c^\infty(H),$$

и операторные алгебры $C_r^*(G)$ и $C^*(G)$ – это групповые C^* -алгебры $C_r^*(H)$ и $C^*(H)$.

ПРИМЕР 5.16. В примере 5.6 для любого $x \in X$ многообразие $G^x = \{(x, h) : h \in H\}$ диффеоморфно H и гладкую систему Хаара на G можно определить, задав произвольную меру Хаара на H . Умножение в $C_c^\infty(G)$ задается для любых функций $u, v \in C_c^\infty(X \times H)$ формулой

$$(u * v)(x, g) = \int_H u(x, h)v(h^{-1}x, h^{-1}g) dh, \quad (x, g) \in X \times H,$$

инволюция задается для функции $u \in C_c^\infty(X \times H)$ формулой

$$u^*(x, g) = \overline{u(g^{-1}x, g^{-1})}, \quad (x, g) \in X \times H.$$

Операторные алгебры $C_r^*(G)$ и $C^*(G)$, соответствующие группоиду скрещенного произведения $G = X \rtimes H$, совпадают со скрещенными произведениями $C_0(X) \rtimes_r H$ и $C_0(X) \rtimes H$ алгебры $C_0(X)$ на группу H относительно индуцированного действия группы H на $C_0(X)$.

Если группа H дискретна, то элементами алгебры $C_c^\infty(G)$ являются такие семейства $\{a_\gamma \in C_c^\infty(X) : \gamma \in H\}$, что $a_\gamma \neq 0$ для конечного числа элементов γ . Их удобно записывать в виде $a = \sum_{\gamma \in H} a_\gamma U_\gamma$. Умножение в алгебре $C_c^\infty(G)$ записывается в виде

$$(a_{\gamma_1} U_{\gamma_1})(b_{\gamma_2} U_{\gamma_2}) = (a_{\gamma_1} T_{\gamma_1}(b_{\gamma_2})) U_{\gamma_1 \gamma_2},$$

где T_γ обозначает оператор в $C_0(X)$, индуцированный действием $\gamma \in H$:

$$T_\gamma f(x) = f(\gamma^{-1}x), \quad x \in X, \quad f \in C_0(X).$$

Инволюция в алгебре $C_c^\infty(G)$ задается формулой

$$(a_\gamma U_\gamma)^* = T_{\gamma^{-1}}(\bar{a}_\gamma) U_{\gamma^{-1}}.$$

Пусть G – группоид голономии слоения $\mathcal{F}$ на компактном многообразии M . Элементы алгебры $C_c^\infty(G)$ можно рассматривать как семейства ядер интегральных операторов вдоль слоев слоения (точнее, на голономных накрытиях G^x). Именно, каждому $k \in C_c^\infty(G)$ соответствует семейство $\{R_x(k) : x \in M\}$, где $R_x(k)$ – интегральный оператор в пространстве $L^2(G^x, \nu^x)$, задаваемый интегральным ядром

$$K(\gamma_1, \gamma_2) = k(\gamma_1^{-1} \gamma_2), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in G^x.$$

Умножение элементов k_1 и k_2 из $C_c^\infty(G)$ соответствует композиции интегральных операторов $\{R_x(k_1)R_x(k_2) : x \in M\}$. Мы будем называть C^* -алгебру $C^*(G)$ (соответственно $C_r^*(G)$), ассоциированную с группоидом голономии G слоения $(M, \mathcal{F})$, C^* -алгеброй слоения $(M, \mathcal{F})$ (соответственно приведенной C^* -алгеброй слоения $(M, \mathcal{F})$) и обозначать через $C^*(M, \mathcal{F})$ (соответственно $C_r^*(M, \mathcal{F})$).

ПРИМЕР 5.17. Пусть $\mathcal{F}$ – простое слоение на компактном многообразии M , определяемое субмерсией $\pi : M \rightarrow B$. Зафиксируем гладкую систему Хаара на нем. Для любого $y \in B$ обозначим через $\Psi^{-\infty}(Z_y)$ инволютивную алгебру интегральных операторов с гладким ядром, действующих в пространстве $C^\infty(Z_y)$, где Z_y – слой расслоения π в точке y . Рассмотрим поле $\Psi^{-\infty}(M/B)$ инволютивных алгебр на B , слой которого в точке $y \in B$ есть $\Psi^{-\infty}(Z_y)$. Для любого сечения σ поля $\Psi^{-\infty}(M/B)$ интегральные ядра операторов σ_y корректно определяют функцию на группоиде голономии G слоения $\mathcal{F}$. Скажем, что сечение σ гладкое, если соответствующая функция на G гладкая. Таким образом, получаем описание алгебры $C^\infty(G)$ как алгебры гладких сечений поля $\Psi^{-\infty}(M/B)$ послойных интегральных операторов с гладким ядром.

ПРИМЕР 5.18. Рассмотрим пример линейного слоения на торе. Таким образом, пусть $M = T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ – двумерный тор и слоение $\mathcal{F}_\theta$ задается траекториями векторного поля $X = \frac{\partial}{\partial x} + \theta \frac{\partial}{\partial y}$, где $\theta \in \mathbb{R}$ – фиксированное иррациональное число.

Поскольку данное слоение задается орбитами свободного действия группы $\mathbb{R}$ на T^2 , его группоид голономии совпадает с группоидом скрещенного произведения $T^2 \rtimes \mathbb{R}$. Тем самым, $G = T^2 \times \mathbb{R}$, $G^{(0)} = T^2$, $s(x, y, t) = (x - t, y - \theta t)$, $r(x, y, t) = (x, y)$, $(x, y) \in T^2$, $t \in \mathbb{R}$, и умножение задается формулой

$$(x_1, y_1, t_1)(x_2, y_2, t_2) = (x_1, y_1, t_1 + t_2),$$

если $x_2 = x_1 - t_1$, $y_2 = y_1 - \theta t_1$.

Приведенная C^* -алгебра $C_r^*(T^2, \mathcal{F}_\theta)$ линейного слоения $\mathcal{F}_\theta$ на T^2 совпадает с приведенным скрещенным произведением $C(T^2) \rtimes_r \mathbb{R}$. Поэтому произведение $k_1 * k_2$ элементов $k_1, k_2 \in C_c^\infty(T^2 \times \mathbb{R}) \subset C(T^2) \rtimes_r \mathbb{R}$ задается формулой

$$(k_1 * k_2)(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x_1, y_1, t_1) k_2(x - t_1, y - \theta t_1, t - t_1) dt_1, \quad (x, y) \in T^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

и для любого $k \in C_c^\infty(T^2 \times \mathbb{R})$

$$k^*(x, y, t) = \overline{k(x - t, y - \theta t, -t)}, \quad (x, y) \in T^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для любого $k \in C_c^\infty(T^2 \times \mathbb{R})$ и для любого $(x, y) \in T^2$ оператор $R_{(x, y)}(k)$ в пространстве $L^2(G^{(x, y)}, \nu^{(x, y)}) \cong L^2(\mathbb{R}, dt)$ имеет вид: для любого $u \in L^2(\mathbb{R}, dt)$

$$R_{(x, y)}(k)u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x - t_1, y - \theta t_1, t - t_1) u(t_1) dt_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если θ рационально, то линейное слоение на T^2 задается орбитами свободного действия группы S^1 на T^2 и его группоид голономии совпадает с группоидом скрещенного произведения $G = T^2 \rtimes S^1$.

Приведем некоторые факты, связывающие структуру приведенной C^* -алгебры слоения $C_r^*(M, \mathcal{F})$ с топологией слоения $\mathcal{F}$ (подробнее см. [85], [86]).

ТЕОРЕМА 5.19 [85]. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением.

- 1) C^* -алгебра $C_r^*(M, \mathcal{F})$ проста тогда и только тогда, когда слоение $\mathcal{F}$ минимально, т.е. любой его слой всюду плотен в M .
- 2) C^* -алгебра $C_r^*(M, \mathcal{F})$ примитивна тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ (топологически) транзитивно, т.е. оно имеет слой, всюду плотный в M .
- 3) Если слоение $\mathcal{F}$ аменабельно в том смысле, что $C^*(M, \mathcal{F}) = C_r^*(M, \mathcal{F})$, то C^* -алгебра $C_r^*(M, \mathcal{F})$ имеет представление, состоящее из компактных операторов, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ имеет компактный слой.

В работе [85] дано описание пространства примитивных идеалов C^* -алгебры $C_r^*(M, \mathcal{F})$.

5.2.2. Определение, использующее полуплотности. В этом пункте мы дадим определения операторных алгебр, ассоциированных с многообразием со слоением, не использующие выбора системы Хаара. Для этого мы будем использовать язык плотностей.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением. Рассмотрим векторное расслоение послойных полуплотностей $|T\mathcal{F}|^{1/2}$ на M . Используя отображения источника s и образа r , поднимем расслоение $|T\mathcal{F}|^{1/2}$ до векторных

расслоений $s^*(|T\mathcal{F}|^{1/2})$ и $r^*(|T\mathcal{F}|^{1/2})$ на группоиде голономии G . Определим векторное расслоение $|T\mathcal{G}|^{1/2}$ на G по формуле

$$|T\mathcal{G}|^{1/2} = r^*(|T\mathcal{F}|^{1/2}) \otimes s^*(|T\mathcal{F}|^{1/2}).$$

Расслоение $|T\mathcal{G}|^{1/2}$ естественно отождествляется с расслоением послойных полуплотностей на многообразии со слоением $(G, \mathcal{G})$.

Структура инволютивной алгебры на $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ вводится по формулам

$$\begin{aligned} (\sigma_1 * \sigma_2)(\gamma) &= \int_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} \sigma_1(\gamma_1) \sigma_2(\gamma_2), \quad \gamma \in G, \\ \sigma^*(\gamma) &= \overline{\sigma(\gamma^{-1})}, \quad \gamma \in G, \end{aligned}$$

где $\sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Формулу для $\sigma_1 * \sigma_2$ следует понимать следующим образом. Если записать $\gamma: x \rightarrow y, \gamma_1: z \rightarrow y$ и $\gamma_2: x \rightarrow z$, то

$$\begin{aligned} \sigma_1(\gamma_1) \sigma_2(\gamma_2) &\in |T_y \mathcal{F}|^{1/2} \otimes |T_z \mathcal{F}|^{1/2} \otimes |T_z \mathcal{F}|^{1/2} \otimes |T_x \mathcal{F}|^{1/2} \\ &\cong |T_y \mathcal{F}|^{1/2} \otimes |T_z \mathcal{F}|^1 \otimes |T_x \mathcal{F}|^{1/2}, \end{aligned}$$

и, интегрируя $|T_z \mathcal{F}|^1$ -компоненту в $\sigma_1(\gamma_1) \sigma_2(\gamma_2)$ по $z \in M$, мы получаем корректно определенное сечение расслоения $r^*(|T\mathcal{F}|^{1/2}) \otimes s^*(|T\mathcal{F}|^{1/2}) = |T\mathcal{G}|^{1/2}$.

5.3. Векторные расслоения и поля гильбертовых пространств. Естественным аналогом понятия векторного расслоения на пространстве слоев слоения является понятие голономно эквивариантного векторного расслоения или векторного G -расслоения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.20. Векторное расслоение E (вещественное или комплексное) на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ называется голономно эквивариантным, если задано представление T группоида голономии G слоения $\mathcal{F}$ в слоях расслоения E , т. е., для любого $\gamma \in G, \gamma: x \rightarrow y$, определен такой линейный оператор $T(\gamma): E_x \rightarrow E_y$, что $T(\gamma_1 \gamma_2) = T(\gamma_1) T(\gamma_2)$ для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ с $r(\gamma_2) = s(\gamma_1)$.

Эрмитово (соответственно риманово) векторное расслоение E на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ называется голономно эквивариантным, если оно является голономно эквивариантным векторным расслоением и представление T унитарно (соответственно ортогонально): $T(\gamma^{-1}) = T(\gamma)^*$ для любого $\gamma \in G$.

Для любого голономно эквивариантного векторного расслоения $E \rightarrow M$ действие группоида G на E определяет горизонтальное слоение $\mathcal{F}_E$ на E той же размерности, что и слоение $\mathcal{F}$. Слой слоения $\mathcal{F}_E$, проходящий через точку $v \in E$, состоит из всех точек вида $T(\gamma)^{-1}(v)$ с $\gamma \in G, r(\gamma) = \pi(v)$. Тем самым, любое голономно эквивариантное векторное расслоение является слоевым в смысле работы [87].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.21. Векторное расслоение $p: P \rightarrow M$ называется слоевым, если на P имеется слоение $\mathcal{F}$ той же размерности, что и $\mathcal{F}$, слои которого трансверсальны слоям отображения p и отображаются при отображении p в слои слоения $\mathcal{F}$.

Эквивалентным образом, можно сказать, что слоеное векторное расслоение – это такое векторное расслоение P на M , для которого существует плоская связность в пространстве $C^\infty(M, P)$, определенная вдоль слоев слоения $\mathcal{F}$, т. е. такой оператор

$$\nabla: \mathcal{X}(\mathcal{F}) \times C^\infty(M, P) \rightarrow C^\infty(M, P),$$

который удовлетворяет стандартным условиям

$$\nabla_f X = f \nabla_X, \quad \nabla_X(fs) = (Xf)s + f \nabla_X s$$

для любых $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$, $s \in C^\infty(M, P)$, а также условию плоскостности

$$[\nabla_X, \nabla_Y] = \nabla_{[X, Y]}, \quad X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{F}).$$

Параллельный перенос вдоль послойных путей, задаваемый связностью ∇ , определяет действие фундаментального группоида слоения $\Pi(M, \mathcal{F})$ в слоях слоеного векторного расслоения P . Вообще говоря, параллельный перенос может зависеть от голономии соответствующего пути, поэтому это действие не обязательно опускается до действия группоида голономии в слоях расслоения P , и, тем самым, слоеное расслоение необязательно является голономно эквивариантным.

ПРИМЕР 5.22. Нормальное расслоение $\tau_x = T_x M / T_x \mathcal{F}$, $x \in M$, является голономно эквивариантным векторным расслоением, если наделять его действием группоида голономии G посредством отображения линейной голономии $dh_\gamma: \tau_x \rightarrow \tau_y$, $\gamma: x \rightarrow y$. Соответствующая частичная плоская связность, определенная вдоль слоев слоения $\mathcal{F}$, – связность Ботта $\overset{\circ}{\nabla}$ (см. (4.2)). Нормальное расслоение τ является голономно эквивариантным римановым векторным расслоением, если $\mathcal{F}$ – риманово слоение.

Голономно инвариантными являются также конормальное расслоение $N^* \mathcal{F}$, наделенное действием группоида голономии G посредством отображения линейной голономии $(dh_\gamma^*)^{-1}: N_x^* \mathcal{F} \rightarrow N_y^* \mathcal{F}$ для $\gamma: x \rightarrow y$, и, более обще, произвольное расслоение тензоров, ассоциированное с нормальным расслоением τ .

Для любого голономно эквивариантного векторного расслоения E на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ определено естественное представление R_E алгебры $C_c^\infty(G)$ в пространстве $C^\infty(M, E)$ сечений этого расслоения. Пусть $\{\nu^x: x \in G^{(0)}\}$ – гладкая система Хаара на G . Для любого $u \in C^\infty(M, E)$ сечение $R_E(k)u \in C^\infty(M, E)$ задается формулой

$$R_E(k)u(x) = \int_{G^x} k(\gamma) T(\gamma)[u(s(\gamma))] d\nu^x(\gamma), \quad x \in M. \quad (5.2)$$

Если E – голономно эквивариантное эрмитово векторное расслоение на M , то представление R_E является *-представлением и потому оно продолжается до *-представления C^* -алгебры $C^*(M, \mathcal{F})$.

В [13] введено понятие непрерывного поля гильбертовых пространств на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}$ и показано, что имеется взаимно однозначное соответствие между непрерывными полями гильбертовых пространств на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}$ и гильбертовыми C^* -модулями над C^* -алгеброй $C_r^*(M, \mathcal{F})$.

Пусть $H = \{H_x : x \in M\}$ – измеримое поле гильбертовых пространств на M , наделенное унитарным представлением группоида голономии G :

$$U(\gamma): H_x \rightarrow H_y, \quad \gamma \in G, \quad \gamma: x \rightarrow y.$$

Для любых измеримых сечений ξ, η поля H определим функцию (ξ, η) на G по формуле

$$(\xi, \eta)(\gamma) = \langle \xi_y, U(\gamma)\eta_x \rangle, \quad \gamma \in G, \quad \gamma: x \rightarrow y.$$

Зафиксируем произвольную гладкую систему Хаара $\{\nu^x : x \in M\}$ на G . Для любого измеримого сечения ξ поля H обозначим через $\|\xi\|_\infty$ наименьшее число $c \in [0, +\infty]$ такое, что для любого $y \in M$ и для любого $\alpha \in H_y$ справедливо неравенство

$$\int_{G^y} |\langle \alpha, U(\gamma)\xi_x \rangle|^2 d\nu^y(\gamma) \leq c\|\alpha\|^2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.23. Поле $\{H_x : x \in M\}$ называется непрерывным полем гильбертовых пространств на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}$, если выделено такое линейное пространство Γ его сечений, что

- 1) Γ содержит счетное тотальное $\|\cdot\|_\infty$ -плотное подмножество, в частности, $\|\cdot\|_\infty$ конечна на Γ ;
- 2) для любых $\xi, \eta \in \Gamma$ имеем $(\xi, \eta) \in C_r^*(M, \mathcal{F})$;
- 3) Γ замкнуто по $\|\cdot\|_\infty$ -норме;
- 4) для любых $f \in C_c^\infty(G)$ и $\xi \in \Gamma$ имеем $\xi * f \in \Gamma$, где (ср. (5.2))

$$(\xi * f)(y) = \int_{G^y} f(\gamma)U(\gamma)\xi(x) d\nu^y(\gamma).$$

Мы не будем приводить общую конструкцию гильбертова C^* -модуля над C^* -алгеброй $C_r^*(M, \mathcal{F})$, ассоциированного с произвольным непрерывным полем гильбертовых пространств на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}$, и рассмотрим только один важный частный случай. Пусть E – векторное расслоение на многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$. Оно определяет непрерывное поле гильбертовых пространств на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}$ и, тем самым, гильбертов C^* -модуль над C^* -алгеброй $C_r^*(M, \mathcal{F})$. Его можно определить двумя способами в зависимости от того, какие модули мы хотим рассматривать, левые или правые. Если мы хотим работать с левыми модулями, то, как в работе [15], для $x \in M$ мы положим $H_x = L^2(G^x, s^*E)$ и для любого $\gamma: x \rightarrow y$ определим оператор $L(\gamma): L^2(G^x, s^*E) \rightarrow L^2(G^y, s^*E)$, действие которого на $\xi \in L^2(G^x, s^*E)$ задается формулой

$$L(\gamma)\xi(\gamma_1) = \xi(\gamma^{-1}\gamma_1), \quad \gamma_1 \in G^y. \quad (5.3)$$

Если мы хотим работать с правыми модулями, то, как в работах [13], [88] для $x \in M$ мы положим $H_x = L^2(G_x, r^*E)$ и для любого $\gamma: x \rightarrow y$ определим оператор $R(\gamma): L^2(G_x, r^*E) \rightarrow L^2(G_y, r^*E)$, действие которого на $\xi \in L^2(G_x, r^*E)$ задается формулой

$$R(\gamma)\xi(\gamma_1) = \xi(\gamma_1\gamma), \quad \gamma_1 \in G_y. \quad (5.4)$$

Опишем соответствующий правый гильбертов C^* -модуль над C^* -алгеброй $C_r^*(M, \mathcal{F})$ [13], [88]. Начнем с определения предгильбертова $C_c^\infty(G)$ -модуля $\mathcal{E}_\infty$. Как линейное пространство, $\mathcal{E}_\infty$ совпадает с $C_c^\infty(G, r^*E)$. Структура модуля на $\mathcal{E}_\infty$ вводится следующим образом: действие $f \in C_c^\infty(G)$ на $s \in \mathcal{E}_\infty$ задается формулой

$$(s * f)(\gamma) = \int_{G^y} s(\gamma') f(\gamma'^{-1}\gamma) d\nu^y(\gamma'), \quad \gamma \in G^y,$$

и скалярное произведение на $\mathcal{E}_\infty$ со значениями в $C_c^\infty(G)$ задается формулой

$$\langle s_1, s_2 \rangle(\gamma) = \int_{G^y} \langle s_1(\gamma'^{-1}), s_2(\gamma'^{-1}\gamma) \rangle_{E_{s(\gamma')}} d\nu^y(\gamma'), \quad s_1, s_2 \in \mathcal{E}_\infty.$$

Имеется также левое действие алгебры $C^\infty(M)$ на $\mathcal{E}_\infty$, задаваемое формулой

$$(a \cdot s)(\gamma) = a(y)s(\gamma), \quad \gamma \in G^y,$$

где $a \in C_c^\infty(M)$ и $s \in \mathcal{E}_\infty$.

Пополнение пространства $\mathcal{E}_\infty$ по норме $\|s\| = \|R(\langle s, s \rangle)\|^{1/2}$ определяет гильбертов C^* -модуль над алгеброй $C_r^*(M, \mathcal{F})$, который мы обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{M,E}$. Он наделен $C_r^*(M, \mathcal{F})$ -полуторалинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ со значениями в $C_r^*(M, \mathcal{F})$, являющейся продолжением по непрерывности полуторалинейной формы на $\mathcal{E}_\infty$. Тем самым, $\mathcal{E}_{M,E}$ является $C(M)$ - $C_r^*(M, \mathcal{F})$ -бимодулем.

Если E голономно эквивариантно, то имеется левое действие алгебры $C_c^\infty(G)$ на $\mathcal{E}_\infty$, задаваемое формулой

$$(f * s)(\gamma) = \int_{G^y} f(\gamma') T(\gamma') [s(\gamma'^{-1}\gamma)] d\nu^y(\gamma'), \quad \gamma \in G^y,$$

где $f \in C_c^\infty(G)$ и $s \in \mathcal{E}_\infty$. В отличие от правого действия, левое действие не продолжается до действия алгебры $C_r^*(M, \mathcal{F})$ ограниченными эндоморфизмами гильбертова C^* -модуля $\mathcal{E}$ над алгеброй $C_r^*(M, \mathcal{F})$. Тем не менее, используя методы редукции к максимальной компактной подгруппе, разработанные Каспаровым [89], можно построить элемент $[E] \in KK(C^*(M, \mathcal{F}), C^*(M, \mathcal{F}))$, соответствующий произвольному голономно эквивариантному расслоению E . Это соответствие является обобщением отображения $j^G: KK^G(C_0(X), C_0(Y)) \rightarrow KK^G(C_0(X) \rtimes G, C_0(Y) \rtimes G)$ для любых G -многообразий X и Y , построенного Каспаровым [89].

5.4. Строгая эквивалентность по Морите и трансверсали. Рассмотрим компактное многообразие со слоением $(M, \mathcal{F})$. Выбор полной трансверсали к слоению позволяет редуцировать группоид голономии G слоения $\mathcal{F}$ к эквивалентному группоиду, который во многих случаях оказывается более простым.

Для любых двух подмножеств $A, B \subset M$ обозначим

$$G_B^A = \{\gamma \in G : r(\gamma) \in A, s(\gamma) \in B\}.$$

В частности,

$$G_T^M = G_T = \{\gamma \in G : s(\gamma) \in T\}.$$

Если T – полная трансверсаль, то G_T^T является подмногообразием и подгруппоидом в G . Он называется приведенным группоидом голономии.

Как показано в [86], если T является полной трансверсалью, то приведенные C^* -алгебры $C_r^*(M, \mathcal{F})$ и $C_r^*(G_T^T)$ строго эквивалентны по Морите. В частности, отсюда легко следует, что

$$C_r^*(M, \mathcal{F}) \cong \mathcal{K} \otimes C_r^*(G_T^T).$$

Опишем конструкцию бимодуля $C_r^*(M, \mathcal{F})$ - $C_r^*(G_T^T)$ -эквивалентности, задающего строгую эквивалентность по Морите алгебр $C_r^*(M, \mathcal{F})$ и $C_r^*(G_T^T)$, следуя работе [90].

Рассмотрим многообразие $P = G_T$. На P имеется естественное левое действие группоида G , задаваемое левым умножением в группоиде G , и правое действие группоида G_T^T , задаваемое правым умножением в группоиде G . Эти действия коммутируют друг с другом. На языке работы [90] многообразие P является (G, G_T^T) -эквивалентностью.

Соответственно имеются левое действие алгебры $C_c^\infty(G)$ на пространстве $C_c^\infty(G_T)$, задаваемое формулой: для любых $f \in C_c^\infty(G)$ и $\varphi \in C_c^\infty(G_T)$

$$(f \cdot \varphi)(p) = \int_{G^r(p)} f(\gamma) \varphi(\gamma^{-1}p) d\nu^{r(p)}(\gamma), \quad p \in G_T,$$

и правое действие алгебры $C_c^\infty(G_T^T)$ на пространстве $C_c^\infty(G_T)$, задаваемое формулой: для любых $g \in C_c^\infty(G_T^T)$ и $\varphi \in C_c^\infty(G_T)$

$$(\varphi \cdot g)(p) = \sum_{\gamma \in G_s^T(p)} \varphi(p\gamma) g(\gamma^{-1}), \quad p \in G_T.$$

Скалярное произведение на пространстве $C_c^\infty(G_T)$ со значениями в алгебре $C_c^\infty(G_T^T)$ задается формулой: для любых $\varphi, \psi \in C_c^\infty(G_T)$

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{C_c^\infty(G_T)}(\gamma) = \int_{G^r(p)} \overline{\varphi(\gamma_1^{-1}p)} \psi(\gamma_1^{-1}p\gamma) d\nu^{r(p)}(\gamma_1), \quad \gamma \in G_T^T,$$

где $p \in G^r(\gamma)$ – произвольная точка (правая часть формулы не зависит от выбора p). Аналогичным образом, скалярное произведение на пространстве $C_c^\infty(G_T)$ со значениями в алгебре $C_c^\infty(G)$ задается формулой: для любых $\varphi, \psi \in C_c^\infty(G_T)$

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{C_c^\infty(G)}(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \in G_s^T(p)} \varphi(\gamma^{-1}p\gamma_1) \overline{\psi(p\gamma_1)}, \quad \gamma \in G,$$

где $p \in G^r(\gamma)$ – произвольная точка (правая часть формулы не зависит от выбора p).

Как следствие, получаем изоморфизм групп гомологий Хохшильда, циклических гомологий и периодических циклических гомологий алгебр $C_c^\infty(G)$ и $C_c^\infty(G_T^T)$ и K -теорий C^* -алгебр $C_r^*(M, \mathcal{F})$ и $C_r^*(G_T^T)$. В работе [77] доказано также, что естественное вложение $G_T^T \subset G$ индуцирует гомотопическую эквивалентность $BG_T^T \simeq BG$ классифицирующих пространств группоидов G_T^T и G (см. п. 5.5).

ПРИМЕР 5.24. Если $\mathcal{F}$ – простое слоение, задающееся расслоением $M \rightarrow B$, то C^* -алгебра $C_r^*(M, \mathcal{F})$ строго эквивалентна по Морите C^* -алгебре $C_0(B)$.

ПРИМЕР 5.25. Рассмотрим слоение $\mathcal{F}$ на многообразии $M = \tilde{B} \times_{\Gamma} F$, получающееся из многообразия B и гомоморфизма $\phi: \Gamma = \pi_1(B) \rightarrow \text{Diff}(F)$ при помощи конструкции надстройки (см. пример 4.6). Образ множества $\{b_0\} \times F \subset \tilde{B} \times F$ ($b_0 \in \tilde{B}$ – произвольный элемент) при проекции $\tilde{B} \times F \rightarrow M$ является полной трансверсалью к $\mathcal{F}$. Если выполнено условие, приведенное в примере 5.11, то алгебра $C_r^*(M, \mathcal{F})$ строго эквивалентна по Морите приведенному скрещенному произведению $C(F) \rtimes_r \Gamma$.

ПРИМЕР 5.26. Рассмотрим линейное слоение $\mathcal{F}_{\theta}$ на двумерном торе T^2 , где $\theta \in \mathbb{R}$ – фиксированное иррациональное число, и трансверсаль T , задаваемую уравнением $y = 0$. Пространство слоев слоения $\mathcal{F}_{\theta}$ отождествляется с пространством орбит $\mathbb{Z}$ -действия на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, порождаемого вращением

$$R_{\theta}(x) = x - \theta \pmod{1}, \quad x \in S^1.$$

Алгебра $A_{\theta} = C^*(G_T^T)$ совпадает со скрещенным произведением $C(S^1) \rtimes \mathbb{Z}$ алгебры $C(S^1)$ на группу $\mathbb{Z}$ относительно $\mathbb{Z}$ -действия R_{θ} на $C(S^1)$. Можно показать, что алгебра A_{θ} порождается элементами U и V , удовлетворяющими соотношению $VU = e^{2\pi i \theta} UV$. Она конкретно реализуется как равномерное замыкание подалгебры алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $L^2(S^1 \times \mathbb{Z})$, состоящей из конечных сумм вида $\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} a_{nm} u^n v^m$, где $a_{nm} \in \mathbb{C}$ и операторы u и v имеют следующий вид: для $f \in L^2(S^1 \times \mathbb{Z})$

$$uf(x, n) = f(x, n+1), \quad vf(x, n) = e^{2\pi i(x-n\theta)} f(x, n), \quad x \in S^1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Во многих случаях в качестве плотной подалгебры алгебры A_{θ} удобно рассматривать алгебру

$$\mathcal{A}_{\theta} = \left\{ a = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} a_{nm} U^n V^m : \{a_{nm}\} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \right\},$$

где $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^2)$ – пространство быстро убывающих последовательностей (т.е. таких последовательностей, что для любого натурального k справедливо условие $\sup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} (|n| + |m|)^k |a_{nm}| < \infty$).

При $\theta = 0$ алгебра A_{θ} коммутативна и изоморфна коммутативной C^* -алгебре непрерывных функций на двумерном торе T^2 . Поэтому при произвольном θ алгебру A_{θ} часто называют алгеброй непрерывных функций на некоммутативном торе T_{θ}^2 и используют обозначения $\mathcal{A}_{\theta} = C^{\infty}(T_{\theta}^2)$, $A_{\theta} = C(T_{\theta}^2)$. Алгебра A_{θ} была введена в работе [91] (см. также [92]) и нашла многочисленные приложения в математике и физике (см., например, обзор [93]).

Таким образом, C^* -алгебра $C_r^*(T^2, \mathcal{F}_{\theta})$ линейного слоения на T^2 строго эквивалентна по Морите алгебре A_{θ} .

Важное свойство группоида G_T^T , ассоциированного с полной трансверсалью T , состоит в том (см. [94]), что он является этальным группоидом, т. е. отображение источника $s: G \rightarrow G^{(0)}$ является локальным диффеоморфизмом. Согласно [94], гладкий группоид эквивалентен этальному группоиду тогда и только тогда, когда все его группы изотропии G_x^x дискретны. В последнем случае такой группоид называется группоидом слоения (foliation groupoid).

Можно ввести отношение эквивалентности для группоидов, аналогичное отношению строгой эквивалентности по Морите для C^* -алгебр [77], [90] (см. также [94]). Неформально говоря, два группоида эквивалентны, если они имеют одинаковые пространства орбит и, тем самым, одинаковую трансверсальную геометрию. В [90] доказано, что если группоиды G и H эквивалентны, то их приведенные C^* -алгебры строго эквивалентны по Морите.

5.5. K -теория C^* -алгебр слоения и гипотеза Баума–Конна. Вычисление групп K -теории для C^* -алгебр слоения является непростой задачей. Достаточно просто эта задача решается для слоений с собственным группоидом голономии. Группоид голономии G_X слоения $\mathcal{F}_X$ на многообразии X называется собственным, если отображение $(r, s): G_X \rightarrow X \times X$ является собственным. Если группоид голономии слоения $(X, \mathcal{F}_X)$ является собственным, то слоение $\mathcal{F}_X$ является собственным, т. е. каждый его слой является вложенным подмногообразием многообразия X . Пространство слоев $X/\mathcal{F}_X$ слоения $(X, \mathcal{F}_X)$ с собственным группоидом голономии является орбифолдом, и группа $K(C^*(X, \mathcal{F}_X))$ совпадает с K -теорией, определяемой G_X -эквивариантными расслоениями на X , носитель которых компактен в $X/\mathcal{F}_X$ (см. [95]).

В общем случае в работе [96] (см. также [88]) была предложена геометрическая конструкция элементов группы $K(C^*(M, \mathcal{F}))$. Она основана на определении геометрической K -теории $K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F})$. Прежде чем привести это определение, введем некоторые вспомогательные понятия.

Нам будет необходимо понятие гладкого отображения f из пространства $M_1/\mathcal{F}_1$ слоев слоения $\mathcal{F}_1$ на многообразии M_1 в пространство $M_2/\mathcal{F}_2$ слоев слоения $\mathcal{F}_2$ на многообразии M_2 . Гладкое отображение $f: M_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ можно определить как коцикл (U_i, γ_{ij}) на M_1 со значениями в группоиде голономии G_2 слоения $\mathcal{F}_2$. Здесь $\{U_i\}_{i \in A}$ – открытое покрытие многообразия M_1 , $\gamma_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow G_2$ – гладкие отображения, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma_{ij}(x)\gamma_{jk}(x) = \gamma_{ik}(x), \quad x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Более точно, скажем, что два коцикла (U_i, γ_{ij}) и (U'_i, γ'_{ij}) эквивалентны, если они продолжаются до коцикла на дизъюнктном объединении покрытий $\{U_i\}$ и $\{U'_i\}$. Отображение $f: M_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ определяется как класс эквивалентности коциклов. Это определение можно понимать следующим образом. Отображения $\gamma_{ii}: U_i \rightarrow (G_2)^{(0)} = M_2$ представляют собой локальные подъемы отображения $f: U_i \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$. Тот факт, что при различных i и j и при $x \in U_i \cap U_j$ точки $f_i(x)$ и $f_j(x)$ лежат на одном слое слоения $\mathcal{F}_2$, описывается заданием элемента $\gamma_{ij}(x): f_j(x) \rightarrow f_i(x)$ группоида голономии G_2 .

График отображения $f: M_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$, задаваемого коциклом (U_i, γ_{ij}) , есть гладкое (необязательно хаусдорфово) многообразие G_f , которое определяется

как множество классов эквивалентности на множестве $\{(x, i, \gamma) \in M_1 \times A \times G_2 : x \in U_i, r(\gamma) = f_i(x)\}$ относительно отношения эквивалентности, полагающего $(x, i, \gamma) \sim (x', j, \gamma')$, если $x = x'$ и $\gamma_{ji}(x) = \gamma' \gamma^{-1}$. Имеется гладкое отображение $r_f: G_f \rightarrow M_1$, $r_f(x, i, \gamma) = x$, и правое действие группоида G_2 на G_f , задаваемое отображениями $s_f: G_f \rightarrow M_2$, $s_f(x, i, \gamma) = s(\gamma)$, и $G_f \times_{s_f} G_2 \rightarrow G_f$, $(x, i, \gamma) \gamma' = (x, i, \gamma \gamma')$.

Описание отображения при помощи графика можно обобщить на случай отображений из $M_1/\mathcal{F}_1$ в $M_2/\mathcal{F}_2$ следующим образом. Пусть G_1, G_2 – группоиды голономии слоений $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ соответственно. График G_f отображения $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ является гладким (необязательно хаусдорфовым) многообразием, наделенным гладкими отображениями $r_f: G_f \rightarrow M_1$ и $s_f: G_f \rightarrow M_2$, левым действием $G_1 \times_{r_f} G_f \rightarrow G_f$ группоида G_1 и правым действием $G_f \times_{s_f} G_2 \rightarrow G_f$ группоида G_2 . Предполагается, что действия коммутируют между собой, $r_f: G_f \rightarrow M_1$ является главным расслоением со структурным группоидом G_2 (т. е. r_f – субмерсия и для любых x и y из G_f таких, что $r_f(x) = r_f(y)$, существует единственный элемент $\gamma \in G_1$ с $x\gamma = y$) и действие группоида G_2 является собственным.

Эквивалентным образом, отображение $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ можно определить либо как коцикл на G_1 со значениями в G_2 , либо как гомоморфизм приведенных группоидов $\varphi: (G_1)_{T_1}^{T_1} \rightarrow (G_2)_{T_2}^{T_2}$, где T_j – полные трансверсали для слоений $(M_j, \mathcal{F}_j)$, $j = 1, 2$ (см. более подробно в [13], [88], [95]).

Композиция $f_2 \circ f_1: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_3/\mathcal{F}_3$ отображений $f_1: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ и $f_2: M_2/\mathcal{F}_2 \rightarrow M_3/\mathcal{F}_3$ задается графиком $G_{f_2 \circ f_1} = G_{f_1} \times_{G_2} G_{f_2}$, который определяется как множество классов эквивалентности на множестве $\{(x_1, x_2) \in G_{f_1} \times G_{f_2} : s_{f_1}(x_1) = r_{f_2}(x_2)\}$ относительно отношения эквивалентности, полагающего $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$, если существует такой элемент $\gamma \in G_2$, что $x_1 \gamma = y_1$, $\gamma y_2 = x_2$.

ПРИМЕР 5.27. Пусть $\mathcal{F}_i$ – простое слоение, определяемое субмерсией $\pi_i: M_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$. Любое отображение $F: B_1 \rightarrow B_2$ определяет отображение $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$. Его график G_f состоит из всех $(x, y) \in M_1 \times M_2$ таких, что $\pi_2(y) = F(\pi_1(x))$. Отображения $s_f: G_f \rightarrow M_2$ и $r_f: G_f \rightarrow M_1$ задаются формулами $s_f(x, y) = x$, $r_f(x, y) = y$.

ПРИМЕР 5.28. График тождественного отображения $\text{id}: M/\mathcal{F} \rightarrow M/\mathcal{F}$ есть группоид голономии G .

ПРИМЕР 5.29. График проекции $\text{id}: M \rightarrow M/\mathcal{F}$ есть также группоид голономии G . Более обще, графики отображения $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ и соответствующего подъема $\tilde{f}: M_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ совпадают как множества и отличаются только тем, что график f имеет структуру левого G_1 -многообразия, а график $\tilde{f}$ – нет.

ПРИМЕР 5.30. График проекции $\text{id}: M/\mathcal{F} \rightarrow \text{pt}$ есть M .

Обозначим через $\text{Ml}_n(\mathbb{R})$ металинейную группу, т. е. нетривиальную двулистную накрывающую группы $\text{Gl}_n^+(\mathbb{R})$ невырожденных вещественных $(n \times n)$ -матриц с положительным определителем. Положим $\text{Ml}_n^c = \text{Ml}_n(\mathbb{R}) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$. Максимальная компактная подгруппа группы Ml_n^c есть $\text{Spin}^c(n)$. Голономно эквивариантное вещественное векторное расслоение E на M ранга r называется

K -ориентируемым, если его структурная группа (как G -расслоения) редуцируется к Ml_n^c .

Пусть $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ и E – голономно эквивариантное расслоение на M_2 . Тогда s_f^*E является G_2 -расслоением на G_f , на котором действие G_1 тривиально. Поскольку G_f является главным G_1 -расслоением, существует единственное G_1 -расслоение E' на M_1 такое, что $r_f^*E' \cong s_f^*E$. Положим, по определению, $E' = f^*E$.

Гладкое отображение $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ называется K -ориентируемым, если G_1 -расслоение $\tau_1 \oplus f^*\tau_2$ на M_1 является K -ориентируемым.

Для любого гладкого K -ориентированного отображения $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ естественно определяется элемент $f! \in KK(C^*(M_1, \mathcal{F}_1), C^*(M_2, \mathcal{F}_2))$, являющийся обобщением гомоморфизма Гизина в K -теории (см. п. 1.3). В случае, когда слоение $\mathcal{F}_1$ тривиально, конструкция элемента $f! \in KK(C(M_1), C_r^*(M_2, \mathcal{F}_2))$ была дана в работе [13] и изучалась более систематически в работе [88], в которой также было доказано соотношение $(f \circ g)! = g! \otimes f!$. В работе [96] использовалась конструкция отображения $f!$ в случае, когда группоид голономии слоения $\mathcal{F}_1$ является собственным. Наконец, в работе [95] дано определение элемента $f! \in KK(C^*(M_1, \mathcal{F}_1), C^*(M_2, \mathcal{F}_2))$ для произвольного гладкого K -ориентированного отображения $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ и доказано, что $(f \circ g)! = g! \otimes f!$. Если касательное расслоение $T\mathcal{F}$ является K -ориентированным, то естественная проекция $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$ является K -ориентированным отображением и элемент $p! \in KK(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F}))$ совпадает с элементом $[D] \in KK(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F}))$, определяемым соответствующим касательным Spin^c -оператором Дирака D (см. п. 8.2). Для отображения $\pi: M/\mathcal{F} \rightarrow \mathrm{pt}$ конструкция элемента $\pi! \in KK(C^*(M, \mathcal{F}), \mathbb{C})$ непосредственно связана с K -теоретическим аналогом конструкции трансверсального фундаментального класса слоения (см. п. 6.2). Сложная задача построения элемента $\pi!$ была решена в работе [95]. Ее решение использует подъем на параримановы слоения, изоморфизм Тома и трансверсально гипоеллиптические операторы (см. пп. 7.4 и 8.3, в частности, теорему 8.6). Наконец, в случае, когда отображение $f: M_1/\mathcal{F}_1 \rightarrow M_2/\mathcal{F}_2$ является вложением, конструкция элемента $f!$ аналогична классической конструкции гомоморфизма Гизина в K -теории, в частности топологического индекса (см. п. 1.3), и использует изоморфизм Тома и конструкцию нормального группоида, ассоциированного со слоением.

Образующими группы $K_{\mathrm{top}}^*(M, \mathcal{F})$ геометрической K -теории (K -коциклами) являются классы эквивалентности четверок $(X, \mathcal{F}_X, x, f)$, где $(X, \mathcal{F}_X)$ – слоение с собственным группоидом, $x \in K_*(C^*(X, \mathcal{F}_X))$ и $f: X/\mathcal{F}_X \rightarrow M/\mathcal{F}$ – K -ориентированное отображение. Отношение эквивалентности K -коциклов задается формулой

$$(X, \mathcal{F}_X, x, f \circ g) \sim (Y, \mathcal{F}_Y, x \otimes g!, f),$$

где $g: X/\mathcal{F}_X \rightarrow Y/\mathcal{F}_Y$ – K -ориентированное отображение. Сложение в группе $K_{\mathrm{top}}^*(M, \mathcal{F})$ задается операцией дизъюнктивной суммы.

В работе [96] (см. также [88]) определено отображение $\mu: K_{\mathrm{top}}^*(M, \mathcal{F}) \rightarrow K_*(C^*(M, \mathcal{F}))$ по формуле

$$\mu: (X, \mathcal{F}_X, x, f) \rightarrow f!(x) = x \otimes f!.$$

Гипотеза Баума и Конна утверждает, что отображение μ – изоморфизм. Если взять композицию μ с отображением $K_*(C^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow K_*(C_r^*(M, \mathcal{F}))$, индуцированным канонической проекцией $C^*(M, \mathcal{F}) \rightarrow C_r^*(M, \mathcal{F})$, получаем отображение $\mu_r: K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F}) \rightarrow K_*(C_r^*(M, \mathcal{F}))$.

Для произвольного группоида Ли G как для любой малой категории определено классифицирующее пространство BG . Его можно построить при помощи небольшой модификации классической конструкции Милнора классифицирующего пространства группы (см. например, [82]). Мы опишем конструкцию Г. Сигала [97]. Рассмотрим симплицальное множество NG , для которого множество его n -симплексов NG_n определяется формулой

$$NG_n = G^{(n)} = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^n : s(\gamma_i) = r(\gamma_{i+1}), i = 1, \dots, n-1\},$$

при $n > 1$ операторы грани $\delta_j: NG_n \rightarrow NG_{n-1}$, $j = 0, 1, \dots, n$, имеют вид

$$\begin{aligned} \delta_0(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_2, \dots, \gamma_n), \\ \delta_j(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_1, \dots, \gamma_j \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \delta_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \end{aligned}$$

и при $n = 0$ операторы грани $\delta_j: NG_1 \rightarrow NG_0 = G^{(0)}$, $j = 0, 1$, имеют вид

$$\delta_0(\gamma_1) = r(\gamma_1), \quad \delta_1(\gamma_1) = s(\gamma_1);$$

операторы вырождения $s_j: NG_n \rightarrow NG_{n+1}$ имеют вид

$$s_j(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_j, s(\gamma_j) = r(\gamma_{j+1}), \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n), \quad 0 \leq j \leq n.$$

Симплицальное множество NG называется нервом группоида G . Классифицирующее пространство BG группоида G определяется как геометрическая реализация симплицального множества NG .

В качестве важного частного случая рассмотрим группоид $G_{\mathcal{U}}$, ассоциированный с произвольным открытым покрытием $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in A}$ топологического пространства X . Он определяется формулами

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{U}}^{(0)} &= \bigsqcup_{i \in A} U_i = \{(x, i) \in M \times A : x \in U_i\}, \\ G_{\mathcal{U}} &= \bigsqcup_{i, j \in A} U_i \cap U_j = \{(x, i, j) \in M \times A \times A : x \in U_i \cap U_j\}, \end{aligned}$$

отображения $s, r: G_{\mathcal{U}} \rightarrow G_{\mathcal{U}}^{(0)}$ имеют вид

$$s(x, i, j) = (x, i), \quad r(x, i, j) = (x, j).$$

Множество n -симплексов нерва $NG_{\mathcal{U}}$ этого группоида описывается формулой

$$(NG_{\mathcal{U}})_n = \{(x, i_1, \dots, i_n) : x \in U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}\} = \bigsqcup U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n},$$

где объединение берется по всем наборам $(i_1, \dots, i_n)$ таким, что пересечение $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ непусто. Если покрытие $\mathcal{U}$ локально конечно и все непустые

пересечения $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ стягиваемы, то классифицирующее пространство $BG_{\mathcal{U}}$ гомотопически эквивалентно X .

Гладкое отображение $f: X \rightarrow M/\mathcal{F}$, задаваемое коциклом (U_i, γ_{ij}) , определяет морфизм из группоида $G_{\mathcal{U}}$, ассоциированного с покрытием $\{U_i\}$, в группоид голономии G слоения $(M, \mathcal{F})$. Этот морфизм ставит в соответствие любому $(x, i) \in G_{\mathcal{U}}^{(0)}$ элемент $\gamma_{ii}(x) \in M$ и любому $(x, i, j) \in G_{\mathcal{U}}$ элемент $\gamma_{ij}(x) \in G$. Определено индуцированное отображение классифицирующих пространств $BG_{\mathcal{U}} \rightarrow BG$. Если покрытие $\mathcal{U}$ локально конечно и все непустые пересечения $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$ стягиваемы, эта конструкция приводит к отображению $\bar{f}: X \rightarrow BG$, определенному с точностью до гомотопической эквивалентности. Отображение $\bar{f}$ является классифицирующим отображением для главного G -расслоения $r_f: G_f \rightarrow X$, определяемого отображением $f: X \rightarrow M/\mathcal{F}$.

Таким образом, классифицирующее пространство BG группоида голономии слоения представляет собой аналог пространства слоев $M/\mathcal{F}$ в теории гомотопий (гомотопическое пространство слоев). Имеется также универсальное классифицирующее пространство для всех гладких слоений коразмерности q . Им является классифицирующее пространство $B\Gamma_q$ группоида Хефлигера Γ_q (см. пример 5.8), введенное Хефлигером [82], [77].

Для любого слоения $\mathcal{F}$ коразмерности q на многообразии M определено (с точностью до гомотопической эквивалентности) универсальное отображение $BG \rightarrow B\Gamma_q$. Оно строится следующим образом. Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}$ – хорошее покрытие многообразия M различающимися окрестностями, $T = \bigcup_i T_i$ – соответствующая полная трансверсаль. Поскольку каждая локальная трансверсаль T_i диффеоморфна I^q , определен естественный морфизм группоидов $G_T^T \rightarrow \Gamma_q$. Универсальное отображение $BG \rightarrow B\Gamma_q$ получается как композиция индуцированного отображения $BG_T^T \rightarrow B\Gamma_q$ и гомотопической эквивалентности $BG \simeq BG_T^T$.

Мы отсылаем читателя к обзору [98] и приведенной в нем библиографии по поводу различных вопросов, связанных с задачей классификации слоений.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением. Нормальное расслоение τ на M , являясь голономно эквивариантным расслоением, определяет векторное расслоение на BG , которое мы также будем обозначать через τ . Рассмотрим группу K -гомологий $K_{*,\tau}(BG)$ пространства BG , скрученную при помощи расслоения τ . Используя двойственность Пуанкаре, можно показать, что элементы группы $K_{*,\tau}(BG)$ реализуются геометрическими циклами (X, E, f) , где X – гладкое компактное многообразие, E – комплексное векторное расслоение на X и $f: X \rightarrow M/\mathcal{F}$ – K -ориентированное отображение.

Определено отображение

$$K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F}) \rightarrow K_{*,\tau}(BG),$$

которое каждой четверке $(X, \mathcal{F}_X, x, f)$ ставит в соответствие набор $(X, E, \bar{f})$, где E – G_X -эквивариантное расслоение на X , соответствующее элементу $x \in K_*(C^*(X, \mathcal{F}_X))$ и $\bar{f}: X \rightarrow M/\mathcal{F}$ – естественный подъем отображения $f: X/\mathcal{F}_X \rightarrow M/\mathcal{F}$. Это отображение рационально инъективно и в случае, когда группы изотропии G_x^x не имеют кручения, является изоморфизмом.

Обозначим через $H_{*,\tau}(BG, \mathbb{Q})$ сингулярные гомологии пары $(B\tau, S\tau)$. Определены характер Черна $\text{ch}: K_{*,\tau}(BG) \rightarrow H_{*,\tau}(BG, \mathbb{Q})$ и изоморфизм Тома $\Phi: H_{k+q,\tau}(BG, \mathbb{Q}) \rightarrow H_k(BG, \mathbb{Q})$, $q = \dim \tau$. Их композиция $\Phi \text{ch}: K_{*,\tau}(BG) \rightarrow H_*(BG, \mathbb{Q})$ имеет следующий вид [99] (см. также [100] и (2.3)): для любого $y = [X, E, f] \in K_{*,\tau}(BG)$

$$\Phi \text{ch}(y) = \bar{f}_*(\text{ch}(E) \cup \text{Td}(TX \oplus \bar{f}^*\tau) \cap [X]) \in H_*(BG, \mathbb{Q}), \quad (5.5)$$

где $\bar{f}: X \rightarrow BG$ – отображение, определяемое отображением $f: X \rightarrow M/\mathcal{F}$.

Мы отсылаем читателя к библиографии, приведенной в работе [18], по поводу различных аспектов гипотезы Баума–Конна для слоений и связанных с ними вычислений K -теории для C^* -алгебр слоения.

5.6. Трансверсальное интегрирование. Основы некоммутативной теории интегрирования для слоений были заложены Конном в [15] (см. также [101], [102], [19]). Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением. Пусть Λ – голономно квазиинвариантная трансверсальная мера для $\mathcal{F}$, α – строго положительная гладкая послойная плотность на M и $\nu = s^*\alpha$ – соответствующая гладкая система Хаара. Меры Λ и α позволяют построить меру μ на M (см. (4.1)). Наконец, мера μ и система Хаара ν определяют меру m на G :

$$\int_G f(\gamma) dm(\gamma) = \int_M \left(\int_{G^x} f(\gamma) d\nu^x(\gamma) \right) d\mu(x), \quad f \in C_c(G).$$

В п. 5.2 было определено представление R_x инволютивной алгебры $C_c^\infty(G)$ в гильбертовом пространстве $L^2(G^x, \nu^x)$ для любого $x \in M$. Рассмотрим представление R алгебры $C_c^\infty(G)$ в пространстве $L^2(G, m) = \int_M^\oplus L^2(G^x, \nu^x) d\mu(x)$, задаваемое как прямой интеграл представлений R_x :

$$R = \int_M^\oplus R_x d\mu(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.31. Алгебра фон Неймана $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$ определяется как замыкание образа алгебры $C_c^\infty(G)$ при представлении R в слабой топологии пространства $\mathcal{L}(L^2(G, m))$.

Поскольку определение алгебры фон Неймана $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$ зависит только от класса меры m (т. е. семейства всех множеств m -меры нуль), это определение не зависит от выбора α .

Элементы алгебры $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$ можно описать как такие семейства $(T_x)_{x \in M}$ ограниченных операторов в $H_x = L^2(G^x, \nu^x)$, что:

- 1) для любого $\gamma \in G$, $\gamma: x \rightarrow y$,

$$L(\gamma)T_x L(\gamma)^{-1} = T_y, \quad (5.6)$$

где представление L задается формулой (5.3);

- 2) функция $M \ni x \mapsto \|T_x\|$ существенно ограничена по мере μ ;
- 3) для любых $\xi, \eta \in L^2(G, m)$ функция $M \ni x \mapsto \langle T_x(\xi_x), \eta_x \rangle_{H_x}$ измерима.

Мы будем называть семейства операторов, удовлетворяющие условию (5.6), (левоинвариантными) G -операторами. Мы также будем использовать правоинвариантные G -операторы, являющиеся такими семействами $(T_x)_{x \in M}$ ограниченных операторов в $H_x = L^2(G_x, \nu_x)$, $\nu_x = R^* \alpha$, что $R(\gamma)T_x R(\gamma)^{-1} = T_y$ для любого $\gamma \in G$, $\gamma: x \rightarrow y$, где представление R задается формулой (5.4).

Голономно инвариантная мера Λ на M определяет нормальный полуконечный след tr_Λ на алгебре фон Неймана $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$. Для любой ограниченной измеримой функции k на G значение $\text{tr}_\Lambda(k)$ конечно и задается формулой

$$\text{tr}_\Lambda(k) = \int_M k(x) d\mu(x).$$

В работе [15] дано описание весов на алгебре фон Неймана $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$. Как объяснено в [102], конструкцию работы [15] можно интерпретировать как соответствие между весами на $W^*(M, \mathcal{F})$ и операторнозначными плотностями на пространстве слоев $M/\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 5.32. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением. Алгебра фон Неймана $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$ является фактором тогда и только тогда, когда слоение эргодично, т.е. любая ограниченная измеримая функция, постоянная вдоль слоев $\mathcal{F}$, постоянна на M .

Известно, что алгебры фон Неймана классифицируются по трем классам: тип I, II и III. Любая алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ канонически представляется в виде прямой суммы $\mathcal{M}_I \oplus \mathcal{M}_{II} \oplus \mathcal{M}_{III}$ алгебр фон Неймана, где $\mathcal{M}_I$, $\mathcal{M}_{II}$ и $\mathcal{M}_{III}$ – алгебры фон Неймана типа I, II и III соответственно.

ТЕОРЕМА 5.33. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением. Алгебра фон Неймана $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$ имеет:

- 1) тип I тогда и только тогда, когда пространство слоев изоморфно стандартному борелевскому пространству;
- 2) тип II тогда и только тогда, когда существует голономно инвариантная трансверсальная мера и алгебра не имеет тип I;
- 3) тип III тогда и только тогда, когда не существует голономно инвариантной трансверсальной меры.

6. Некоммутативное дифференциальное исчисление на пространстве слоев

6.1. Трансверсальный комплекс де Рама слоения. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением. В этом пункте мы опишем некоммутативный аналог комплекса де Рама на пространстве слоев $M/\mathcal{F}$ [19], [103].

Рассмотрим пространство $\Omega_\infty = C_c^\infty(G, r^* \Lambda N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Определим умножение на нем по формуле

$$(\omega_1 * \omega_2)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \gamma_2 = \gamma} \omega_1(\gamma_1) \wedge H(\gamma_1)[\omega_2(\gamma_2)], \quad \gamma \in G,$$

где $\omega_1, \omega_2 \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$, $H(\gamma): \Lambda N_x^* \mathcal{F} \rightarrow \Lambda N_y^* \mathcal{F}$ – отображение линейной голономии, ассоциированное с $\gamma \in G$, $\gamma: x \rightarrow y$. Таким образом, Ω_∞ является градуированной алгеброй.

Теперь мы определим трансверсальный дифференциал де Рама, являющийся линейным отображением $d_H: \Omega_\infty^0 = C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}) \rightarrow \Omega_\infty^1 = C_c^\infty(G, r^*N^*\mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2})$, удовлетворяющим условию

$$d_H(k_1 * k_2) = d_H k_1 * k_2 + k_1 * d_H k_2, \quad k_1, k_2 \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}).$$

Конструкция оператора d_H существенно использует вспомогательный выбор распределения H на M , трансверсального к $F = T\mathcal{F}$.

Имеет место разложение TM в прямую сумму $TM = F \oplus H$. Поэтому определена соответствующая биградуировка расслоения внешних степеней Λ^*T^*M :

$$\Lambda^k T^*M = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^{i,j} T^*M, \quad \Lambda^{i,j} T^*M = \Lambda^i H^* \otimes \Lambda^j F^*,$$

а также (см. например, [6; предложение 10.1]) соответствующее разложение дифференциала де Рама d в сумму биградуированных компонент вида

$$d = d_F + d_H + \theta. \quad (6.1)$$

Здесь

- 1) $d_F = d_{0,1}: C^\infty(M, \Lambda^{i,j} T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{i,j+1} T^*M)$ – касательный дифференциал де Рама, являющийся касательно эллиптическим оператором первого порядка, не зависящим от выбора g ;
- 2) $d_H = d_{1,0}: C^\infty(M, \Lambda^{i,j} T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{i+1,j} T^*M)$ – трансверсальный дифференциал де Рама, являющийся трансверсально эллиптическим оператором первого порядка;
- 3) $\theta = d_{2,-1}: C^\infty(M, \Lambda^{i,j} T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{i+2,j-1} T^*M)$ – дифференциальный оператор нулевого порядка, являющийся оператором внутреннего умножения на 2-форму θ на M со значениями в F , $\theta \in C^\infty(M, F \otimes \Lambda^2 \tau^*)$, задаваемую формулой

$$\theta(X, Y) = p_F([X, Y]), \quad X, Y \in C^\infty(M, H),$$

где $P_F: TM \rightarrow F$ – естественная проекция; форма θ называется кривизной трансверсального распределения H ; в частности, θ обращается в нуль тогда и только тогда, когда H вполне интегрируемо.

Трансверсальное распределение H естественно определяет трансверсальное распределение $HG \cong r^*H$ на многообразии со слоением $(G, \mathcal{G})$ (см. п 5.1) и соответствующий трансверсальный дифференциал де Рама $d_H: C_c^\infty(G) \rightarrow C_c^\infty(G, r^*N^*\mathcal{F})$ (см. (6.1)).

Для произвольной гладкой послойной плотности $\lambda \in C_c^\infty(M, |T\mathcal{F}|)$ определим 1-форму $k(\lambda) \in C^\infty(M, H^*) \cong C^\infty(M, N^*\mathcal{F})$ следующим образом. Возьмем произвольную точку $m \in M$. В расслоенной карте $\phi: U \rightarrow I^p \times I^q$, определенной в окрестности точки m ($\phi(m) = (x^0, y^0)$), плотность λ можно записать в виде $\lambda = f(x, y) |dx|$, $(x, y) \in I^p \times I^q$. Тогда

$$k(\lambda) = d_H f + \sum_{i=1}^p \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} d_H x_i,$$

где для любого векторного поля $X = \sum_{i=1}^p X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(\mathcal{F})$ и для любой формы $\omega = \sum_{j=1}^q \omega_j dy_j \in C^\infty(M, H^*)$ производная Ли $\mathcal{L}_X \omega \in C^\infty(M, H^*)$ задается формулой

$$\mathcal{L}_X \omega = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q X^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} dy_j.$$

Можно дать несколько иное описание формы $k(\lambda)$. Для любого $X \in H_m$ пусть $\tilde{X}$ – произвольное проектируемое векторное поле, совпадающее с X в точке m :

$$\tilde{X}(x, y) = \sum_{i=1}^p X^i(x, y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^q Y^j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Положим

$$\begin{aligned} k(\lambda)(X) &= \sum_{i=1}^p X^i(x^0, y^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0, y^0) \\ &\quad + \sum_{j=1}^q Y^j(y^0) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0, y^0) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial X^i}{\partial x_i}(x^0, y^0) f(x^0, y^0). \end{aligned}$$

Можно проверить, что это определение не зависит от выбора расслоенной карты $\phi: U \rightarrow I^p \times I^q$ и продолжения $\tilde{X}$.

Если многообразие M риманово, плотность λ задается индуцированной по-слойной формой риманова объема и $H = F^\perp$, то $k(\lambda)$ совпадает с 1-формой средней кривизны слоения $\mathcal{F}$.

Произвольную послойную полуплотность $\rho \in C^\infty(M, |T\mathcal{F}|^{1/2})$ можно записать как $\rho = f|\lambda|^{1/2}$ с $f \in C^\infty(M)$ и $\lambda \in C^\infty(M, |T\mathcal{F}|)$. Тогда $d_H \rho \in C_c^\infty(M, N^*\mathcal{F} \otimes |T\mathcal{F}|^{1/2})$ определяется формулой

$$d_H \rho = (d_H f)|\lambda|^{1/2} + \frac{1}{2} f|\lambda|^{1/2} k(\lambda).$$

Любой элемент $f \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ можно записать как $f = us^*(\rho)r^*(\rho)$, где $u \in C_c^\infty(G)$ и $\rho \in C_c^\infty(M, |T\mathcal{F}|^{1/2})$. Элемент $d_H f \in C_c^\infty(G, r^*N^*\mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2})$ определяется формулой

$$d_H f = d_H us^*(\rho)r^*(\rho) + us^*(d_H \rho)r^*(\rho) + us^*(\rho)r^*(d_H \rho).$$

Оператор d_H имеет единственное продолжение до дифференцирования градуированной алгебры $\Omega_\infty = C_c^\infty(G, r^*\Lambda N^*\mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2})$. По определению для любых $f \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ и $\omega \in C_c^\infty(M, \Lambda N^*\mathcal{F})$ имеем

$$d_H(fr^*\omega) = (d_H f)r^*\omega + fr^*(d_H \omega).$$

Определим замкнутый градуированный след τ на дифференциальной градуированной алгебре (Ω_∞, d_H) формулой

$$\tau(\omega) = \int_M \omega|_M,$$

где $\omega \in \Omega_\infty^q = C_c^\infty(G, r^* \Lambda^q N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Здесь $\omega|_M$ обозначает ограничение формы ω на M , являющееся сечением расслоения $\Lambda^q N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{F}|$ на M . Поскольку слоение трансверсально ориентировано, корректно определен интеграл от $\omega|_M$ по M .

6.2. Трансверсальный фундаментальный класс слоения. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие со слоением, H – произвольное распределение на M , трансверсальное к $F = T\mathcal{F}$. В этом пункте мы опишем, следуя [99] (см. также [19]), простейшую конструкцию циклического коцикла на алгебре $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$, а именно, конструкцию трансверсального фундаментального класса.

В предыдущем пункте мы построили градуированную алгебру Ω_∞ , дифференциал d_H и замкнутый градуированный след τ на ней. Проблема состоит в том, что ввиду неинтегрируемости распределения H , вообще говоря, не верно, что $d_H^2 = 0$. Используя равенство (6.1) и вычисляя компоненту типа $(0, 2)$ в представлении оператора d^2 в виде суммы биоднородных компонент, получаем

$$d_H^2 = -(d_F \theta + \theta d_F).$$

Оператор $-(d_F \theta + \theta d_F)$ является касательным дифференциальным оператором, поэтому он определяется внешним умножением на векторнозначную обобщенную функцию $\Theta \in \mathcal{D}'(G, r^* \Lambda^2 N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2})$, носитель которой содержится в $G^{(0)}$. Можно показать, что

$$d_H^2 \omega = \Theta \wedge \omega - \omega \wedge \Theta, \quad \omega \in \Omega_\infty.$$

Кроме того, $d_H \Theta = 0$. Используя эти факты, можно канонически построить дифференциальную градуированную алгебру $(\tilde{\Omega}_\infty, \tilde{d}_H)$ и замкнутый градуированный след $\tilde{\tau}$ на ней (см. [14], [19]). Алгебра $\tilde{\Omega}_\infty$ состоит из (2×2) -матриц $\omega = \{\omega_{ij}\}$ с элементами из Ω_∞ . Элемент $\omega \in \tilde{\Omega}_\infty$ имеет степень k , если $\omega_{11} \in \Omega_\infty^k$, $\omega_{12}, \omega_{21} \in \Omega_\infty^{k-1}$ и $\omega_{22} \in \Omega_\infty^{k-2}$. Произведение в $\tilde{\Omega}_\infty$ задается формулой

$$\omega \cdot \omega' = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{bmatrix},$$

дифференциал – формулой

$$\tilde{d}_H \omega = \begin{bmatrix} d_H \omega_{11} & d_H \omega_{12} \\ -d_H \omega_{21} & -d_H \omega_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega + (-1)^{|\omega|} \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Theta & 0 \end{bmatrix}$$

и замкнутый градуированный след $\tilde{\tau}: \tilde{\Omega}_\infty^q \rightarrow \mathbb{C}$ определяется как

$$\tilde{\tau} \left(\begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \right) = \tau(\omega_{11}) - (-1)^q \tau(\omega_{22} \Theta).$$

Наконец, гомоморфизм $\tilde{\rho}: C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}) \rightarrow \tilde{\Omega}_\infty^0$ задается формулой

$$\tilde{\rho}(k) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, тройка $(\tilde{\Omega}_\infty, \tilde{d}_H, \tilde{\tau})$ является циклом над алгеброй $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Этот цикл называется фундаментальным циклом трансверсально

ориентированного слоения $(M, \mathcal{F})$. Характер этого цикла определяет циклический коцикл ϕ_H на алгебре $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Коцикл ϕ_H зависит от вспомогательного выбора горизонтального распределения H , но соответствующий класс циклических когомологий не зависит от этого выбора. Класс $[M/\mathcal{F}] \in HC^q(C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}))$, определяемый коциклом ϕ_H , называется трансверсальным фундаментальным классом слоения $(M, \mathcal{F})$.

Пусть $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})^+$ обозначает алгебру $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ с присоединенной единицей. Для четного q продолжим цикл $(\tilde{\Omega}_\infty, d_H, \tilde{\tau})$ до цикла над алгеброй $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})^+$, полагая $\tilde{\tau}(\Theta^{q/2}) = 0$. В [104] доказано, что формула

$$\chi^r(k^0, k^1, \dots, k^r) = \frac{(-1)^{(q-r)/2}}{((q+r)/2)!} \sum_{i_0 + \dots + i_r = (q-r)/2} \int_M k^0 \Theta^{i_0} d_H k^1 \Theta^{i_1} \dots d_H k^r \Theta^{i_r},$$

где $r = q, q-2, \dots$, $k^0 \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})^+$, $k^1, \dots, k^r \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$, определяет коцикл в (b, B) -комплексе алгебры $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})^+$. Класс, задаваемый коциклом χ в $HC^q(C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}))$, совпадает с $[M/\mathcal{F}]$.

Спаривание с классом $[M/\mathcal{F}] \in HC^q(C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}))$ определяет аддитивное отображение $\varphi: K(C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})) \rightarrow \mathbb{C}$. Важной задачей является вопрос о топологической инвариантности отображения φ , т. е. вопрос о возможности его продолжения до аддитивного отображения из $K(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ в $\mathbb{C}$. Этот вопрос был решен в работе [99].

Стандартный метод решения проблемы топологической инвариантности отображения φ заключается в построении такой гладкой подалгебры $\mathcal{B}$ алгебры $C_r^*(M, \mathcal{F})$, содержащей алгебру $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$, что циклический коцикл ϕ_H на $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$, задающий трансверсальный фундаментальный класс $[M/\mathcal{F}]$, продолжается по непрерывности до циклического коцикла на $\mathcal{B}$, определяя, тем самым, отображение в топологической K -теории $K(\mathcal{B}) \cong K(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow \mathbb{C}$. Это удастся сделать для так называемых параримановых слоений (см. п. 7.4), используя некоторые свойства плотно определенных циклических коциклов на банаховых алгебрах.

Для произвольного многообразия со слоением $(M, \mathcal{F})$ в работе [99] построено расслоение P над M , слои которого являются связными спинорными многообразиями неположительной кривизны, и естественный подъем слоения $\mathcal{F}$ до парариманова слоения $\mathcal{V}$ на P (см. более подробное изложение в п. 7.4). Поскольку слоение $\mathcal{V}$ парариманово, его трансверсальный фундаментальный класс определяет отображение $K(C_r^*(P, \mathcal{V})) \rightarrow \mathbb{C}$. С другой стороны, поскольку слои расслоения P являются связными спинорными многообразиями неположительной кривизны, можно построить инъективное отображение $K(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow K(C_r^*(P, \mathcal{V}))$, что позволяет определить искомое продолжение $K(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow \mathbb{C}$ для исходного слоения $(M, \mathcal{F})$. По поводу геометрических следствий этой конструкции см. п. 8.3, а также [99].

На самом деле, если касательное расслоение $T\mathcal{F}$ является K -ориентированным, то для любого элемента P подкольца кольца $H^*(M, \mathbb{R})$, порожденного классами Понтрягина нормального расслоения τ и классами Черна произвольных голономно эквивариантных расслоений на E , в работе [99] построено такое

аддитивное отображение $\varphi_P: K(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow \mathbb{C}$, что для любого $E \in K^i(M)$, $i = \dim M \pmod{2}$, справедливо равенство

$$\varphi_P(E \otimes p!) = \langle \text{ch}(E) \cdot \text{Td}(TM \otimes \mathbb{C}) \cdot P, [M] \rangle, \quad (6.2)$$

где $p! \in KK(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F}))$ – элемент, ассоциированный с естественной проекцией $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$ (см. более точное утверждение в теореме 8.5).

Напомним, что K -гомологическим фундаментальным классом компактного Spin^c -многообразия M называется класс $[D] \in K_i(M)$, где $i = \dim M \pmod{2}$, определяемый произвольным Spin^c -оператором Дирака D на M . Если слоение $(M, \mathcal{F})$ риманово, касательное расслоение $T\mathcal{F}$ является K -ориентированным и нормальное расслоение имеет голономно инвариантную комплексную спинорную структуру, то соответствующий трансверсальный Spin^c -оператор Дирака $D^\natural$ определяет класс K -когомологий $[D^\natural] \in K^i(C^*(M, \mathcal{F}))$, где $i = \dim(M/\mathcal{F}) \pmod{2}$ (см. п. 7.3), и, тем самым, отображение $K_i(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow \mathbb{C}$. В работе [100; теорема 4.2] доказано, что для любого класса $[E] \in K^0(M)$, задаваемого расслоением E на M , мы имеем

$$(E \otimes p!) \otimes [D^\natural] = \text{Ind}(D_E),$$

где D_E – Spin^c -оператор Дирака на M с коэффициентами в расслоении E . В частности, из теоремы Атьи–Зингера об индексе получаем

$$(E \otimes p!) \otimes [D^\natural] = \langle \text{ch}(E) \cdot \text{Td}(TM \otimes \mathbb{C}), [M] \rangle. \quad (6.3)$$

Таким образом, правая часть равенства (6.3) совпадает с правой частью формулы (6.2) при $P = \text{Td}(\tau)$. В общем случае класс $[D^\natural] \in K^i(C^*(M, \mathcal{F}))$ не определен, но описанная выше конструкция позволяет построить соответствующее отображение $\varphi_P: K(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow \mathbb{C}$. Приведенные рассуждения могут служить обоснованием названия “трансверсальный фундаментальный класс” для отображения вида φ_P .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Трансверсальным потоком C называется поток (т. е. непрерывный линейный функционал на пространстве гладких финитных дифференциальных форм), определенный на дизъюнктном объединении всех трансверсалей к слоению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Трансверсальный поток C называется голономно инвариантным, если для любых трансверсалей B_1 и B_2 и отображения $\phi: B_1 \rightarrow B_2$, принадлежащего псевдогруппе голономии, $\phi_*(C_{B_1}) = C_{B_2}$.

Пусть C – замкнутый голономно инвариантный трансверсальный поток степени k . Определим непрерывный линейный функционал ρ_C на пространстве $C_c^\infty(M, \Lambda^n \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{F}|)$ следующим образом.

Возьмем хорошее покрытие $\{U_i\}$ многообразия M расслоенными координатными окрестностями с соответствующими координатными отображениями $\phi_i: U_i \rightarrow I^p \times I^q$ и подчиненное этому покрытию разбиение единицы $\{\psi_i\}$. Рассмотрим соответствующую полную трансверсаль $T = \bigcup_i T_i$, где $T_i = \phi_i^{-1}(\{0\} \times I^q)$. В любой расслоенной карте (U_i, ϕ_i) трансверсальный поток C определяет поток C_i на T_i . Поток C голономно инвариантен тогда и только

тогда, когда для любой пары индексов i и j такой, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, справедливо соотношение $f_{ij}(C_i) = C_j$.

Для любого сечения $\omega \in C_c^\infty(M, \Lambda^k N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{F}|)$ и для любого i выражение

$$\int_L \Psi_i \omega = \int_{P_i(y)} \psi_i(x, y) \omega(x, y)$$

корректно определяет дифференциальную k -форму на T_i . Положим

$$\rho_C(\omega) = \sum_i \left\langle C_i, \int_L \Psi_i \omega \right\rangle.$$

Можно показать, что данная формула определяет функционал ρ_C корректно, т. е. результат не зависит от выбора покрытия $\{U_i\}$ и разбиения единицы $\{\psi_i\}$. Формула

$$\tau_C(\omega) = \rho_C(\omega|_M), \quad \omega \in C_c^\infty(G, r^* \Lambda^k N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2}),$$

задает замкнутый градуированный след τ_C на дифференциальной градуированной алгебре

$$(\Omega_\infty = C_c^\infty(G, r^* \Lambda N^* \mathcal{F} \otimes |T\mathcal{G}|^{1/2}), d_H).$$

Таким образом, любой замкнутый голономно инвариантный трансверсальный поток степени k определяет циклический коцикл на алгебре $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Топологическая инвариантность этих коциклов следует из результатов работы [99] (см. [105; замечание 5.12]).

6.3. Циклический коцикл, задаваемый классом Годбийона–Вея.

Рассмотрим гладкое компактное многообразие M , наделенное трансверсально ориентированным слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один. Класс Годбийона–Вея является 3-мерным классом когомологий многообразия M . Он представляет собой простейший пример вторичных характеристических классов слоения. Напомним его определение. Поскольку слоение $\mathcal{F}$ трансверсально ориентировано, оно глобально определяется не обращающейся в нуль гладкой 1-формой ω (т. е. для любого $x \in M$ имеет место равенство $\ker \omega_x = T_x \mathcal{F}$). Из теоремы Фробениуса следует существование такой 1-формы α на M , что $d\omega = \alpha \wedge \omega$. Можно проверить, что 3-форма $\alpha \wedge d\alpha$ замкнута и ее класс когомологий не зависит от выбора ω и α . Этот класс $GV \in H^3(M, \mathbb{R})$ и называется классом Годбийона–Вея слоения $\mathcal{F}$.

Пусть T – полная гладкая трансверсаль, задаваемая хорошим покрытием многообразия M регулярными расслоенными картами. Тем самым, T – ориентированное одномерное многообразие. В этом пункте мы построим циклический коцикл на алгебре $C_c^\infty(G_T^T)$, соответствующий классу Годбийона–Вея. Это делается в несколько шагов. Мы начнем с того, что опишем конструкцию класса Годбийона–Вея как вторичного характеристического класса, ассоциированного с когомологиями $H^*(W_1, \mathbb{R})$ алгебры Ли $W_1 = \mathbb{R}[[x]] \partial_x$ формальных векторных полей на $\mathbb{R}$.

Когомологии $H^*(W_1, \mathbb{R})$ были вычислены Гельфандом и Фуксом (см., например, книгу [106] и приведенные в ней ссылки). Они конечномерны, и единствен-

ными нетривиальными группами являются $H^0(W_1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \cdot 1$ и $H^3(W_1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \cdot gv$, где

$$gv(p_1 \partial_x, p_2 \partial_x, p_3 \partial_x) = \begin{vmatrix} p_1(0) & p_2(0) & p_3(0) \\ p'_1(0) & p'_2(0) & p'_3(0) \\ p''_1(0) & p''_2(0) & p''_3(0) \end{vmatrix}, \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}[[x]].$$

Рассмотрим расслоение $F_+^k T \rightarrow T$ положительно ориентированных реперов на T порядка k и расслоение $F_+^\infty T = \varprojlim F_+^k T$ положительно ориентированных реперов на T бесконечного порядка. По определению положительно ориентированным репером r порядка k в точке $x \in T$ называется k -струя в точке $0 \in \mathbb{R}$ сохраняющего ориентацию диффеоморфизма f , отображающего окрестность нуля в $\mathbb{R}$ на некоторую окрестность точки $x = f(0)$ в T . Если на T имеется локальная координата $y: U \rightarrow \mathbb{R}$, определенная в окрестности U точки x , то числа

$$y_0 = y(x), \quad y_1 = \frac{d(y \circ f)}{dt}(0), \quad \dots, \quad y_k = \frac{d^k(y \circ f)}{dt^k}(0)$$

являются координатами репера r , причем $y_1 > 0$.

Определено естественное действие псевдогруппы $\Gamma^+(T)$ сохраняющих ориентацию локальных диффеоморфизмов многообразия T на $F_+^\infty T$. Обозначим через $\Omega^*(F_+^\infty T)^{\Gamma^+(T)}$ пространство дифференциальных форм на $F_+^\infty T$, инвариантных под действием $\Gamma^+(T)$. Имеется естественный изоморфизм дифференциальных алгебр $J: C^*(W_1) \rightarrow \Omega^*(F_+^\infty T)^{\Gamma^+(T)}$, определяемый следующим образом. Прежде всего, пусть $v \in W_1$ и h_t – любая однопараметрическая группа локальных диффеоморфизмов $\mathbb{R}$ такая, что v является ∞ -струей векторного поля $\left. \frac{dh_t}{dt} \right|_{t=0}$. Тогда определим $\Gamma^+(T)$ -инвариантное векторное поле на $F_+^\infty T$, значение которого в точке $r = j_0 f \in J_+^\infty(T)$ задается формулой

$$v(r) = j_0 \left(\left. \frac{d(f \circ h_t)}{dt} \right|_{t=0} \right).$$

Для любого $c \in C^q(W_1)$ положим

$$J(c)(v_1(r), \dots, v_q(r)) = c(v_1, \dots, v_q).$$

Можно проверить, что при этом изоморфизме коцикл $gv \in C^3(W_1, \mathbb{R})$ переходит в 3-форму

$$gv = \frac{1}{y_1^3} dy \wedge dy_1 \wedge dy_2 \in \Omega^3(F_+^2 T)^{\Gamma^+(T)}.$$

Рассмотрим расслоение $F^\infty(M/\mathcal{F})$ над M , состоящее из струй бесконечного порядка всевозможных различающихся отображений. Имеется естественное отображение $F^\infty(M/\mathcal{F}) \rightarrow F_+^\infty T/\Gamma^+(T)$. Используя это отображение и $\Gamma^+(T)$ -инвариантность формы $gv \in \Omega^3(F_+^2 T)$, можно поднять форму gv до замкнутой формы $gv(\mathcal{F}) \in \Omega^3(F^\infty(M/\mathcal{F}))$. Поскольку слои расслоения $F^2(M/\mathcal{F}) \rightarrow M$ стягиваемы, то $H^3(F^\infty(M/\mathcal{F}), \mathbb{R}) \cong H^3(M, \mathbb{R})$ и класс когомологий в $H^3(M, \mathbb{R})$, соответствующий при этом изоморфизме классу когомологий формы $gv(\mathcal{F})$ в $H^3(F^\infty(M/\mathcal{F}), \mathbb{R})$, совпадает с классом Годбийона–Вея слоения $\mathcal{F}$.

Пусть $C^*(G_T^T, \Omega^*(G_T^T))$ обозначает пространство коцепей на группоиде G_T^T со значениями в пространстве $\Omega^*(G_T^T)$ дифференциальных форм на G_T^T . Согласно теореме типа Ван Эста (см. [83]), существует вложение

$$\Omega^*(F_+^\infty T)^{\Gamma^+(T)} \rightarrow C^*(G_T^T, \Omega^*(G_T^T)). \quad (6.4)$$

Это отображение является гомоморфизмом комплексов, индуцирующим изоморфизм в когомологиях.

Пусть ρ – произвольная гладкая положительная плотность на T . Определим гомоморфизм $\delta: G_T^T \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, называемый модулярным гомоморфизмом, полагая $\delta = r^* \rho / s^* \rho$, где $r^* \rho$ (соответственно $s^* \rho$) обозначает подъем плотности ρ на G_T^T при отображении $r: G_T^T \rightarrow T$ (соответственно $s: G_T^T \rightarrow T$), а также гомоморфизм $\ell = \log \delta: G_T^T \rightarrow \mathbb{R}$. Формула

$$c(\gamma_1, \gamma_2) = \ell(\gamma_2) d\ell(\gamma_1) - \ell(\gamma_1) d\ell(\gamma_2), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in G_T^T,$$

определяет 2-коцикл на G_T^T со значениями в пространстве 1-форм на G_T^T . Этот коцикл, называемый коциклом Ботта–Тёрстона, соответствует форме $gv \in \Omega^3(F_+^2 T)^{\Gamma^+(T)}$ при изоморфизме, задаваемом вложением (6.4).

Коцикл Ботта–Тёрстона c определяет циклический 2-коцикл ψ на $C_c^\infty(G_T^T)$ по формуле (ср. пример 3.4):

$$\psi(k^0, k^1, k^2) = \int_{\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \in T} k^0(\gamma_0) k^1(\gamma_1) k^2(\gamma_2) c(\gamma_1, \gamma_2), \quad k^0, k^1, k^2 \in C_c^\infty(G_T^T). \quad (6.5)$$

Это и есть циклический коцикл, соответствующий классу Годбийона–Вея слоения $\mathcal{F}$.

Конн доказал топологическую инвариантность этого коцикла, т. е. тот факт, что аддитивное отображение $\varphi: K(C_c^\infty(G_T^T)) \rightarrow \mathbb{C}$, определяемое спариванием с классом $[\psi] \in HC^2(C_c^\infty(G_T^T))$ коцикла ψ , $\phi(e) = \langle e, [\psi] \rangle$, определяет отображение $\varphi: K(C_r^*(G_T^T)) \cong K(C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow \mathbb{C}$. Более того, справедлива формула (см. также формулу (8.8))

$$\varphi(\mu_r(x)) = \langle \text{Ph}(x), GV \rangle, \quad x \in K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F}). \quad (6.6)$$

Имеется другое описание циклического коцикла, соответствующего классу Годбийона–Вея слоения $\mathcal{F}$, связывающее его с инвариантами алгебры фон Неймана данного слоения [99]. Формула

$$\tau(k^0, k^1) = \int_{G_T^T} k^0(\gamma^{-1}) dk^1(\gamma), \quad k^0, k^1 \in C_c^\infty(G_T^T),$$

определяет циклический 1-коцикл на алгебре $C_c^\infty(G_T^T)$. Класс этого коцикла τ в группе $HC^1(C_c^\infty(G_T^T))$ соответствует трансверсальному фундаментальному классу слоения $\mathcal{F}$ в $HC^1(C_c^\infty(G))$ при изоморфизме $HC^1(C_c^\infty(G_T^T)) \cong HC^1(C_c^\infty(G))$, задаваемом строгой эквивалентностью по Морите (см. п. 5.4).

Фиксированная гладкая положительная плотность ρ на T определяет точный нормальный полуконечный вес ϕ_ρ на алгебре фон Неймана $W^*(G_T^T)$ группоиды G_T^T . Для любого $k \in C_c^\infty(G_T^T)$ значение веса ϕ_ρ задается формулой

$$\phi_\rho(k) = \int_T k(x) \rho(x).$$

Рассмотрим однопараметрическую группу σ_t автоморфизмов алгебры фон Неймана $W^*(G_T^T)$, которая задается формулой

$$\sigma_t(k)(\gamma) = \delta(\gamma)^{it} k(\gamma), \quad k \in C_c^\infty(G_T^T), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Эта группа является группой модулярных автоморфизмов, ассоциированной с весом ϕ_p согласно теории Томиты–Такесаки.

Важность группы модулярных автоморфизмов объясняется, в частности, следующей ее характеристикой: однопараметрическая группа $*$ -автоморфизмов σ_t алгебры фон Неймана M является группой модулярных автоморфизмов, ассоциированной с весом ω , тогда и только тогда, когда вес ω удовлетворяет условиям Кубо–Мартина–Швингера относительно однопараметрической группы σ_t , т. е. существует такая аналитическая в полосе $\text{Im } z \in (0, 1)$ и непрерывная в ее замыкании функция f , что для любых $a, b \in M$, $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \omega(\sigma_t(a)b), \quad f(t+i) = \omega(b\sigma_t(a)).$$

Следуя Конну [99], назовем 1-следом на банаховой алгебре B такой билинейный функционал ϕ , определенный на плотной подалгебре $\mathcal{A} \subset B$, что

- 1) ϕ – циклический коцикл на $\mathcal{A}$;
- 2) для любого $a^1 \in \mathcal{A}$ существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\phi(a^0, a^1)| \leq C \|a^0\|, \quad a^0 \in \mathcal{A};$$

и 2-следом на B такой трилинейный функционал ϕ , определенный на плотной подалгебре $\mathcal{A} \subset B$, что

- 1) ϕ – циклический коцикл на $\mathcal{A}$;
- 2) для любых $a^1, a^2 \in \mathcal{A}$ существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\phi(x^0, a^1 x^1, a^2) - \phi(x^0 a^1, x^1, a^2)| \leq C \|a^1\| \|a^2\|, \quad x^0, x^1 \in \mathcal{A}.$$

Формула

$$\dot{\tau}(k^0, k^1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau(\sigma_t(k^0), \sigma_t(k^1)) - \tau(k^0, k^1)), \quad k^0, k^1 \in C_c^\infty(G_T^T),$$

определяет 1-след на $C_r^*(G_T^T)$ с областью определения $C_c^\infty(G_T^T)$, инвариантный при действии группы автоморфизмов σ_t .

Для любого 1-следа ϕ на C^* -алгебре A , инвариантного под действием однопараметрической группы автоморфизмов α_t с генератором D и такого, что пространство $\text{dom } \phi \cap \text{dom } D$ плотно в A , определен 2-след $\chi = i_D \phi$ на $C_r^*(G_T^T)$ (аналог внутренней производной) по формуле

$$\chi(a^0, a^1, a^2) = \phi(D(a^2)a^0, a^1) - \phi(a^0 D(a^1), a^2), \quad a^0, a^1, a^2 \in \text{dom } \phi \cap \text{dom } D.$$

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие с трансверсально ориентированным слоением коразмерности один, T – полная гладкая трансверсаль, ρ – гладкая положительная плотность на T . Тогда циклический коцикл $\psi \in HC^2(C_c^\infty(G_T^T))$, соответствующий классу Годбийона–Вея слоения $\mathcal{F}$, совпадает с $i_D \dot{\tau}$.

С каждой алгеброй фон Неймана M естественно ассоциировано действие (называемое потоком весов [107]) мультипликативной группы $\mathbb{R}_+^*$ на некоторой коммутативной алгебре фон Неймана, центре скрещенного произведения $M \rtimes \mathbb{R}$ алгебры M на $\mathbb{R}$ относительно действия $\mathbb{R}$ на M при помощи модулярной группы автоморфизмов σ_t . В качестве следствия теоремы 6.3 Конн установил следующий геометрический факт.

ТЕОРЕМА 6.4 [99]. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие с трансверсально ориентированным слоением коразмерности один. Если класс Годбийона–Вея $GV \in H^3(M, \mathbb{R})$ отличен от нуля, то поток весов алгебры фон Неймана слоения $\mathcal{F}$ имеет конечную инвариантную меру.

В частности, отсюда вытекает следующий, более ранний результат.

ТЕОРЕМА 6.5 [108]. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – многообразие с трансверсально ориентированным слоением коразмерности один. Если класс Годбийона–Вея $GV \in H^3(M, \mathbb{R})$ отличен от нуля, то алгебра фон Неймана слоения $\mathcal{F}$ имеет нетривиальную компоненту типа III.

В работах [109], [110] дана другая конструкция циклического коцикла, ассоциированного с классом Годбийона–Вея, как циклического коцикла на C^* -алгебре $C_r^*(M, \mathcal{F})$ в случае, когда слоение $\mathcal{F}$ является горизонтальным слоением плоского слоеного S^1 -расслоения.

6.4. Общие конструкции циклических коциклов. Пусть G – гладкий этальный группоид (например приведенный группоид голономии G_T^T многообразия со слоением $(M, \mathcal{F})$, ассоциированный с полной трансверсалью T). Касательное расслоение τ на $G^{(0)}$, являясь G -расслоением, определяет векторное расслоение на BG , которое мы также будем обозначать через τ . Рассмотрим группу когомологий $H_\tau^*(BG)$ пространства BG , скрученную при помощи расслоения τ : $H_\tau^*(BG) = H^*(B\tau, S\tau)$. Конн [19; гл. III, раздел 2.8, теорема 14 и замечание b)] построил естественное отображение

$$\Phi_*: H_\tau^*(BG) \rightarrow HP^*(C_c^\infty(G)). \quad (6.7)$$

Конструкции трансверсального фундаментального класса слоения и циклического коцикла, ассоциированного с классом Годбийона–Вея, являются частными случаями этой общей конструкции.

Описание конструкции отображения Φ_* начнем с определения двойного комплекса $(C^{*,*}, d_1, d_2)$. При $n > 0$ и $-q \leq m \leq 0$ ($q = \dim G^{(0)}$) пространство $C^{n,m}$ состоит из потоков де Рама степени $-m$ на многообразии

$$G^{(n)} = \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^m : s(\gamma_i) = r(\gamma_{i+1}), i = 1, \dots, n-1\},$$

которые обращаются в нуль, если какой-либо из γ_j принадлежит $G^{(0)}$ или $\gamma_1 \cdots \gamma_n \in G^{(0)}$. Пространство $C^{0,m}$, $-q \leq m \leq 0$, состоит из потоков де Рама степени $-m$ на многообразии $G^{(0)}$. В противном случае положим $C^{n,m} = \{0\}$. Кограница $d_1: C^{n,m} \rightarrow C^{n+1,m}$ задается формулой

$$d_1 = (-1)^m \sum (-1)^j \delta_j^*,$$

где отображения подъема $\delta_j^*: \mathcal{D}_{-m}(G^{(n-1)}) \rightarrow \mathcal{D}_{-m}(G^{(n)})$ индуцируются этальными отображениями $\delta_j: G^{(n)} \rightarrow G^{(n-1)}$, определяемыми при $n > 1$ по формулам

$$\begin{aligned}\delta_0(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_2, \dots, \gamma_n), \\ \delta_j(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_1, \dots, \gamma_j \gamma_{j+1}, \dots, \gamma_n), \quad 1 \leq j \leq n-1, \\ \delta_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}).\end{aligned}$$

При $n = 1$ отображения $\delta_j: G \rightarrow G^{(0)}$, $j = 0, 1$, определяются формулами

$$\delta_0(\gamma_1) = r(\gamma_1), \quad \delta_1(\gamma_1) = s(\gamma_1), \quad \gamma_1 \in G.$$

Кограница $d_2: C^{m,m} \rightarrow C^{m,m+1}$ задается границей де Рама $d^t: \mathcal{D}_{-m}(G^{(n)}) \rightarrow \mathcal{D}_{-m-1}(G^{(n)})$. k -я группа когомологий комплекса $(C^*, d = d_1 + d_2)$, ассоциированного с двойным комплексом $(C^{*,*}, d_1, d_2)$, совпадает с $H_r^{k+q}(BG)$.

Введем бикомплекс $(\Omega_c^{*,*}(G), d', d'')$. Пространство $\Omega_c^{n,m}(G)$ определяется как факторпространство пространства гладких финитных дифференциальных форм степени m на $G^{(n+1)}$ по подпространству тех форм, носитель которых содержится в множестве всех $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ таких, что $\gamma_j \in G^{(0)}$ при некотором $j > 0$. Произведение в $\Omega_c^*(G)$ задается формулой

$$\begin{aligned}(\omega_1 \omega_2)(\gamma_0, \dots, \gamma_{n_1}, \dots, \gamma_{n_1+n_2}) \\ = \sum_{\gamma \gamma' = \gamma_{n_1}} \omega_1(\gamma_0, \dots, \gamma_{n_1-1}, \gamma) \wedge \omega_2(\gamma', \gamma_{n_1+1}, \dots, \gamma_{n_1+n_2}) \\ + \sum_{j=0}^{n_1-2} (-1)^{n_1-j-1} \sum_{\gamma \gamma' = \gamma_j} \omega_1(\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}, \gamma, \gamma', \dots, \gamma_{n_1-1}) \wedge \omega_2(\gamma_{n_1}, \dots, \gamma_{n_1+n_2}),\end{aligned}$$

где $\omega_1 \in \Omega_c^{n_1, m_1}(G)$, $\omega_2 \in \Omega_c^{n_2, m_2}(G)$. В данной формуле используется факт этальности отображений r и s , чтобы отождествить кокасательные пространства.

Дифференциал $d': \Omega_c^{n,m}(G) \rightarrow \Omega_c^{n+1,m}(G)$ задается формулой

$$d' \omega(\gamma_0, \dots, \gamma_{n+1}) = \chi_{G^{(0)}}(\gamma_0) \omega(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}),$$

где $\chi_{G^{(0)}} \in C^\infty(G)$ – характеристическая функция множества $G^{(0)}$, а дифференциал $d'': \Omega_c^{n,m}(G) \rightarrow \Omega_c^{n,m+1}(G)$ задается обычным дифференциалом де Рама.

Пусть $(\Omega_c^*(G), d = d' + d'')$ – дифференциальная градуированная алгебра, ассоциированная с бикомплексом $(\Omega_c^{*,*}(G), d', d'')$.

Для произвольной коцепи $c \in C^{n,m}$ в двойном комплексе $(C^{*,*}, d_1, d_2)$ ее опускание при отображении

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^{(n)} \mapsto ((\gamma_1 \cdots \gamma_n)^{-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in G^{(n+1)},$$

если $n > 0$, и естественном вложении $G^{(0)} \rightarrow G$, если $n = 0$, задает поток де Рама степени $-m$ на многообразии $G^{(n+1)}$. Обозначим через $\tilde{c}$ соответствующий линейный функционал на $\Omega_c^{n,m}(G)$.

Морфизм Φ из двойного комплекса $(C^{*,*}, d_1, d_2)$ в двойной (b, B) -комплекс алгебры $\mathcal{A} = C_c^\infty(G)$ определяется следующим образом. Для любого $c \in C^{n,m}$ соответствующий элемент $\Phi(c) \in C^{n-m}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ является $(n-m+1)$ -линейным функционалом на $\mathcal{A}$, задаваемым формулой (с $\ell = n-m+1$)

$$\begin{aligned} \Phi(c)(a^0, \dots, a^\ell) \\ = \lambda_{n,m} \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{j(\ell-j)} \tilde{c}(da^{j+1} \dots da^\ell a^0 da^1 \dots da^j), \quad a^0, \dots, a^\ell \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

где $\lambda_{n,m} = n!/(\ell+1)!$. Здесь мы рассматриваем алгебру $\mathcal{A}$ как подалгебру алгебры $\Omega_c^{0,0}(G)$, и произведение и дифференциал d берутся в алгебре $\Omega_c^*(G)$.

ПРИМЕР 6.6. Если G – тривиальный группоид, ассоциированный с многообразием M (см. пример 5.3), то любой замкнутый поток C степени k на M определяет коцикл c в комплексе (C^*, d) . Этот коцикл имеет единственную ненулевую компоненту $c_{0,-k} = C \in C^{0,-k}$. Соответствующий циклический коцикл $\Phi(c)$ на алгебре $C_c^\infty(M)$ совпадает с коциклом, задаваемым формулой (3.3).

ПРИМЕР 6.7. Более обще, если $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением и $G = G_T^T$ – его приведенный группоид голономии, ассоциированный с полной трансверсалью T , задаваемой хорошим покрытием $\mathcal{U} = \{U_i\}$, то любой замкнутый голономно инвариантный трансверсальный поток C степени k на M определяет коцикл c в комплексе (C^*, d) . Этот коцикл имеет единственную ненулевую компоненту $c_{0,-k} = C \in C^{0,-k}$. Класс циклического коцикла $\Phi(c)$ на алгебре $C_c^\infty(G_T^T)$ в $HC^*(C_c^\infty(G_T^T))$ соответствует при изоморфизме, определяемом эквивалентностью по Морите, классу в $HC^*(C_c^\infty(G))$ циклического коцикла на $C_c^\infty(G)$, задаваемого потоком C (см. п. 6.2).

ПРИМЕР 6.8. Данный пример является обобщением примеров 3.3 и 3.4. Он также послужил мотивировкой для конструкции отображения Φ . Пусть M – n -мерное ориентированное многообразие, Γ – дискретная группа, действующая на M посредством сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Рассмотрим k -коцикл ω на Γ с коэффициентами в Γ -модуле $\Omega^n(M)$ гладких дифференциальных n -форм на M , $\omega \in Z^k(\Gamma, \Omega^n(M))$, такой, что $\omega(g_1, \dots, g_k) = 0$ в случае, когда либо $g_i = e$ при некотором i , либо $g_1 \dots g_k = e$. Как показано в [99; лемма 7.1], следующее равенство определяет циклический k -коцикл τ на алгебре $C_c^\infty(M \times \Gamma) \subset C(M) \rtimes_r \Gamma$ (см. пример 5.16):

$$\begin{aligned} \tau_\omega(f_0, \dots, f_k) \\ = \sum_{\substack{g_0, \dots, g_k \in \Gamma \\ g_0 \dots g_k = e}} \int_M f_0(x, g_0) f_1(xg_0, g_1) \dots f_k(xg_0g_1 \dots g_{k-1}, g_k) \omega(g_1, \dots, g_k)(x). \end{aligned}$$

Группоид скрещенного произведения $G = M \times \Gamma$ является этальным группоидом. Можно проверить, что k -коцикл ω определяет элемент $\omega \in C^{k,0}$ и справедливо соотношение $\Phi(\omega) = \tau_\omega$. За более подробной информацией мы отсылаем читателя к [19; гл. III, раздел 2 δ].

Конструкция циклического коцикла, соответствующего классу Годбийона–Вея слоения (см. формулу (6.5)), фактически, является частным случаем этой

конструкции (только в ней роль дискретной группы Γ играет приведенный группоид голономии слоения).

Пусть G – хаусдорфов гладкий этальный группоид. Рассмотрим пространство петель в G :

$$B^{(0)} = \{\gamma \in G : r(\gamma) = s(\gamma)\}.$$

Скажем, что подмножество $\mathcal{O} \subset B^{(0)}$ инвариантно под действием G , если для любых $\gamma \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ таких, что $s(g) = r(\gamma)$, имеет место включение $g\gamma g^{-1} \in \mathcal{O}$.

Для любого инвариантного подмножества $\mathcal{O} \subset B^{(0)}$ можно определить локализованные циклические когомологии $HC^n(C_c^\infty(G))_{\mathcal{O}}$. Более того, если $B^{(0)} = \bigsqcup_{\alpha} \mathcal{O}_{\alpha}$ – представление множества $B^{(0)}$ в виде объединения непересекающихся открытых инвариантных подмножеств, то имеет место разложение в прямую сумму [111]

$$HC^n(C_c^\infty(G)) = \bigoplus_{\alpha} HC^n(C_c^\infty(G))_{\mathcal{O}_{\alpha}}.$$

Назовем подмножество $\mathcal{O} \subset B^{(0)}$ эллиптическим, если оно инвариантно и порядок любого элемента $\gamma \in \mathcal{O}$ конечен. Назовем подмножество $\mathcal{O} \subset B^{(0)}$ гиперболическим, если оно инвариантно и порядок любого элемента $\gamma \in \mathcal{O}$ бесконечен.

В качестве открытого и замкнутого подмножества $\mathcal{O} \subset B^{(0)}$ можно взять множество единиц $\mathcal{O} = G^{(0)}$. Локализации на данном множестве обычно обозначаются нижним индексом $[1]$ вместо $\mathcal{O}$. Описанный выше морфизм Φ дает описание соответствующей компоненты $HP^*(C_c^\infty(G))_{[1]}$ в периодических циклических когомологиях $HP^n(C_c^\infty(G))$. А именно, имеет место изоморфизм

$$HP^{\text{ev/odd}}(C_c^\infty(G))_{[1]} \cong \bigoplus_{k \text{ чётно/нечётно}} H_{\tau}^{k+q}(BG).$$

Аналогичное описание в терминах гомологий двойных комплексов получено в работе [111] для произвольной эллиптической компоненты $\mathcal{O} \subset B^{(0)}$. Вычисление локализованных циклических когомологий для гиперболических компонент намного сложнее. Оно в значительно большей степени использует комбинаторику группоида.

7. Теория индекса трансверсально эллиптических операторов

7.1. Эквивариантные трансверсально эллиптические операторы и их индекс как обобщенная функция. Трансверсально эллиптические операторы появились впервые в работах [11], [12] в следующей ситуации. Пусть M – гладкое компактное многообразие и G – компактная группа Ли, действующая на M . Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли группы G . Для любого $X \in \mathfrak{g}$ обозначим через X_M соответствующее фундаментальное векторное поле на M . Векторы вида $X_M(x)$ с $X \in \mathfrak{g}$ порождают касательное пространство $T_x(G, x)$ к орбите, проходящей через точку x . Рассмотрим пространство

$$(T_G^*M)_x = \{\xi \in T_x^*M : \langle \xi, X_M(x) \rangle = 0 \text{ для любого } X \in \mathfrak{g}\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Классический псевдодифференциальный оператор $P: C^\infty(M, \mathcal{E}^+) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{E}^-)$ порядка m , действующий в сечениях G -эквивариантных векторных расслоений $\mathcal{E}^\pm$ на M , называется G -трансверсально эллип-

тическим, если он перестановочен с действием группы G и его главный символ $\sigma(P)(x, \xi): \pi^* \mathcal{E}^+ \rightarrow \pi^* \mathcal{E}^-$ обратим для любого $(x, \xi) \in T_G^* M \setminus \{0\}$.

Выбор G -инвариантной римановой метрики g на M и G -инвариантных эрмитовых структур на $\mathcal{E}^\pm$ задает гильбертовы структуры в пространствах $L^2(M, \mathcal{E}^\pm)$. Рассмотрим G -трансверсально эллиптический оператор $P \in \Psi^m(M, \mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-)$ как замкнутый неограниченный оператор из $L^2(M, \mathcal{E}^+)$ в $L^2(M, \mathcal{E}^-)$, получающийся замыканием с исходной области определения $C^\infty(M, \mathcal{E}^+)$. Тогда ядра $\text{Ker } P$ и $\text{Ker } P^*$ операторов P и P^* в пространствах $L^2(M, \mathcal{E}^+)$ и $L^2(M, \mathcal{E}^-)$ соответственно являются G -инвариантными замкнутыми подпространствами.

Для любого G -эquivариантного векторного расслоения $\mathcal{E}$ на M обозначим через $T(g)$ индуцированное действие элемента $g \in G$ в пространстве $L^2(M, \mathcal{E})$. Для любой функции $\phi \in C_c^\infty(G)$ определим оператор $T(\phi)$ в пространстве $L^2(M, \mathcal{E})$ по формуле

$$T(\phi) = \int_G \phi(g) T(g) dg.$$

G -эquivариантный индекс $\text{Ind}^G(P)$ оператора P есть G -инвариантная обобщенная функция на G , определяемая формулой

$$\langle \text{Ind}^G(P), \phi \rangle = \text{tr } T(\phi) \Pi_{\text{Ker } P} - \text{tr } T(\phi) \Pi_{\text{Ker } P^*}, \quad \phi \in C_c^\infty(G),$$

где $\Pi_{\text{Ker } P}$ и $\Pi_{\text{Ker } P^*}$ – ортогональные проекторы на $\text{Ker } P$ и $\text{Ker } P^*$ соответственно.

Главный символ $\sigma(P)$ G -трансверсально эллиптического оператора P определяет элемент $[\sigma(P)]$ эквивариантной K -теории $K_G(T_G^* M)$ пространства $T_G^* M$ с компактными носителями. G -эquivариантный индекс $\text{Ind}^G(P) \in \mathcal{D}'(G)^G$ оператора P зависит только от класса $[\sigma(P)] \in K_G(T_G^* M)$. Таким образом, G -эquivариантный индекс индуцирует гомоморфизм $R(G)$ -модулей (аналитический индекс)

$$\text{Ind}_a^G: K_G(T_G^* M) \rightarrow \mathcal{D}'(G)^G.$$

В работе [11] приведен алгоритм вычисления индекса G -трансверсально эллиптических операторов. Используя этот алгоритм, Берлин и Вернь [112], [113] получили явную кохомологическую формулу индекса (см. также [114] и имеющиеся там ссылки по поводу недавних продвижений в этом направлении).

Пусть M – гладкое компактное многообразие и G – компактная группа Ли, действующая на M . Для фиксированного $s \in G$ рассмотрим подмногообразие $M(s) = \{x \in M : sx = x\}$ неподвижных точек действия элемента s на M . Обозначим через $\mathcal{N} = \mathcal{N}(M, M(s))$ нормальное расслоение к $M(s)$ в M . Пусть $G(s)$ обозначает централизатор элемента s , $G(s) = \{t \in G : st = ts\}$, и $\mathfrak{g}(s)$ – его алгебру Ли. Действие группы G индуцирует действие $G(s)$ на $M(s)$, и расслоение $\mathcal{N} = \mathcal{N}(M, M(s))$ является $G(s)$ -эquivариантным векторным расслоением на $M(s)$. Справедлива формула

$$T_x M \cong T_x M(s) \oplus \mathcal{N}_x, \quad x \in M(s), \quad (7.1)$$

где $T_x M(s) = \{v \in T_x M : sv = v\}$, $\mathcal{N}_x = (1 - s)T_x M$.

Связность Леви-Чивиты ∇^M сохраняет разложение (7.1), определяя представление $\nabla^M = \nabla^0 \oplus \nabla^1$, где $\nabla^0 - G(s)$ -инвариантная связность на $TM(s)$, совпадающая со связностью Леви-Чивиты на $M(s)$, $\nabla^1 - G(s)$ -инвариантная связность на $\mathcal{N}$, согласованная с индуцированной метрикой на $\mathcal{N}$. Аналогичное представление справедливо для формы R^M римановой кривизны на TM :

$$R^M|_{M(s)} \cong R^0 \oplus R^1,$$

где R^0, R^1 – кривизны связностей ∇^0, ∇^1 соответственно.

Обозначим через $\Omega_G^\infty(\mathfrak{g}, M) = C^\infty(\mathfrak{g}, \Omega(M))^G$ пространство G -инвариантных гладких отображений из $\mathfrak{g}$ в пространство $\Omega(M)$ гладких дифференциальных форм на M . Элементы пространства $\Omega_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ будем называть G -эквивариантными формами на M . Определен эквивариантный дифференциал $d_{\mathfrak{g}}: \Omega_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \rightarrow \Omega_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ по формуле

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X) = d(\alpha(X)) - \iota(X_M)(\alpha(X)), \quad X \in \mathfrak{g},$$

где $\iota(X_M)$ обозначает внутреннее умножение на X_M . Скажем, что G -эквивариантная форма α на M эквивариантно замкнута, если $d_{\mathfrak{g}}\alpha = 0$.

Пусть $\mathcal{E}$ – G -эквивариантное векторное расслоение, наделенное G -инвариантной связностью ∇ . Ковариантная производная ∇ определяет разложение в прямую сумму $T\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus H\mathcal{E}$, где $H\mathcal{E}$ – горизонтальное пространство связности и вертикальное пространство $V\mathcal{E}$ изоморфно $\pi^*\mathcal{E}$. Определим отображение момента $\mu: \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{E})$ следующим образом. Для любых $m \in M$ и $v \in \mathcal{E}_m$ вектор $(\mu(Y)v)_m \in \mathcal{E}_m$ является проекцией вектора $(Y_{\mathcal{E}})_v \in T_v\mathcal{E}$ на $V\mathcal{E}_v \cong \mathcal{E}_m$. В случае, когда ∇ – связность Леви-Чивиты на TM , соответствующее отображение момента $\mu^M(Y) \in C^\infty(M, \text{so}(TM))$, $Y \in \mathfrak{g}$, называемое римановым моментом многообразия M , задается формулой

$$\mu^M(Y)Z = -\nabla_Z Y_M, \quad Z \in TM.$$

Эквивариантная кривизна связности ∇ определяется формулой

$$R(Y) = \mu(Y) + R,$$

где $R = \nabla^2 \in \Omega^2(M, \text{End } \mathcal{E})$ – кривизна связности ∇ и $\mu(Y): \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ – ассоциированное отображение момента.

Обозначим через $R^0(Y)$ и $R^1(Y)$ эквивариантные кривизны связностей ∇^0 и ∇^1 соответственно. Определим $G(s)$ -эквивариантные формы $J(M(s))$ и $D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))$ на $M(s)$ по формулам

$$J(M(s))(Y) = \det \frac{e^{R_0(Y)/2} - e^{-R_0(Y)/2}}{R_0(Y)},$$

$$D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(Y) = \det(1 - se^{R_1(Y)})$$

для любого $Y \in \mathfrak{g}(s)$. Формы $J(M(s))$ и $D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))$ эквивариантно замкнуты. Более того, для любого Y в достаточно малой окрестности нуля в $\mathfrak{g}(s)$, форма $J(M(s))(Y)$ обратима в $\Omega(M)$.

Пусть $P: C^\infty(M, \mathcal{E}^+) \rightarrow C^\infty(M, \mathcal{E}^-)$ – G -эквивариантный трансверсально эллиптический оператор, действующий в сечениях G -эквивариантных векторных расслоений $\mathcal{E}^\pm$ на M , и $\sigma: \pi^*\mathcal{E}^+ \rightarrow \pi^*\mathcal{E}^-$ – его главный символ. Выберем произвольные G -инвариантные связности $\nabla^{\mathcal{E}^\pm}$ на $\mathcal{E}^\pm$ и определим нечетный эндоморфизм $U(\sigma)$ $\mathbb{Z}_2$ -градуированного расслоения $\pi^*\mathcal{E} = \pi^*\mathcal{E}^+ \oplus \pi^*\mathcal{E}^-$ по формуле

$$U(\sigma)(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(x, \xi)^* \\ \sigma(x, \xi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbb{A}(\sigma)$ – суперсвязность на $\pi^*\mathcal{E}$, задаваемая формулой

$$\mathbb{A}(\sigma) = iU(\sigma) + \pi^*\nabla$$

или, эквивалентным образом,

$$\mathbb{A}(\sigma) = \begin{pmatrix} \pi^*\nabla^{\mathcal{E}^+} & i\sigma^* \\ i\sigma & \pi^*\nabla^{\mathcal{E}^-} \end{pmatrix}.$$

Для любого $Y \in \mathfrak{g}$ действие эквивариантной кривизны $F^\mathbb{A}(Y) \in \Omega(M, \text{End } \mathcal{E})$ суперсвязности $\mathbb{A}(\sigma)$ на $\Omega(M, \mathcal{E})$ имеет вид

$$F^\mathbb{A}(Y) = (\mathbb{A} - i(Y_M))^2 + \mathcal{L}^\mathcal{E}(Y),$$

где $\mathcal{L}^\mathcal{E}(Y)$ – дифференциальный оператор первого порядка, задаваемый производной Ли действия G на $\Omega(M, \mathcal{E})$.

Определим эквивариантный характер Черна $\text{ch}(\mathbb{A}(\sigma)) \in \Omega_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ по формуле

$$\text{ch}(\mathbb{A}(\sigma))(Y) = \text{tr}_s \exp F^\mathbb{A}(Y), \quad Y \in \mathfrak{g},$$

а также для любого $s \in G$ эквивариантный характер Черна $\text{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma)) \in \Omega_{G(s)}^\infty(\mathfrak{g}(s), M(s))$ по формуле

$$\text{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y) = \text{tr}_s s^\mathcal{E} \exp F^\mathbb{A}(Y)|_{M(s)}, \quad Y \in \mathfrak{g}(s),$$

где $s^\mathcal{E}$ обозначает действие в слоях расслоения $\mathcal{E}|_{M(s)}$, задаваемое действием s .

Определим эквивариантное продолжение канонической симплектической формы Ω на T^*M по формуле

$$\Omega(Y) = -d_Y \omega^M, \quad Y \in \mathfrak{g},$$

где d_Y обозначает оператор $d - \iota(Y_M)$ на $\Omega(M)$, или

$$\Omega(Y)(x, \xi) = \Omega(x, \xi) + \langle \xi, Y_M(x) \rangle, \quad (x, \xi) \in T^*M.$$

Наконец, нам понадобится понятие спуска обобщенных функций. Если N – подмногообразие группы G , трансверсальное G -орбитам, то можно определить ограничение на N произвольной обобщенной функции $\Theta \in \mathcal{D}'(G)^G$ как обобщенную функцию на N . Если $U_s(0)$ – достаточно малая окрестность 0 в $\mathfrak{g}(s)$, то подмногообразие $s \exp U_s(0)$ трансверсально к орбитам присоединенного действия группы G на G , и применение приведенного выше результата позволяет говорить об ограничении G -инвариантной обобщенной функции $\text{Ind}^G(P) \in \mathcal{D}'(G)$ на $s \exp U_s(0)$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $s \in G$. Для любого $Y \in U_s(0)$ имеет место равенство

$$\mathrm{Ind}^G(P)|_{s \exp U_s(0)}(Y) = \int_{T^*M(s)} \frac{1}{(2i\pi)^{n_s}} \frac{\exp(-id_Y \omega^M) \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)}{D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(Y) J(M(s))(Y)}.$$

В этой формуле $n_s = \dim M(s)$, и ее правую часть $\theta^s \in \mathcal{D}'(s \exp U_s(0))$ следует понимать таким образом: если $\phi \in C_c^\infty(s \exp U_s(0))$, то

$$I_\phi = \int_{\mathfrak{g}(s)} \frac{\exp(-id_Y \omega^M) \mathrm{ch}_s(\mathbb{A}(\sigma))(Y)}{D_s(\mathcal{N}(M, M(s)))(Y) J(M(s))(Y)} \phi(Y) dY$$

быстро убывает вдоль слоев расслоения $T^*M(s)$ и

$$\langle \theta^s, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{T^*M(s)} \frac{1}{(2i\pi)^{n_s}} I_\phi.$$

Теорема об индексе для трансверсально эллиптических операторов в K -теоретической форме была совсем недавно доказана Каспаровым [115]. В работе [116] доказана теорема об индексе для трансверсально эллиптических операторов в случае, когда группы изотропии конечны. В [117] результаты работы [11] были применены для доказательства теоремы об индексе на орби-фолдах. См. работы [118]–[121] по поводу применений теории индекса в теории представлений групп Ли. В работе [122] авторы связали эквивариантный индекс трансверсально эллиптических операторов с дробным аналитическим индексом проективных эллиптических операторов, ассоциированных с расслоением Азумаи, и со скрученной K -теорией (см. [123]).

Существование индекса трансверсально эллиптического оператора в случае, когда группа G некомпактна, было доказано Хёрмандером [11] (см. также [124], [125]). В этом случае простейшие примеры показывают, что G -эквивариантный индекс $\mathrm{Ind}^G(P) \in \mathcal{D}'(G)^G$ G -трансверсально эллиптического оператора P не является гомотопическим инвариантом своего главного символа $\sigma(P)$. Потому отображение аналитического индекса не определено. На самом деле, этот факт был одной из основных мотивировок для введения Конном циклических когомологий. Результаты, касающиеся вычисления индекса трансверсально эллиптического оператора для некомпактных групп Ли, будут приведены в следующем пункте.

7.2. Трансверсально эллиптические операторы на слоениях. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением, E – эрмитово векторное расслоение на M . Напомним, что главный символ p_m классического псевдодифференциального оператора $P \in \Psi^m(M, E)$ есть гладкое сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*E)$ на $T^*M \setminus \{0\}$. Назовем трансверсальным главным символом σ_P оператора P ограничение его главного символа p_m на $\tilde{N}^*\mathcal{F} = N^*\mathcal{F} \setminus \{0\}$. Таким образом, σ_P есть гладкое сечение расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*E)$ на $\tilde{N}^*\mathcal{F}$. Оператор $P \in \Psi^m(M, E)$ называется трансверсально эллиптическим, если его трансверсальный главный символ $\sigma_P(\nu)$ обратим для любого $\nu \in \tilde{N}^*\mathcal{F}$.

Предположим теперь, что E – голономно эквивариантное эрмитово векторное расслоение на M . Таким образом, в слоях расслоения E задано представление T группоида голономии G слоения $\mathcal{F}$, т.е. для любого $\gamma \in G$, $\gamma: x \rightarrow y$,

определен линейный оператор $T(\gamma): E_x \rightarrow E_y$. Трансверсальный главный символ σ_P оператора $P \in \Psi^m(M, E)$ голономно инвариантен, если для любого $\gamma \in G$, $\gamma: x \rightarrow y$, справедливо равенство

$$T(\gamma) \circ [\sigma_P(dh_\gamma^*(\nu))] = \sigma_P(\nu) \circ T(\gamma), \quad \nu \in N_y^* \mathcal{F},$$

где мы использовали изоморфизмы $(\pi^* E)_{dh_\gamma^*(\nu)} \cong E_x$ и $(\pi^* E)_\nu \cong E_y$.

Примерами трансверсально эллиптических операторов являются трансверсальные операторы Дирака (см. [126], [127] и приведенные в этих работах ссылки).

Пусть M – компактное многообразие, наделенное римановым слоением $\mathcal{F}$ четной коразмерности q , и g_M – трансверсально проектируемая метрика на M . Обозначим через $T^H M$ ортогональное дополнение к $T\mathcal{F}$. Пусть ∇ – трансверсальная связность Леви-Чивиты в $T^H M$.

Для любого $x \in M$ обозначим через $\text{Cl}(Q_x)$ алгебру Клиффорда евклидова пространства Q_x . Определим $\mathbb{Z}_2$ -градуированное векторное расслоение $\text{Cl}(Q)$ на M , слой которого в точке $x \in M$ есть $\text{Cl}(Q_x)$. Это расслоение ассоциировано с главным $SO(q)$ -расслоением $O(Q)$ ориентированных ортонормированных реперов в Q , $\text{Cl}(Q) = O(Q) \times_{O(q)} \text{Cl}(\mathbb{R}^q)$. Поэтому трансверсальная связность Леви-Чивиты ∇ индуцирует естественную плоскую вдоль слоев связность $\nabla^{\text{Cl}(Q)}$ в $\text{Cl}(Q)$, которая согласована с клиффордовым умножением и сохраняет $\mathbb{Z}_2$ -градуировку на $\text{Cl}(Q)$.

Комплексное векторное расслоение $\mathcal{E}$ на M , наделенное действием расслоения $\text{Cl}(Q)$, называется трансверсальным клиффордовым модулем. Будем обозначать действие элемента $a \in C^\infty(M, \text{Cl}(Q))$ на $s \in C^\infty(M, \mathcal{E})$ через $c(a)s \in C^\infty(M, \mathcal{E})$. Трансверсальный клиффордов модуль $\mathcal{E}$ называется самосопряженным, если он наделен такой эрмитовой метрикой, что оператор $c(f): \mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_x$ кососимметричен для любых $x \in M$ и $f \in Q_x$. Трансверсальный клиффордов модуль $\mathcal{E}$ имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$. Связность $\nabla^\mathcal{E}$ на трансверсальном клиффордовом модуле $\mathcal{E}$ называется клиффордовой связностью, если для любых $f \in C^\infty(M, T^H M)$ и $a \in C^\infty(M, \text{Cl}(Q))$

$$[\nabla_f^\mathcal{E}, c(a)] = c(\nabla_f^{\text{Cl}(Q)} a).$$

Самосопряженный трансверсальный клиффордов модуль, наделенный эрмитовой клиффордовой связностью, называется трансверсальным клиффордовым расслоением.

Обозначим через $\tau \in C^\infty(M, T^H M)$ вектор средней кривизны слоения $\mathcal{F}$. Если $e_1, \dots, e_p$ – локальный ортонормированный базис в $T\mathcal{F}$, то

$$\tau = \sum_{i=1}^p P_H(\nabla_{e_i}^L e_i).$$

Пусть $\mathcal{E}$ – трансверсальное клиффордово расслоение на M , наделенное эрмитовой клиффордовой связностью $\nabla^\mathcal{E}$. Пусть $f_1, \dots, f_q$ – локальный ортонормированный базис в $T^H M$. Трансверсальный оператор Дирака $D_\mathcal{E}$ определяется по формуле

$$D_\mathcal{E} = \sum_{\alpha=1}^q c(f_\alpha) \left(\nabla_{f_\alpha}^\mathcal{E} - \frac{1}{2} g_M(\tau, f_\alpha) \right).$$

Оператор $D_{\mathcal{E}}$ формально самосопряжен в пространстве $L^2(M, \mathcal{E})$. Отметим также, что оператор $D_{\mathcal{E}}$ имеет голономно инвариантный главный символ, что следует из того, что метрика g_M является трансверсально проектируемой.

Другой пример трансверсально эллиптического оператора – трансверсальный оператор де Рама, действующий в пространстве $C^\infty(M, \wedge T^H M^*)$ по формуле

$$D_H = d_H + d_H^*,$$

где d_H – трансверсальный дифференциал де Рама (см. (6.1)). Если слоение допускает трансверсальную спинорную структуру, то оператор D_H связан с трансверсальным оператором Дирака $D_{F(Q) \otimes F(Q)^*}$, где $F(Q)$ – ассоциированное трансверсальное спинорное расслоение, следующим образом:

$$D_{F(Q) \otimes F(Q)^*} = D_H - \frac{1}{2}(\varepsilon_{\tau^*} + i_{\tau}).$$

Таким образом, эти операторы совпадают тогда и только тогда, когда $\tau = 0$, т. е. когда все слои являются минимальными подмногообразиями [126].

В работе [128] получены формулы для индекса инвариантных трансверсально эллиптических операторов как обобщенной функции в случае, когда группа $G = \mathbb{R}$ действует локально свободно и изометрично на компактном римановом многообразии M . В этом случае действие определяет несингулярный изометрический поток $\phi_s: M \rightarrow M$ и его орбиты определяют слоение $\mathcal{F}$.

Пусть E и F – эрмитовы векторные расслоения на M . Предположим, что имеется действие группы $\mathbb{R}$ в слоях расслоений E и F , сохраняющее эрмитову структуру и накрывающее действие $\mathbb{R}$ на M . Пусть $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$ – произвольный $\mathbb{R}$ -инвариантный трансверсально эллиптический оператор первого порядка.

Напомним, что периодическая орбита потока ϕ называется невырожденной, если 1 не является собственным значением ассоциированного отображения Пуанкаре. Обозначим через X генератор потока. Тогда имеется естественное действие потока в нормальном расслоении Q :

$$d\phi_s(x): Q_x = T_x M / \mathbb{R}X(x) \rightarrow Q_{\phi_s(x)} = T_{\phi_s(x)} M / \mathbb{R}X(\phi_s(x)).$$

Периодическая орбита c с периодом l (не обязательно минимальным) потока ϕ называется невырожденной (или простой), если

$$\det(\text{id} - d\phi_l(x): Q_x \rightarrow Q_x) \neq 0,$$

где $x \in c$ – произвольная точка на c , $\phi_l(x) = x$. В этом случае положим

$$b_l(c) = \frac{\text{Tr}(\phi_l: E_x \rightarrow E_x) - \text{Tr}(\phi_l: F_x \rightarrow F_x)}{|\det(\text{id} - d\phi_l(x): Q_x \rightarrow Q_x)|}.$$

ТЕОРЕМА 7.3 [128]. *Предположим, что все замкнутые орбиты потока ϕ_s просты. Ограничение индекса $\text{Ind}^{\mathbb{R}}(D) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})^{\mathbb{R}}$ оператора D на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ задается формулой*

$$\text{Ind}^{\mathbb{R}}(D) = \sum_c l(c) \sum_{k \neq 0} b_{kl(c)}(c) \cdot \delta_{kl(c)},$$

где c пробегает множество всех примитивных замкнутых орбит потока ϕ и $l(c)$ обозначает длину c (ее минимальный положительный период).

Поскольку множество всех периодов периодических орбит потока отделено от нуля, ограничение функции $\text{Ind}^{\mathbb{R}}(D)$ на некоторую окрестность нуля есть обобщенная функция, носитель которой содержится в $\{0\}$, и потому есть линейная комбинация дельта-функции в нуле δ_0 и ее производных.

Имеется важный частный случай, в котором производные дельта-функции δ_0 не входят в формулу для $\text{Ind}^{\mathbb{R}}(D)$, а именно случай, когда D – трансверсальный оператор де Рама. Прежде всего отметим, что в этом случае вклад невырожденной периодической орбиты c потока ϕ задается формулой

$$\varepsilon_l(c) = \text{sign det}(\text{id} - d\phi_l(x): Q_x \rightarrow Q_x).$$

Пусть $T^H M$ обозначает ортогональное дополнение к $T\mathcal{F}$. Кривизна распределения $T^H M$ есть трансверсальная 2-форма $R_H \in C^\infty(M, \Lambda^2 T^H M^*)$ (см. (6.1)), и потому определена форма $\text{Pf}(R_H/2\pi) \in C^\infty(M, \Lambda^q T^H M^*)$. Обозначим через X^* 1-форму на M , двойственную векторному полю X относительно римановой метрики. Произведение $\text{Pf}(R_H/2\pi) \wedge X^*$ есть дифференциальная форма высшей степени на M .

ТЕОРЕМА 7.4 [128]. *В некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\text{Ind}^{\mathbb{R}}(D) = \int_M \text{Pf}\left(\frac{R_H}{2\pi}\right) \wedge X^* \cdot \delta_0.$$

Обратимся теперь к случаю, когда распределение $T^H M$ интегрируемо. Обозначим через $\mathcal{H}$ слоение, порождаемое распределением $T^H M$. Действие потока ϕ сохраняет слоение $\mathcal{H}$, т. е. переводит любой слой слоения $\mathcal{H}$ в (возможно, другой) слой. Имеется голономно инвариантная трансверсальная форма объема Λ на $\mathcal{H}$, соответствующая форме dt на $\mathbb{R}$. Любой трансверсальный оператор Дирака D является касательно эллиптическим оператором по отношению к слоению $\mathcal{H}$ и потому определен Λ -индекс $\text{Ind}_\Lambda(D)$ оператора D (см. п. 8.1).

ТЕОРЕМА 7.5 [128]. *В некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\text{Ind}^{\mathbb{R}}(D) = \text{Ind}_\Lambda(D) \cdot \delta_0.$$

В работе [129] изучался случай, когда поток ϕ необязательно изометричен и оператор D не является инвариантным. Точнее, рассматривается следующая ситуация. Пусть M – компактное многообразие, ϕ – несингулярный поток на M , X обозначает генератор потока ϕ . Предположим, что существует такое интегрируемое распределение $H \subset TM$, которое инвариантно под действием потока и трансверсально орбитам потока. Если $\mathcal{H}$ – слоение на M , определяемое распределением H , то поток ϕ сохраняет слоение $\mathcal{H}$. Рассмотрим послойный комплекс де Рама $(\Omega(\mathcal{H}), d_{\mathcal{H}})$, где $\Omega(\mathcal{H}) = C^\infty(M, \Lambda T\mathcal{H}^*)$ – пространство гладких послойных форм на M , $d_{\mathcal{H}}$ – послойный дифференциал де Рама. Выберем произвольную риманову метрику на слоях слоения $\mathcal{H}$ и продолжим ее до римановой метрики на M , полагая, что $|X(x)| = 1$ для любого $x \in M$ и вектор X ортогонален H . Рассмотрим послойный оператор де Рама

$$D_{\mathcal{H}} = d_{\mathcal{H}} + d_{\mathcal{H}}^*.$$

Он совпадает с трансверсальным оператором де Рама для слоения $\mathcal{F}$, задаваемого орбитами потока ϕ .

ТЕОРЕМА 7.6 [129]. В некоторой окрестности нуля справедливо равенство

$$\mathrm{Ind}^{\mathbb{R}}(D_{\mathcal{H}}) = \int_M \mathrm{Pf}\left(\frac{R_{\mathcal{H}}}{2\pi}\right) \wedge X^* \cdot \delta_0. \quad (7.2)$$

Если все замкнутые орбиты потока ϕ_s просты, то вне нуля имеем

$$\mathrm{Ind}^{\mathbb{R}}(D_{\mathcal{H}}) = \sum_c l(c) \sum_{k \neq 0} \varepsilon_{kl(c)}(c) \cdot \delta_{kl(c)}, \quad (7.3)$$

где c пробегает множество всех примитивных замкнутых орбит потока ϕ_t , $l(c)$ обозначает длину c , x – произвольная точка на c и

$$\varepsilon_{l(c)}(c) = \mathrm{sign} \det(\mathrm{id} - d\phi_{l(c)}(x): T_x \mathcal{H} \rightarrow T_x \mathcal{H}).$$

В данном случае коэффициент при δ_0 совпадает с эйлеровой Λ -характеристикой $\chi_{\Lambda}(\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$, введенной в работе [15] как Λ -индекс послыйного оператора де Рама $D_{\mathcal{H}}$. Равенство

$$\chi_{\Lambda}(\mathcal{F}) = \int_M \mathrm{Pf}\left(\frac{R_{\mathcal{H}}}{2\pi}\right) \wedge X^*$$

является следствием теоремы Гаусса–Бонне для измеримых слоений, доказанной в [15] как частный случай теоремы об индексе для измеримых слоений (см. теорему 8.1).

Отметим также, что для изометрического потока ϕ формула (7.3) была доказана независимо в работе [130].

Мы отсылаем читателя к работе [129] по поводу связей теоремы 7.6 с редуцированными когомологиями слоения $\mathcal{H}$ и теорией Ходжа слоения. Учитывая эти связи, утверждение теоремы 7.6 можно понимать как динамическую формулу Лефшеца для потоков, т. е. формулу, связывающую инварианты слоения с замкнутыми орбитами (обсуждение динамических формул Лефшеца для потоков см., например, в работе [131]). Следует также упомянуть динамическую формулу Лефшеца для потоков, которая была впервые предложена в качестве гипотезы Гийемином [132] и позже независимо Паттерсоном [133]. Эта формула имеет вид, аналогичный формуле (7.3), но она написана в случае, когда трансверсальное слоение $\mathcal{H}$ имеет коразмерность, большую единицы, и потому аналитические результаты теории индекса трансверсально эллиптических операторов неприменимы (см. обзор результатов, относящихся к гипотезе Гийемина–Паттерсона, в книге [134]).

Недавний интерес к теории индекса трансверсально эллиптических операторов, в частности, в ситуации, когда имеется поток на компактном многообразии, сохраняющий слоение, и к динамическим формулам Лефшеца для потоков тесно связан с подходом к изучению арифметических дзета-функций, основанном на аналогиях между арифметической геометрией и теорией динамических систем на многообразиях со слоением, который был предложен Денингером (см., например, работы [135], [136] и имеющиеся в них ссылки).

В работе [137] результаты работы [129] были распространены на случай действия произвольной группы Ли. Точнее, в ней рассматривается более общая

ситуация, когда $\mathcal{H}$ – слоение Ли на компактном многообразии M . В этом случае можно определить действие структурной группы Ли G на M “с точностью до послойных гомотопий”, что позволяет определить индекс $\text{Ind}^G(D_{\mathcal{H}})$ послойного оператора де Рама $D_{\mathcal{H}}$ как обобщенную функцию на группе G . В [137] доказана формула Лефшеца, дающая выражение для $\text{Ind}^G(D_{\mathcal{H}})$ в терминах неподвижных точек действия. Ее можно рассматривать как некоторое обобщение формулы Сельберга.

7.3. Спектральные тройки, ассоциированные с трансверсально эллиптическими операторами. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением, E – голономно эквивариантное эрмитово векторное расслоение на M . Как показано в [14], пара (H, F) , где гильбертово пространство $H = L^2(M, E)$ надделено действием алгебры $C^*(M, \mathcal{F})$ при помощи $*$ -представления R_E и $F \in \Psi^0(M, E)$ – трансверсально эллиптический оператор с голономно инвариантным трансверсальным главным символом σ_F таким, что $\sigma_F^2 = 1$, $\sigma_F^* = \sigma_F$, является фредгольмовым модулем над C^* -алгеброй $C^*(M, \mathcal{F})$. Таким образом, трансверсально эллиптический оператор F определяет класс $[F] \in K_0(C^*(M, \mathcal{F}))$. Если рассмотреть пару (H, F) как фредгольмов модуль над алгеброй $C_c^\infty(G)$, то этот модуль является суммируемым, и потому определен его характер Черна $\tau_n = \text{ch}_*(H, F) \in HC^n(C_c^\infty(G))$.

Аналогичным образом можно рассматривать компактное G -многообразие M (G – произвольная группа Ли) и G -эквивариантное эрмитово векторное расслоение E на M . Тогда пара (H, F) , где $H = L^2(M, E)$ и $F \in \Psi^0(M, E)$ – (необязательно G -инвариантный) трансверсально эллиптический оператор с инвариантным трансверсальным главным символом σ_F , причем $\sigma_F^2 = 1$, $\sigma_F^* = \sigma_F$, является фредгольмовым модулем над C^* -алгеброй $C^*(G)$. Соответствующий фредгольмов модуль над алгеброй $C_c^\infty(G)$ является суммируемым и определен его характер Черна $\tau_n = \text{ch}_*(H, F) \in HC^n(C_c^\infty(G))$.

Как указано в [14], если оператор F инвариантен, то его G -эквивариантный индекс $\chi = \text{Ind}^G(F) \in \mathcal{D}'(G)^G$ определяет след на групповой алгебре $C_c^\infty(G)$, т.е. элемент $HC^0(C_c^\infty(G))$, и при достаточно больших N имеет место соотношение $\tau_{2N} = S^N \chi$. Другими словами, характер Черна τ_{2N} и G -эквивариантный индекс χ определяют одинаковые элементы в $HP^{\text{ev}}(C_c^\infty(G))$. В случае, когда оператор F не является инвариантным, характер Черна $\text{ch}_*(H, F) \in HP^*(C_c^\infty(G))$ фредгольмова модуля $(H, \mathcal{F})$ является корректно определенным гомотопическим инвариантом в отличие от его индекса как обобщенной функции. Это наблюдение послужило одной из мотивировок для введения Конном понятия циклических когомологий.

В работе [138] были построены спектральных тройки, ассоциированные с трансверсально эллиптическими операторами на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$. Точнее, в [138] доказано, что тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, где:

- 1) $\mathcal{A}$ – алгебра $C_c^\infty(G)$;
- 2) $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство $L^2(M, E)$ квадратично интегрируемых сечений голономно эквивариантного эрмитова векторного расслоения E , на котором элемент $k \in \mathcal{A}$ действует посредством $*$ -представления R_E ;

- 3) D – такой самосопряженный трансверсально эллиптический оператор первого порядка с голономно инвариантным трансверсальным главным символом, что оператор D^2 самосопряжен и имеет скалярный главный символ;

является конечномерной спектральной тройкой размерности $q = \text{codim } \mathcal{F}$.

В качестве примера можно предположить, что слоение $\mathcal{F}$ риманово и g_M – трансверсально проектируемая метрика на M . Пусть H – ортогональное дополнение к $F = T\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{H} = L^2(M, \Lambda^* H^*)$ – пространство трансверсальных дифференциальных форм, наделенное естественным действием $R_{\Lambda^* H^*}$ алгебры $\mathcal{A}$ и D – оператор трансверсальной сигнатуры $d_H + d_H^*$. Тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является конечномерной спектральной тройкой размерности $q = \text{codim } \mathcal{F}$.

В работе [138] доказано, что спектральные тройки, ассоциированные с трансверсально эллиптическими операторами, являются гладкими и имеют дискретный спектр размерностей Sd , который содержится в множестве $\{v \in \mathbb{N} : v \leq q\}$ и является простым.

Следует отметить, что в рассматриваемом случае алгебра $\mathcal{A}$ не унитарна, что можно понимать как отражение факта некомпактности пространства $M/\mathcal{F}$. Поэтому определения различных геометрических и аналитических объектов, данные в унитарном случае, необходимо модифицировать, учитывая поведение этих объектов на “бесконечности”. В работе [139] была построена алгебра $\Psi_0^*(\mathcal{A})$, ассоциированная с произвольной гладкой спектральной тройкой $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$. Эту алгебру можно рассматривать как аналог алгебры псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии, символы которых обращаются в нуль на бесконечности вместе с производными любого порядка. В этой же работе дано описание некоммутативного псевдодифференциального исчисления для спектральных троек, ассоциированных с трансверсально эллиптическими операторами, в терминах трансверсального псевдодифференциального исчисления на многообразиях со слоением и описание некоммутативного геодезического потока (см. также [126]).

ПРИМЕР 7.7. Пусть $\mathcal{A} = C^\infty(S^1) \rtimes \Gamma$ – алгебраическое скрещенное произведение алгебры $C^\infty(S^1)$ на группу Γ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1 . Произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$ представим в виде конечной суммы

$$a = \sum_{\phi \in \Gamma} a_\phi U_\phi^*, \quad a_\phi \in C^\infty(S^1),$$

умножение задается формулой

$$(a_\phi U_\phi^*)(b_\psi U_\psi^*) = a_\phi(b_\psi \circ \phi) U_{\phi\psi}^*$$

и инволюция – формулой

$$(a_\phi U_\phi^*)^* = U_{\phi^{-1}}^* \bar{a}$$

(см. пример 5.16). Определим инволютивное представление алгебры $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(S^1)$ по формуле

$$(\rho(a U_\phi^*) \xi)(x) = a(x) \phi'(x)^{1/2} \xi(\phi(x)), \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad x \in S^1.$$

В качестве оператора D возьмем оператор $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$.

Тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является спектральной тройкой только в том случае, когда действие группы Γ изометрично. В общем случае (см. [75]) тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является σ -спектральной тройкой, где автоморфизм σ алгебры $\mathcal{A}$ определяется формулой

$$\sigma(aU_\phi^*) = \frac{d\phi}{dx} aU_\phi^*.$$

ПРИМЕР 7.8. Приведем примеры спектральных троек $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, ассоциированных с некоммутативным тором T_θ^2 (см. [140] и пример 5.26). Эти тройки параметризуются комплексным числом τ с $\text{Im } \tau > 0$. Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\theta = \left\{ a = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} a_{nm} U^n V^m : a_{nm} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^2) \right\}.$$

Определим канонический нормализованный след τ_0 на $\mathcal{A}_\theta$ по формуле

$$\tau_0(a) = a_{00}, \quad a \in \mathcal{A}_\theta.$$

Пусть $L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau_0)$ обозначает гильбертово пространство, являющееся пополнением пространства $\mathcal{A}_\theta$ по отношению к скалярному произведению $(a, b) = \tau_0(b^*a)$, $a, b \in \mathcal{A}_\theta$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ определяется как сумма двух копий пространства $L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau_0)$, наделенная градуировкой, задаваемой оператором

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Представление ρ алгебры $\mathcal{A}_\theta$ в $\mathcal{H}$ задается левым умножением, т.е. для любого $a \in \mathcal{A}_\theta$

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a) & 0 \\ 0 & \lambda(a) \end{pmatrix},$$

где оператор $\lambda(a)$ задается на $\mathcal{A}_\theta \subset L^2(\mathcal{A}_\theta, \tau_0)$ формулой

$$\lambda(a)b = ab, \quad b \in \mathcal{A}_\theta.$$

Введем дифференцирования δ_1 и δ_2 на алгебре $\mathcal{A}_\theta$ по формулам

$$\delta_1(U) = 2\pi i U, \quad \delta_1(V) = 0; \quad \delta_2(U) = 0, \quad \delta_2(V) = 2\pi i V.$$

Оператор D явно зависит от τ и имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \delta_1 + \tau \delta_2 \\ -\delta_1 - \bar{\tau} \delta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построенные тройки являются двумерными гладкими спектральными тройками.

Мы отсылаем читателя к книге [23] и приведенной в ней библиографии по поводу теории индекса эллиптических операторов со сдвигами и связанной с ней некоммутативной геометрией. Теория эллиптических операторов на некоммутативном торе T_θ^2 (см. [92], [19]) является частным примером этой общей теории.

7.4. Параримановы слоения и трансверсально гипоеллиптические операторы. Слоение $\mathcal{F}$ на многообразии M называется параримановым, если существует такое интегрируемое распределение V на M , содержащее касательное расслоение $T\mathcal{F}$ к $\mathcal{F}$, что расслоения TM/V и $V/T\mathcal{F}$ являются голономно эквивариантными римановыми расслоениями. Если V – интегрируемое распределение на M , задающее парариманову структуру, и $\mathcal{V}$ – соответствующее слоение на M , $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$, то $\mathcal{V}$ – риманово и ограничение слоения $\mathcal{F}$ на каждый слой L слоения $\mathcal{V}$ является римановым слоением на L .

Как уже было сказано в п. 6.2, интерес к параримановым слоениям заключается в том, что в некоторых задачах теории индекса изучение произвольных слоений можно свести к изучению параримановых слоений. Опишем соответствующую конструкцию Конна и Москвичи [63]. На самом деле, Конн и Москвичи рассматривали близкую ситуацию (строго эквивалентную по Морите): вместо многообразия со слоением они рассматривали ориентированное гладкое многообразие W , наделенное действием дискретной группы Γ . Рассмотрим расслоение $\pi: P(W) \rightarrow W$, слоем $P_x(W)$ которого в точке $x \in W$ является пространство всех евклидовых метрик на векторном пространстве $T_x W$. Тем самым, точка $p \in P(W)$ задается точкой $x \in W$ и невырожденной квадратичной формой на $T_x W$. Пусть $F_+(W)$ – расслоение положительных реперов в расслоении W , слоем $F_x(W)$ которого в точке $x \in W$ является пространство линейных изоморфизмов $\mathbb{R}^n \rightarrow T_x W$, сохраняющих ориентацию. Эквивалентным образом, расслоение $P(W)$ можно описать как пространство орбит расслоения $F_+(W)$ относительно послынного действия подгруппы $SO(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$, $P(W) = F_+(W)/SO(n)$. Будем использовать естественную инвариантную риманову метрику на симметрическом пространстве $GL_+(n, \mathbb{R})/O(n)$, которая задается матричной нормой Гильберта–Шмидта на касательном пространстве к $GL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, отождествляемом с пространством симметрических матриц размера $n \times n$. Если мы перенесем эту метрику на слои P_x расслоения $P(W) = P$, мы получим евклидову структуру на вертикальном распределении $V \subset TP$. Нормальное пространство $N_p = T_p P / V_p$ естественно отождествляется с пространством $T_x W$, $x = \pi(p)$. Таким образом, квадратичная форма на $T_x W$, соответствующая точке p , задает естественную евклидову структуру на N_p .

Имеются естественные действия группы Γ на $F_+(W)$ и P . Это действие переводит слои расслоения $\pi: P \rightarrow W$ в слои. Более того, введенные выше евклидовы структуры на распределениях V и N инвариантны под действием группы Γ . В этом случае говорят, что на P имеется треугольная структура, инвариантная при действии группы. Она является аналогом в данной ситуации парариманова слоения. Очень существенным аспектом этой конструкции является тот факт, что слои расслоения $\pi: P \rightarrow W$ являются полными римановыми многообразиями неположительной кривизны.

Другим важным свойством произвольного парариманова слоения $(M, \mathcal{F})$ является существование фредгольмова модуля над его C^* -алгеброй $C^*(M, \mathcal{F})$. Конструкция такого модуля приведена в работе [95]. Она использует трансверсально гипоеллиптические операторы и псевдодифференциальные операторы типа (ρ, δ) .

В работе [63] Конн и Московичи описали спектральную тройку, ассоциированную с инвариантной треугольной структурой. Таким образом, пусть P – гладкое многообразие, наделенное действием дискретной группы Γ . Предположим, что P является тотальным пространством расслоения $\pi: P \rightarrow W$ над ориентированным гладким многообразием W . Действие Γ сохраняет многообразие W и переводит слои расслоения $\pi: P \rightarrow W$ в слои. Наконец, Γ сохраняет евклидовы структуры на вертикальном распределении $V \subset TP$ и на горизонтальном распределении $N = TP/V$.

Рассмотрим эрмитово векторное расслоение $E = \Lambda^*(V^* \otimes \mathbb{C}) \otimes \Lambda^*(N^* \otimes \mathbb{C})$ над P . Эрмитова структура в слоях расслоения E задается евклидовыми структурами на V и N . Расслоения $\Lambda^*(V^* \otimes \mathbb{C})$ и $\Lambda^*(N^* \otimes \mathbb{C})$ имеют операторы градуировки γ_V и γ_N , задаваемые операторами Ходжа евклидовых структур и ориентациями расслоений V и N . Евклидовы структуры на V и N определяют также естественную форму объема $v \in \Lambda^* V^* \otimes \Lambda^* N^* = \Lambda T^* P$.

Пусть $\mathcal{A}$ – скрещенное произведение $C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma$. Напомним, что эта алгебра порождается как линейное пространство выражениями вида fU_g , где $f \in C_c^\infty(P)$ и $g \in \Gamma$ (см. пример 5.6).

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство $L^2(P, E)$, наделенное гильбертовой структурой, задаваемой формой объема v и эрмитовой структурой на E . Действие алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}$ задается следующим образом. Функция $f \in C_c^\infty(P)$ действует как соответствующий оператор умножения в $\mathcal{H}$. Для любого $g \in \Gamma$ унитарный оператор U_g в $\mathcal{H}$ задается естественным действием группы Γ в сечениях расслоений V и N .

Рассмотрим слоение $\mathcal{V}$, задаваемое слоями расслоения P . Тогда $V = T\mathcal{V}$, N – нормальное расслоение к $\mathcal{V}$. Обозначим через $d_L: C^\infty(P, E) \rightarrow C^\infty(P, E)$ касательный дифференциал де Рама, ассоциированный с $\mathcal{V}$ (см. (6.1)). Пусть Q_L – касательный дифференциальный оператор второго порядка в $C^\infty(P, E)$, задаваемый формулой

$$Q_L = d_L d_L^* - d_L^* d_L.$$

Как показано в [63], главный символ оператора Q_L гомотопен главному символу оператора сигнатуры $d_L + d_L^*$.

Пусть H – произвольное распределение на P , трансверсальное к V . Рассмотрим соответствующий трансверсальный дифференциал де Рама d_H (см. (6.1)) и трансверсальный оператор сигнатуры

$$Q_H = d_H + d_H^*.$$

Хотя этот оператор зависит от выбора распределения H , его трансверсальный главный символ не зависит от H . Определим смешанный оператор сигнатуры Q в $C^\infty(P, E)$ по формуле

$$Q = Q_L(-1)^{\partial_N} + Q_H,$$

где $(-1)^{\partial_N}$ обозначает оператор четности в трансверсальном направлении, т. е. он совпадает с 1 на $\Lambda^{\text{ev}} N^*$ и с -1 на $\Lambda^{\text{odd}} N^*$. Предположим, что Q существенно самосопряжен в $\mathcal{H}$. Используя функциональное исчисление, определим оператор D по формуле $Q = D|D|$.

Следует отметить, что хотя данная конструкция применима к любому многообразию, наделенному инвариантной треугольной структурой, поскольку многообразие P некомпактно, сложным аналитическим вопросом является вопрос о существенной самосопряженности оператора Q . В работе [63] этот вопрос удалось разрешить только для приведенного выше примера треугольной структуры на расслоении евклидовых метрик $P(W)$, ассоциированной с произвольной группой Γ диффеоморфизмов гладкого многообразия W .

ТЕОРЕМА 7.9 [63]. *Для треугольной структуры, ассоциированной с произвольной группой Γ диффеоморфизмов гладкого многообразия W , оператор Q самосопряжен, и построенная выше тройка $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ является спектральной тройкой размерности $\dim V + 2 \dim N$.*

Доказательство этой теоремы существенно использует псевдодифференциальное исчисление на многообразиях Гейзенберга, построенное Билзом и Грейнером [141]. В этой работе показано также, что некоммутативный интеграл $\oint$, задаваемый данной спектральной тройкой, совпадает со следом типа Водзицкого–Гийеммина, определенным на алгебре псевдодифференциальных операторов Билза и Грейнера.

В работе [142] Конн и Московичи вычислили характер Черна спектральной тройки, построенной в теореме 7.9, используя некоммутативную локальную теорему об индексе, теорему 3.18. На самом деле, непосредственное вычисление характера Черна спектральной тройки, ассоциированной с треугольной структурой на гладком многообразии, по формулам, приведенным в теореме 3.18, даже в одномерном случае достаточно громоздко. Получаются формулы, содержащие тысячи членов, большинство из которых дают нулевой вклад. Чтобы априори упростить вычисления, Конн и Московичи ввели алгебру Хопфа $\mathcal{H}_n$ трансверсальных векторных полей на $\mathbb{R}^n$, играющую роль квантовой группы симметрий. Они построили циклические когомологии $HC^*(\mathcal{H})$ для произвольной алгебры Хопфа $\mathcal{H}$ и отображение

$$HC^*(\mathcal{H}_n) \rightarrow HP^*(C_c^\infty(P) \rtimes \Gamma).$$

Более того, они показали, что циклические когомологии $HC^*(\mathcal{H}_n)$ канонически изоморфны когомологиям Гельфанда–Фукса $H^*(W_n, SO(n))$ (см. п. 8.3). Тем самым, определен характеристический гомоморфизм

$$\chi_{SO(n)}^*: H^*(W_n, SO(n)) \rightarrow HP^*(C^\infty(P) \rtimes \Gamma).$$

Он является композицией отображения (8.6) и гомоморфизма Φ_* (см. (6.7)).

Следующая теорема является основным результатом работы [142] (см. также [143] и обзор [144]).

ТЕОРЕМА 7.10. *Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ – спектральная тройка, введенная в теореме 7.9. Характер Черна $\text{ch}_*(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D) \in HP^*(C^\infty(P(W)) \rtimes \Gamma)$ является образом некоторого универсального класса $\mathcal{L}_n \in H^*(W_n, SO(n))$ при характеристическом гомоморфизме $\chi_{SO(n)}^*$:*

$$\text{ch}_*(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D) = \chi_{SO(n)}^*(\mathcal{L}_n).$$

Имеется еще одно вычисление, иллюстрирующее локальную теорему об индексе Конна и Москвичи, которое приведено в работе [145]. Пусть Σ – риманова поверхность без края и Γ – дискретная псевдогруппа локальных конформных отображений поверхности Σ , не имеющая неподвижных точек. Используя методы работы [142] (расслоение кэлеровых метрик P на Σ , гипоеллиптические операторы, алгебры Хопфа), в работе [145] построена спектральная тройка, являющаяся обобщением на данный случай классического комплекса Дольбо, и вычислен характер Черна этой спектральной тройки как циклический коцикл на скрещенном произведении $C_c^\infty(\Sigma) \rtimes \Gamma$ в терминах фундаментального класса $[\Sigma]$ и циклического 2-коцикла, являющегося обобщением класса, двойственного по Пуанкаре к классу Эйлера. Эта формула может рассматриваться как некоммутативная версия теоремы Римана–Роха.

Алгебра Хопфа того же самого типа, что и алгебра $\mathcal{H}_1$, была построена Краймером [146] при изучении алгебраической структуры пертурбативной квантовой теории поля. Эта связь развивалась далее в работах [147]–[149]. Следует также упомянуть работы Конна и Москвичи [150], [151] по модулярным алгебрам Гекке, в которых показано, в частности, что такая важная алгебраическая структура на модулярных формах, как скобки Ранкина–Козна, имеет естественную интерпретацию на языке некоммутативной геометрии в терминах алгебры Хопфа $\mathcal{H}_1$.

8. Теория индекса касательно эллиптических операторов

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением, E – гладкое векторное расслоение на M . Линейный дифференциальный оператор D порядка μ , действующий в $C^\infty(M, E)$, называется касательным дифференциальным оператором, если в любой расслоенной карте $\phi: U \subset M \rightarrow I^p \times I^q$ и любой тривиализации расслоения E над ней оператор D имеет вид

$$D = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x, y) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_p^{\alpha_p}}, \quad (x, y) \in I^p \times I^q, \quad (8.1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$, a_α – гладкие матричнозначные функции на $I^p \times I^q$.

Для касательного дифференциального оператора D , задаваемого формулой (8.1) в некоторой расслоенной карте $\phi: U \subset M \rightarrow I^p \times I^q$ и тривиализации расслоения E над ней, определим его касательный (полный) символ

$$\sigma(x, y, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x, y) (i\xi)^\alpha, \quad (x, y) \in I^p \times I^q, \quad \xi \in \mathbb{R}^p,$$

и его касательный главный символ

$$\sigma_\mu(x, y, \xi) = \sum_{|\alpha| = \mu} a_\alpha(x, y) (i\xi)^\alpha, \quad (x, y) \in I^p \times I^q, \quad \xi \in \mathbb{R}^p.$$

Касательный главный символ инвариантно определен как сечение расслоения $\text{Hom}(\pi_F^* E)$ на $T^* \mathcal{F}$ (где $\pi_F: T^* \mathcal{F} \rightarrow M$ – естественная проекция).

Касательный дифференциальный оператор D называется касательно эллиптическим, если его касательный главный символ σ_μ обратим при $\xi \neq 0$.

Пусть $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ – касательный дифференциальный оператор на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$. Ограничения оператора D на слои слоения $\mathcal{F}$ определяют семейство $(D_L)_{L \in M/\mathcal{F}}$, где для любого слоя L слоения $\mathcal{F}$ оператор $D_L: C^\infty(L, E|_L) \rightarrow C^\infty(L, E|_L)$ является дифференциальным оператором на L . Для любого $x \in M$ поднятие оператора D_{L_x} при голономном накрытии $s: G^x \rightarrow L_x$ определяет дифференциальный оператор $D_x: C^\infty(G^x, s^*E) \rightarrow C^\infty(G^x, s^*E)$. Семейство операторов $\{D_x, x \in M\}$ является G -оператором (см. (5.6)). Будем называть семейства такого вида дифференциальными G -операторами. Если D – касательно эллиптический оператор, то будем называть соответствующий G -оператор эллиптическим. В работе [15] построена соответствующая алгебра псевдодифференциальных G -операторов на многообразии со слоением.

8.1. Теория индекса для измеримых слоений. Пусть D – касательно эллиптический оператор на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ и $\{D_x: x \in M\}$ – соответствующий эллиптический G -оператор. Предположим, что слоение $\mathcal{F}$ имеет голономно инвариантную трансверсальную меру Λ . Семейства $(P_{\text{Ker } D_x})_{x \in M}$ и $(P_{\text{Ker } D_x^*})_{x \in M}$, состоящие соответственно из ортогональных проекторов на $\text{Ker } D_x$ и $\text{Ker } D_x^*$ в пространстве $L^2(G^x)$, определяют элементы $P_{\text{Ker } D}$ и $P_{\text{Ker } D^*}$ алгебры фон Неймана слоения $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$. Голономно инвариантная мера Λ определяет точный нормальный полуконечный след tr_Λ на $W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$. В [15] доказано, что размерности

$$\dim_\Lambda \text{Ker } D = \text{tr}_\Lambda P_{\text{Ker } D}, \quad \dim_\Lambda \text{Ker } D^* = \text{tr}_\Lambda P_{\text{Ker } D^*}$$

конечны и, тем самым, определен индекс касательно эллиптического оператора D по формуле

$$\text{Ind}_\Lambda(D) = \dim_\Lambda \text{Ker } D - \dim_\Lambda \text{Ker } D^*.$$

Предположим, что расслоение $T\mathcal{F}$ ориентируемо. Как в теории индекса для семейств эллиптических операторов, касательный главный символ σ_D оператора D определяет элемент группы $K(T^*\mathcal{F})$. Обозначим через $\pi_{F!}: H^*(T\mathcal{F}) \rightarrow H^*(M)$ отображение, задаваемое интегрированием вдоль слоев расслоения $\pi_F: T\mathcal{F} \rightarrow M$.

ТЕОРЕМА 8.1 [15]. *Имеет место формула*

$$\text{Ind}_\Lambda(D) = (-1)^{p(p+1)/2} \langle C, \pi_{F!} \text{ch}(\sigma_D) \text{Td}(T^*\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \rangle,$$

где C – поток Рюэлля–Сулливана, соответствующий трансверсальной мере Λ .

Теорема 8.1 полностью аналогична теореме Атьи–Зингера об индексе в когомологической форме – теореме 1.5, с той лишь разницей, что вместо интегрирования по компактному многообразию в правой части формулы Атьи–Зингера здесь используется спаривание с потоком Рюэлля–Сулливана C .

Нечетная версия теоремы 8.1 доказана в работе [152] (см. также [153]). Пусть $D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E)$ – касательно эллиптический оператор первого порядка на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ и $D_x: C^\infty(G^x, s^*E) \rightarrow C^\infty(G^x, s^*E)$, $x \in M$, – соответствующий дифференциальный G -оператор. Предположим, что слоение $\mathcal{F}$ имеет голономно инвариантную трансверсальную меру Λ . Предположим также, что оператор D_x самосопряжен в пространстве $L^2(G^x, s^*E)$. Обозначим через P_x его спектральный проектор, соответствующий положительной полуоси. Для любого $\phi \in C(M, U(N))$ обозначим через M_ϕ соответствующий G -оператор умножения на ϕ . Послойный оператор Тёплица, ассоциированный с ϕ , есть ограниченный G -оператор

$$T_\phi = \{T_{\phi,x}: L^2(G^x, s^*E \otimes \mathbb{C}^N) \rightarrow L^2(G^x, s^*E \otimes \mathbb{C}^N), x \in M\},$$

задаваемый формулой

$$T_{\phi,x} = P_x M_\phi P_x.$$

В [152] доказано, что если $\phi \in C(M, U(N))$ обратим, то оператор T_ϕ является оператором Брейера–Фредгольма и определен индекс Брейера–Фредгольма оператора T_ϕ по формуле

$$\text{Ind}_\Lambda(T_\phi) = \dim_\Lambda(\text{Ker } T_\phi) - \dim_\Lambda(\text{Ker } T_\phi^*).$$

Обозначим через E_+ подрасслоение расслоения π_F^*E на $ST^*\mathcal{F}$, порожденное собственными векторами главного символа $\sigma_1(D)$ оператора D , соответствующими положительным собственным значениям. Как и выше, обозначим через $\pi_{F!}: H^*(ST^*\mathcal{F}) \rightarrow H^*(M)$ отображение, задаваемое интегрированием вдоль слоев расслоения $\pi_F: ST^*\mathcal{F} \rightarrow M$.

ТЕОРЕМА 8.2 [153], [152]. *Имеет место формула*

$$\text{Ind}_\Lambda(T_\phi) = (-1)^p \langle C, \text{ch}([\phi])\pi_{F!} \text{ch}(E_+) \text{Td}(T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \rangle,$$

где C – поток Рюэлля–Сулливана, соответствующий трансверсальной мере Λ .

Следует также отметить работы [154]–[160], [92], [57], в которых аналогичные задачи теории индекса (как в четной, так и в нечетной постановке) изучались в близких ситуациях – для почти периодических и случайных операторов в $\mathbb{R}^n$.

В работе [161] доказан аналог теоремы Атьи–Патоди–Зингера для измеримых слоений. В частности, в этой работе введен эта-инвариант касательно эллиптических операторов (см. также [162]). В [163] (см. также [164]) доказан аналог формулы Атьи–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке [37] для отображений компактного многообразия с измеримым слоением, которые переводят каждый слой слоения в себя.

8.2. K -теоретическая теория об индексе. В работе [88] (см. также работу [13]) доказана K -теоретическая версия теоремы об индексе для касательно эллиптических операторов на произвольном компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$. Пусть D – касательно эллиптический оператор на компактном многообразии M , действующий в сечениях векторного расслоения E

на M . При помощи операторных конструкций строится аналитический индекс $\text{Ind}_a(D) \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ соответствующего правоинвариантного эллиптического G -оператора $\{D_x: C_c^\infty(G_x, r^*E) \rightarrow C_c^\infty(G_x, r^*E), x \in M\}$ [15], [13] и по классу $[\sigma_D] \in K(T^*\mathcal{F})$, определяемому касательным главным символом σ_D оператора D , строится его топологический индекс $\text{Ind}_t(D) \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$.

Аналитический индекс строится следующим образом. Напомним, что по расслоению E строится $C(M)$ - $C_r^*(M, \mathcal{F})$ -бимодуль $\mathcal{E}_{M,E}$, определяемый как пополнение предгильбертова $C_c^\infty(G)$ -модуля $\mathcal{E}_\infty = C_c^\infty(G, r^*E)$ (см. п. 5.3). Любой правоинвариантный псевдодифференциальный G -оператор естественно определяет эндоморфизм гильбертова $C_r^*(M, \mathcal{F})$ -модуля $\mathcal{E}_{M,E}$. Поэтому оператор D определяет элемент $[D] \in KK(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F}))$, задаваемый парой $(\mathcal{E}_{M,E}, F)$, где $F = D(I + D^2)^{1/2}$. Образ этого элемента при отображении

$$KK(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow KK(\mathbb{C}, C_r^*(M, \mathcal{F})) = K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$$

и есть аналитический индекс оператора D , $\text{Ind}_a(D) \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$. В работе [152] дана другая конструкция элемента $[D] \in KK^1(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F}))$, соответствующего самосопряженному касательно эллиптическому оператору D . Эта конструкция использует расширение C^* -алгебры $C_r^*(M, \mathcal{F})$, порожденное сглаженными послойными операторами Тёплица.

Теперь опишем конструкцию топологического индекса касательно эллиптического оператора D . Пусть i – вложение многообразия M в $\mathbb{R}^{2n}$. Обозначим через N тотальное пространство нормального расслоения к слоям: $N_x = (i_*(F_x))^\perp \subset \mathbb{R}^{2n}$. Рассмотрим слоение $\tilde{F}$ на многообразии $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}^{2n}$, слои которого суть $\tilde{L} = L \times \{t\}$, где L – слой слоения $\mathcal{F}$ и $t \in \mathbb{R}^{2n}$. Отображение $N \ni (x, \xi) \mapsto (x, i(x) + \xi)$ отображает некоторую открытую окрестность нулевого сечения в N на открытую трансверсаль T слоения $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$. Для подходящей открытой окрестности Ω трансверсали T в $\tilde{M}$ C^* -алгебра $C_r^*(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}|_\Omega)$ ограничения слоения $\tilde{\mathcal{F}}$ на Ω эквивалентна по Морите алгебре $C_0(T)$. Следовательно, вложение $C_r^*(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}|_\Omega) \subset C_r^*(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$ определяет отображение $K^0(N) \rightarrow K^0(C_r^*(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}))$. Поскольку $C_r^*(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}) = C_r^*(M, \mathcal{F}) \otimes C_0(\mathbb{R}^{2n})$, из периодичности Ботта следует, что $K^0(C_r^*(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})) = K^0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$. При помощи изоморфизма Тома группа $K^0(T^*\mathcal{F})$ отождествляется с $K^0(N)$. Тем самым, получаем отображение топологического индекса

$$\text{Ind}_t: K^0(T^*\mathcal{F}) \rightarrow K_0(C_r^*(M, \mathcal{F})).$$

ТЕОРЕМА 8.3 [88], [13]. Для любого касательно эллиптического оператора D на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ справедлива формула

$$\text{Ind}_a(D) = \text{Ind}_t(D).$$

Если слоение $\mathcal{F}$ задается слоями расслоения $M \rightarrow B$, то $K_0(C_r^*(M, \mathcal{F})) \cong K^0(B)$ и теорема 8.3 сводится к теореме Атьи–Зингера для семейств эллиптических операторов – теореме 1.7. Если слоение имеет голономно инвариантную меру Λ , то определен след tr_Λ на C^* -алгебре $C_r^*(M, \mathcal{F})$, который, в свою очередь, определяет отображение Tr_Λ из $K^0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ в $\mathbb{R}$. Нетрудно показать, что $\text{Tr}_\Lambda(\text{Ind}_a(D)) = \text{Ind}_\Lambda(D)$. Композиция $\text{Tr}_\Lambda \circ \text{Ind}_t$ может быть вычислена

при помощи топологических методов, и в качестве следствия теоремы 8.3 получается теорема об индексе для измеримых слоений (см. п. 8.1). Отметим также работу [165], в которой дано обобщение теоремы 8.3 в скрученной K -теории.

Следуя идеям работы [28], можно дать эквивалентную формулировку теоремы 8.3 в терминах отображения μ [19]. Прежде всего отметим, что главный символ σ_D касательно эллиптического оператора D определяет класс $[\sigma_D]$ в геометрической группе K -гомологий $K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F})$, задаваемый K -циклом $(T\mathcal{F}, [\sigma_D], p \circ \pi)$, где $[\sigma_D] \in K^0(T^*\mathcal{F})$ – класс, определяемый σ_D , отображение $p \circ \pi: T^*\mathcal{F} \rightarrow M/\mathcal{F}$ получается как композиция естественных проекций $\pi: T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ и $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$. Тогда

$$\mu_r([\sigma_D]) = \text{Ind}_a(D) \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F})). \quad (8.2)$$

В работе [166] получено эквивариантное обобщение теоремы 8.3 на случай, когда имеется действие компактной группы Ли H , отображающее каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в себя. В качестве следствия автор распространил теорему Лефшеца, доказанную в работе [163], на случай произвольных касательно эллиптических комплексов при условии, что диффеоморфизм $f: M \rightarrow M$ включается в действие компактной группы Ли H , переводящее каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в себя.

Наконец, отметим, что в работе [167] (см. также [168], [169]) построены полуконечные спектральные тройки, ассоциированные с касательно эллиптическими операторами. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – гладкое компактное многообразие со слоением, слои которого являются четномерными спинорными многообразиями. Обозначим через S ассоциированное расслоение спиноров. Предположим, что существует голономно инвариантная мера Λ . Рассмотрим инволютивную алгебру $\mathcal{A} = C(M)$ как подалгебру полуконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{N} = W_\Lambda^*(M, \mathcal{F})$, действующей в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = L^2(G, s^*S, m) = \int_M^\oplus L^2(G^x, s^*S, \nu^x) d\mu(x).$$

Для любой функции $a \in C(M)$ ее действие в $\mathcal{H}$ задается оператором умножения на функцию $a \circ s$ в каждом из пространств $L^2(G^x, s^*S, \nu^x)$. Тогда набор $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, где D – послойный спинорный оператор Дирака, является полуконечной спектральной тройкой, размерность которой конечна и равна размерности слоения.

В работе [170] (см. также [72]) построена полуконечная спектральная тройка, ассоциированная с дифференциальными операторами с почти периодическими коэффициентами. Используя полуконечную некоммутативную локальную теорему об индексе [73], [74] (см. п. 3.7), авторы вычислили спектральный поток вдоль семейства почти периодических операторов Дирака.

8.3. Высшая теория индекса. Подход к высшей теории индекса для касательно эллиптических операторов, предложенный Конном и Москвичи в работе [46], основан на идее, состоящей в том, чтобы представить высшие индексы как спаривание K -теоретического индекса касательно эллиптического оператора с некоторым циклическим коциклом на алгебре $C_c^\infty(G)$. Для этого сначала

надо модифицировать определение индекса, определив его как элемент группы $K_0(C_c^\infty(G))$.

Конструкция псевдодифференциального исчисления на группоиде голономии G [15] позволяет построить короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow C_r^*(M, \mathcal{F}) \longrightarrow \bar{\Psi}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sigma_0} C(S^*\mathcal{F}) \longrightarrow 0,$$

где $\Psi^0(\mathcal{F})$ обозначает алгебру псевдодифференциальных G -операторов нулевого порядка, $\bar{\Psi}^0(\mathcal{F})$ обозначает равномерное замыкание алгебры $\Psi^0(\mathcal{F})$ в пространстве $L^2(G, m) = \int_M^\oplus L^2(G^x, \nu^x) d\mu(x)$, отображение σ_0 задается отображением главного символа. Соответствующая точная последовательность в K -теории состоит из шести членов:

$$\begin{array}{ccccc} K_1(C_r^*(M, \mathcal{F})) & \longrightarrow & K_1(\bar{\Psi}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & K_1(C(S^*\mathcal{F})) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_0(C(S^*\mathcal{F})) & \longleftarrow & K_0(\bar{\Psi}^0(\mathcal{F})) & \longleftarrow & K_0(C_r^*(M, \mathcal{F})) \end{array}$$

Можно показать (см. [88]), что связывающий гомоморфизм $\partial: K_1(C(S^*\mathcal{F})) \rightarrow K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ совпадает с гомоморфизмом аналитического индекса. Точнее, если A – эллиптический G -псевдодифференциальный оператор порядка нуль, то его главный символ задает элемент $[\sigma_A] \in K_1(C^\infty(S^*\mathcal{F}))$ и элемент $\partial[\sigma_A] \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ совпадает с аналитическим индексом оператора A , определенным в п. 8.2. Явная алгебраическая конструкция связывающего гомоморфизма в K -теории приводит к следующему правилу построения аналитического индекса эллиптического символа $a \in C^\infty(S^*\mathcal{F}, \text{End}(\pi^*E, \pi^*F))$. Функция $\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & 0 \end{pmatrix} \in C^\infty(S^*\mathcal{F}, \text{Hom}(\pi^*(E \oplus F)))$ определяет, после вложения расслоения $E \oplus F$ в тривиальное расслоение, элемент $GL_N(C^\infty(S^*\mathcal{F}))$ при достаточно большом N . Этот элемент можно поднять в $GL_N(\Psi^0(\mathcal{F}))$. Например, выберем любой оператор $A \in \Psi^0(\mathcal{F}; E, F)$ такой, что $\sigma_0(A) = a$, и $B \in \Psi^0(\mathcal{F}; F, E)$ такой, что $\sigma_0(B) = a^{-1}$. Тогда $S_0 = I - BA \in \Psi^{-1}(\mathcal{F}; E)$ и $S_1 = I - AB \in \Psi^{-1}(\mathcal{F}; F)$. Оператор

$$L = \begin{pmatrix} S_0 & -B - S_0B \\ A & S_1 \end{pmatrix} \in \Psi^0(\mathcal{F}; E \oplus F)$$

определяет требуемый подъем. Таким образом, $\sigma_0(L) = \tilde{a}$ и

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} S_0 & B + BS_0 \\ -A & S_1 \end{pmatrix} \in \Psi^0(\mathcal{F}; E \oplus F).$$

По определению положим

$$\partial[a] = [P] - [e], \quad (8.3)$$

где P и e – идемпотенты, определяемые следующим образом:

$$P = L \begin{pmatrix} I_E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L^{-1} = \begin{pmatrix} S_0^2 & S_0(I + S_0)B \\ S_1A & I_F - S_1^2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_F \end{pmatrix}. \quad (8.4)$$

Конструкция G -псевдодифференциального исчисления и определение аналитического индекса были распространены на случай произвольного группоида Ли в работах [171], [172].

На самом деле, исчисление псевдодифференциальных операторов, ассоциированных с группоидом голономии, позволяет построить такой параметрикс $B \in \Psi^0(\mathcal{F}; F, E)$, что $S_0 = I - BA \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{F}; E)$ и $S_1 = I - AB \in \Psi^{-\infty}(\mathcal{F}; F)$. Тогда формулы (8.3) и (8.4) определяют аналитический индекс оператора A как элемент $\text{Ind } A \in K_0(C_c^\infty(G))$ (см. [46], [19]).

Естественное вложение $j: C_c^\infty(G) \rightarrow C_r^*(M, \mathcal{F})$ определяет индуцированное отображение $j_*: K_0(C_c^\infty(G)) \rightarrow K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$. Можно показать (см. [46]), что $j_*(\text{Ind } A) = \text{Ind}_a A$. Отображение j_* , вообще говоря, не является изоморфизмом, и потому мы теряем некоторую информацию при переходе от $\text{Ind } A \in K_0(C_c^\infty(G))$ к $\text{Ind}_a A \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$. Именно, для аналитического индекса со значениями в $K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ справедливы результаты типа обращения в нуль или гомотопической инвариантности. Например, как показано в [173] (см. также [174], [175]), аналитический индекс $\text{Ind}_a A \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ послойного оператора сигнатуры на компактном многообразии с четномерным ориентированным слоением инвариантен при послойных ориентированных гомотопических эквивалентностях. С другой стороны, аналитический индекс $\text{Ind } A \in K_0(C_c^\infty(G))$ эллиптического G -псевдодифференциального оператора A , вообще говоря, зависит не только от класса $[\sigma_A] \in K_0(C^\infty(T^*\mathcal{F}))$, определяемого его главным символом. В частности, аналитический индекс, вообще говоря, не определяет отображение $K_1(C(S^*\mathcal{F})) \rightarrow K_0(C_c^\infty(G))$. Соответствующий пример для некоторого группоида Ли приведен Конном в [19; гл. II, раздел 10.γ, предложение 10] (см. также [176]).

Важность аналитического индекса $\text{Ind } A$ эллиптического G -псевдодифференциального оператора A со значениями в $K_0(C_c^\infty(G))$ заключается в том, что именно из него мы можем получить числовые инварианты (высшие индексы), рассматривая спаривание $\langle \text{Ind } A, \tau \rangle \in \mathbb{C}$ с произвольным (периодическим) циклическим коциклом τ на $C_c^\infty(G)$.

В [19; гл. III, раздел 7.γ, следствие 13] сформулирована высшая теоремы об индексе для касательно эллиптических операторов. Эта теорема является аналогом высшей теоремы о Γ -индексе для Γ -инвариантных эллиптических операторов на Γ -накрытии компактного многообразия, доказанной в работе [46].

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть A – касательно эллиптический оператор на компактном многообразии с трансверсально ориентированным слоением $(M, \mathcal{F})$. Тогда для любого $\omega \in H^*(BG)$ имеем

$$\langle \text{Ind } A, \Phi_*(\omega) \rangle = (2\pi i)^{-q} \langle \omega, \text{ch}_\tau(\sigma_A) \rangle. \quad (8.5)$$

Здесь $\text{Ind } A \in K_0(C_c^\infty(G))$ – аналитический индекс оператора A , $[\sigma_A]$ – класс в геометрической группе K -гомологий $K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F})$, определяемый главным символом оператора A (см. п. 8.2), $\Phi_*: H^*(BG) \rightarrow HP^*(C_c^\infty(G))$ – отображение, введенное в п. 6.4, $\text{ch}_\tau(\sigma_A)$ обозначает скрученный характер Черна

$$\text{ch}_\tau(\sigma_A) = \text{Td}(\tau)^{-1} \Phi \text{ch}(\sigma_A).$$

Из (5.5) вытекает, что для любого $y = [X, E, f] \in K_{*,\tau}(BG)$ мы имеем

$$\mathrm{ch}_\tau(y) = \bar{f}_*(\mathrm{ch}(E) \cup \mathrm{Td}(X) \cap [X]).$$

Применяя эту формулу к классу $[\sigma_A] \in K_{\mathrm{top}}^*(M, \mathcal{F})$, формулу (8.5) можно переписать в виде

$$\langle \mathrm{Ind} A, \Phi_*(\omega) \rangle = \langle \pi_{F!} \mathrm{ch}(\sigma_A) \mathrm{Td}(T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \bar{p}^* \omega, [M] \rangle,$$

где $\bar{p}: M \rightarrow BG$ – отображение, соответствующее отображению $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$, и $\pi_F: T^*\mathcal{F} \rightarrow M$ – естественная проекция.

В работе [177] дано доказательство теоремы 8.4 методами алгебраической топологии в случае, когда слоение является горизонтальным слоением плоского слоеного расслоения (см. пример 4.6). Это доказательство основано на формализме когомологий циклического типа, развитом в работах Кунца и Квиллена, и результатах работ [111] и [178].

В ряде работ изучались различные частные случаи теоремы 8.4. В случае, когда слоение задается слоями расслоения $M \rightarrow B$, теорема 8.4 сводится к теореме об индексе для семейств эллиптических операторов – теореме 1.8. Если слоение $\mathcal{F}$ имеет голономно инвариантную меру Λ и $\omega \in H^*(BG)$ – соответствующий класс, то теорема 8.4 сводится к измеримой теореме об индексе, теореме 8.1 (см. также замечания после теоремы 8.3). В случае, когда ω соответствует инвариантной форме, данное утверждение было доказано в работе [179]. Для слоения, являющегося горизонтальным слоением плоского слоеного расслоения, частные случаи рассматривались в работах [153], [180], [110], [181]. Отметим работу [153], в которой установлена связь высшего индекса касательного оператора Дирака на горизонтальном слоении плоского слоеного расслоения $M \rightarrow B$, ассоциированного с некоторым трансверсальным коциклом, с относительным эта-инвариантом оператора Дирака на базе B .

Еще раз отметим, что из теоремы 8.4 не вытекает никаких топологических и геометрических следствий типа теоремы об обращении в нуль или гомотопической инвариантности. Для этого необходимо установить утверждение, аналогичное теореме 8.4, для аналитического индекса со значениями $K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$. Топологическая инвариантность коциклов, определяемых спариванием с элементами из образа отображения Φ_* , исследовалась в работе [99] (см. также п. 6.2).

Прежде чем сформулировать основной результат работы [99], напомним некоторые сведения о вторичных характеристических классах слоений. Эти классы определяются характеристическим гомоморфизмом (см., например, [182])

$$\chi_{\mathcal{F}}: H^*(W_q; O(q)) \rightarrow H^*(M, \mathbb{R}),$$

определенным для любого слоения $\mathcal{F}$ коразмерности q на гладком многообразии M , где $H^*(W_q; O(q))$ обозначает относительные когомологии алгебры Ли W_q формальных векторных полей в $\mathbb{R}^q$. Основное свойство вторичных характеристических классов состоит в их функториальности: если гладкое отображение $f: N \rightarrow M$ трансверсально к трансверсально ориентированному слоению $\mathcal{F}$ и $f^*\mathcal{F}$ – слоение на N , индуцированное посредством отображения f

(по определению слоями слоения $f^*\mathcal{F}$ являются связные компоненты прообразов слоев слоения $\mathcal{F}$ при отображении f), то

$$f^*(\chi_{\mathcal{F}}(\alpha)) = \chi_{f^*\mathcal{F}}(\alpha), \quad \alpha \in H^*(W_q; O(q)).$$

Классифицирующее пространство $B\Gamma_q$ группоида Γ_q классифицирует слоения коразмерности q на данном многообразии M в том смысле, что любое слоение $\mathcal{F}$ на многообразии M определяет отображение $M \rightarrow B\Gamma_q$, причем в случае, когда многообразие M компактно, гомотопический класс отображений $M \rightarrow B\Gamma_q$ соответствует классу конкордантности слоений на M [82]. Для любого слоения $\mathcal{F}$ коразмерности q на многообразии M классифицирующее отображение $M \rightarrow B\Gamma_q$ получается как композиция отображения $\bar{p}: M \rightarrow BG$, ассоциированного с проекцией $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$, и универсального отображения $BG \rightarrow B\Gamma_q$ (см. п. 5.5).

Ввиду функториальности характеристического гомоморфизма достаточно знать его для универсального слоения на $B\Gamma_q$, что дает универсальный характеристический гомоморфизм

$$\chi: H^*(W_q; O(q)) \rightarrow H^*(B\Gamma_q, \mathbb{R}).$$

Для любой полной трансверсали T универсальный характеристический гомоморфизм χ представляется в виде композиции

$$\chi: H^*(W_q; O(q)) \rightarrow H^*(BG_T^T, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(B\Gamma_q, \mathbb{R}).$$

Поскольку группоиды G_T^T и G эквивалентны, $H^*(BG_T^T, \mathbb{R}) \cong H^*(BG, \mathbb{R})$, что дает отображение

$$H^*(W_q; O(q)) \rightarrow H^*(BG, \mathbb{R}). \quad (8.6)$$

Мы будем также называть элементы образа $H^*(W_q; O(q))$ при отображении (8.6) вторичными характеристическими классами. По поводу вычисления когомологий $H^*(W_q; O(q))$, см., например, [106].

В работе [183] Гороховский обобщил приведенную в п. 6.3 конструкцию циклического коцикла, ассоциированного с классом Годбийона–Вея, использующую группу модулярных автоморфизмов, на случай произвольных вторичных характеристических классов. Данная конструкция существенно использует теорию циклических когомологий алгебр Хопфа, развитую в работе [142] (см. п. 7.4).

Основной результат работы [99] формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – (необязательно компактное) многообразие со слоением, которое трансверсально ориентировано. Пусть G – его группоид голономии и $\pi: BG \rightarrow B\Gamma_q$ – классифицирующее отображение для Γ_q -структуры, определяемой слоением. Пусть τ – расслоение на BG , определяемое нормальным расслоением τ слоения $\mathcal{F}$. Обозначим через $\mathcal{R}$ подкольцо $H^*(BG, \mathbb{C})$, порожденное классами Понтрягина расслоения τ , классами Черна голономно эквивариантных расслоений на M и вторичными характеристическими классами.

Для любого $P \in \mathcal{R}$ существует такое аддитивное отображение φ_P из $K_*(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ в $\mathbb{C}$, что

$$\varphi_P(\mu_r(x)) = \langle \Phi \operatorname{ch}(x), P \rangle, \quad x \in K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F}). \quad (8.7)$$

Напомним, что ch обозначает характер Черна $K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F}) \rightarrow H_{*,\tau}(BG) = H_*(B\tau, S\tau)$ и $\Phi: H_{*,\tau}(BG) \rightarrow H_*(BG)$ – изоморфизм Тома. Используя (5.5), формулу (8.7) для любого $x = [X, E, f] \in K_{*,\tau}(BG)$ можно переписать следующим образом:

$$\varphi_P(\mu_r(x)) = \langle \operatorname{ch}(E) \operatorname{Td}(TX \oplus \bar{f}^* \tau) \bar{f}^* P, [X] \rangle. \quad (8.8)$$

В частности, заметим, что формулы (6.2) и (6.6) являются частными случаями формул (8.7).

Как следствие, теорема 8.5 позволяет получить информацию об инъективности отображении μ_r . Из нее также следует целочисленность отображения φ_P на образе отображения μ . (Следует отметить, что $\varphi_P(K_*(C_r^*(M, \mathcal{F})))$, вообще говоря, не содержится в $\mathbb{Z}$.)

Пусть A – касательно эллиптический оператор на компактном многообразии с трансверсально ориентированным слоением $(M, \mathcal{F})$, $\operatorname{Ind}_a(A) \in K_0(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ обозначает его аналитический индекс. Применяя формулу (8.8) к классу $[\sigma_A]$ в геометрической группе K -гомологий $K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F})$, определяемому главным символом оператора A (см. п. 8.2), и принимая во внимание формулу (8.2), получаем высшую теорему об индексе для оператора A :

$$\varphi_P(\operatorname{Ind}_a(A)) = \langle \pi_{F!} \operatorname{ch}(\sigma_A) \operatorname{Td}(T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \operatorname{Td}(\bar{\tau} \otimes \mathbb{C}) \bar{p}^* P, [M] \rangle,$$

где $P \in \mathcal{R}$, $\bar{p}: M \rightarrow BG$ – отображение, соответствующее отображению $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$, и $\pi_F: T^* \mathcal{F} \rightarrow M$ – естественная проекция.

В работе [95] получен K -теоретический аналог теоремы 8.5 в частном случае. Обозначим через p естественную проекцию $M/\mathcal{F} \rightarrow \operatorname{pt}$. Предположим, что она является K -ориентированным отображением (что эквивалентно тому, что нормальное расслоение τ является K -ориентированным отображением). Пусть $p! \in KK^*(C^*(M, \mathcal{F}), \mathbb{C})$ – соответствующий класс, определяющий гомоморфизм Гизина (см. п. 5.5). Голономно эквивариантное комплексное векторное расслоение L на $(M, \mathcal{F})$ определяет элемент $[L] \in KK^*(C^*(M, \mathcal{F}), C^*(M, \mathcal{F}))$ (см. п. 5.3). Определим элемент $p_L \in KK^*(C^*(M, \mathcal{F}), \mathbb{C})$ следующей формулой: $p_L = [L] \otimes p!$.

ТЕОРЕМА 8.6 [95]. Пусть L – голономно эквивариантное комплексное векторное расслоение на $(M, \mathcal{F})$. Для любого $y = [X, \mathcal{F}_X, x, f] \in K_{\text{top}}^*(M, \mathcal{F})$ имеет место формула

$$\mu(y) \otimes p_L = x \otimes [f^* L] \otimes (p \circ f)! \in \mathbb{Z}.$$

В частности, для любого $y = [X, E, f] \in K_{*,\tau}(BG)$ получаем

$$\mu(y) \otimes p_L = \langle \operatorname{ch}(E) \operatorname{ch}(\bar{f}^* L) \operatorname{Td}(TX), [X] \rangle. \quad (8.9)$$

Из теоремы 8.6 вытекает теорема 8.5 в случае, когда $p! \in KK^*(C_r^*(M, \mathcal{F}), \mathbb{C})$, например когда слоение аменабельно (и потому $C_r^*(M, \mathcal{F}) = C^*(M, \mathcal{F})$). Отметим, что гомоморфизмы $\varphi \circ \lambda_*$ (где $\lambda: K_*(C^*(M, \mathcal{F})) \rightarrow K_*(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ – естественная проекция) и $\otimes p_L$, вообще говоря, не совпадают как гомоморфизмы из $K_*(C_r^*(M, \mathcal{F}))$ в $\mathbb{C}$, а совпадают только на образе отображения μ .

Как показано в работе [100], если слоение $\mathcal{F}$ риманово и нормальное расслоение τ имеет голономно инвариантную комплексную спинорную структуру, элемент p_L совпадает с классом K -гомологий $[D_L] \in K_*(C^*(M, \mathcal{F}))$, определяемым трансверсальным Spin^c -оператором Дирака D_L с коэффициентами в расслоении L . Поэтому равенство (8.9) можно переписать в следующем виде. Обозначим через $\bar{L}$ расслоение на BG , соответствующее расслоению L . Для любого $y = [X, E, f] \in K_{*,\tau}(BG)$ имеет место соотношение

$$\mu(y) \otimes [D_L] = \langle \text{ch}(E) \text{ch}(\bar{f}^* L) \text{Td}(TX), [X] \rangle.$$

Авторы предлагают рассматривать эту формулу как формулу индекса для трансверсального оператора Дирака D_L и приводят примеры, когда эта формула может быть полезна для вычисления индекса трансверсально эллиптических операторов как обобщенной функции.

В работах [184], [185] дано доказательство теоремы 8.4 для касательного оператора Дирака, обобщающее доказательство локальной теоремы об индексе для семейств операторов Дирака, данное Бисмутом в работе [26] (см. п. 1.5).

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением. Предположим, что слои слоения $\mathcal{F}$ являются четномерными спинорными многообразиями. Выберем риманову метрику в слоях расслоения $T\mathcal{F}$. Обозначим через $F(T\mathcal{F})$ ассоциированное расслоение спиноров. Пусть V – эрмитово векторное расслоение на M , снабженное эрмитовой связностью ∇^V . Рассмотрим клиффордово расслоение $\mathcal{E} = F(T\mathcal{F}) \otimes V$ над алгеброй Клиффорда расслоения $T\mathcal{F}$ и ассоциированный касательный оператор Дирака $D_{\mathcal{E}}$.

В работе [184] (см. также уточнение в [185]) авторы доказали локальную теорему об индексе для семейства операторов Дирака, инвариантного относительно свободного, собственного и кокомпактного действия этального группоида. Случай касательного оператора Дирака сводится к данному случаю при помощи следующей конструкции. Пусть T – полная трансверсаль и G_T^T – ассоциированный с ней приведенный группоид голономии. Множество $P = G_T$ является гладким многообразием, на котором имеется естественное свободное собственное действие группоида G_T^T , задаваемое правым умножением (см. п. 5.4). Заметим, что пространство орбит P/G_T^T этого действия совпадает с M . Отображение s определяет субмерсию $\pi: G_T \rightarrow (G_T^T)^{(0)} = T$. Субмерсия $\pi: G_T \rightarrow T$ является G_T^T -эквивариантным отображением, если мы рассматриваем действие G_T^T на T , задаваемое правым умножением. Обозначим через $Z_x = \pi^{-1}(x) = G_x$ слой расслоения $\pi: G_T \rightarrow T$ в точке $x \in T$ и через TZ вертикальное касательное пространство. При проекции $P = G_T \rightarrow M = P/G_T^T$ слои расслоения π переходят в слои слоения $\mathcal{F}$ на M и TZ – в касательное расслоение F к $\mathcal{F}$.

Послойная спинорная структура в $T\mathcal{F}$ поднимается до G_T^T -инвариантной спинорной структуры в расслоении TZ . Обозначим через $F(TZ)$ ассоциированное расслоение спиноров и через $\hat{V}$ подъем расслоения V в P . Рассмотрим

послойное клиффордово расслоение $\widehat{\mathcal{E}} = F(TZ) \otimes \widehat{V}$ и ассоциированный касательный оператор Дирака $D_{\widehat{\mathcal{E}}}$ на P . Оператор $D_{\widehat{\mathcal{E}}}$ определяет семейство операторов Дирака, действующих вдоль слоев расслоения $\pi: P \rightarrow T$ и инвариантное относительно действия G_T^T .

Индекс $\text{Ind } D_{\widehat{\mathcal{E}}}$ оператора $D_{\widehat{\mathcal{E}}}$ корректно определен как элемент группы $K_0(C_c^\infty(G_T^T) \otimes \mathcal{R})$, где $\mathcal{R}$ – алгебра быстро убывающих бесконечных вещественных матриц. Рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру $\Omega_c^*(G_T^T)$, введенную в п. 6.4. Для произвольного замкнутого градуированного следа η на $\Omega_c^*(G_T^T)$ авторы определяют спаривание характера Черна $\text{ch}(\text{Ind } D_{\widehat{\mathcal{E}}}) \in HP(C_c^\infty(G_T^T))$ с η и элемент $\Phi_\eta \in H_r^*(BG)$, ассоциированный с η . Обозначим, как выше, через $\bar{p}: M \rightarrow BG$ – отображение, соответствующее естественной проекции $p: M \rightarrow M/\mathcal{F}$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 8.7 [184]. *Имеет место равенство*

$$\langle \text{ch}(\text{Ind } D_{\widehat{\mathcal{E}}}), \eta \rangle = \int_M \widehat{A}(T\mathcal{F}) \text{ch}(V) \bar{p}^* \Phi_\eta.$$

Доказательство этой теоремы основывается на некоммутативной эквивариантной версии конструкций Бисмута (см. п. 1.5), примененной к G_T^T -эквивариантной субмерсии $\pi: P \rightarrow T$. Важную роль здесь играет конструкция некоторого дифференцирования

$$\nabla^{0,1}: C_c^\infty(P, \widehat{\mathcal{E}}) \rightarrow \Omega_c^{0,1}(G_T^T) \otimes_{C_c^\infty(G_T^T)} C_c^\infty(P, \widehat{\mathcal{E}})$$

в “некоммутативных” направлениях. Именно использование этой некоммутативной связности позволяет включить в рассмотрение классы когомологий в размерности, большей, чем коразмерность слоения (таких, как класс Годбийона–Вея, являющийся трехмерным классом когомологий для слоения коразмерности один).

В работе [185] дано прямое доказательство теоремы 8.5 для касательного оператора Дирака, не использующее вспомогательного выбора полной трансверсали, в частном случае, когда класс ω определяется голономно инвариантным трансверсальным потоком. Авторы используют дифференциальную градуированную алгебру типа той, которая была построена в п. 6.2. В работах [186], [187] теорема 8.7 распространена на случай, когда M – многообразие с краем и слоение трансверсально краю.

Как уже было сказано ранее, касательно эллиптический оператор D на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ определяет класс $[D] \in KK(C(M), C_r^*(M, \mathcal{F}))$. Этот класс можно представить при помощи явного p -суммируемого квазиизоморфизма ψ_D из $C^\infty(M)$ в $C_c^\infty(G)$ в смысле работ [188], [189]. В работе [190] вычислен бивариантный характер Черна этого квазиизоморфизма, введенный в работах [188], [189].

Имеется другой подход к высшим теоремам об индексе для касательно эллиптических операторов, основанный на использовании когомологий Хефлигера (см. п. 4.2).

Пусть $(M, \mathcal{F})$ – компактное многообразие со слоением. Предположим, что размерность слоения $\mathcal{F}$ четна, оно ориентировано и имеет спинорную структуру. Пусть $\mathcal{E}$ – эрмитово векторное расслоение на M , $D_{\mathcal{E}}$ – соответствующий послойный оператор Дирака на M с коэффициентами в расслоении $\mathcal{E}$ и $\text{Ind}(D_{\mathcal{E}}) \in K_0(C_c^\infty(G))$ – его аналитический индекс. В работе [179] определен характер Черна $\overline{\text{ch}}(\text{Ind}(D_{\mathcal{E}}))$ как элемент когомологий Хефлигера $H_c^*(M/\mathcal{F})$ слоения $\mathcal{F}$. Конструкция характера Черна является прямой модификацией конструкции Бисмута (см. п. 1.5). Она использует аналог суперсвязности Бисмута, ассоциированной с оператором $D_{\mathcal{E}}$, и оператор теплопроводности, определяемый кривизной этой суперсвязности.

В [191] при некоторых дополнительных ограничениях на слоение доказано, что справедливо следующее равенство в когомологиях Хефлигера $H_c^*(M/\mathcal{F})$:

$$\overline{\text{ch}}(\text{Ind}(D_{\mathcal{E}})) = \frac{1}{(2\pi i)^{p/2}} \int_{\mathcal{F}} \hat{A}(T\mathcal{F}, \nabla^{T\mathcal{F}}) \text{ch}(\mathcal{E}, \nabla^{\mathcal{E}}).$$

В работе [105] построен характер Черна $\text{ch}_a: K_0(C_c^\infty(G)) \rightarrow H_c^*(M/\mathcal{F})$ со значениями в когомологиях Хефлигера. Это позволяет, используя результаты работы [99], перевести теорему Конна–Скандалиса об индексе для касательно эллиптических операторов на язык когомологий Хефлигера.

Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}$ слоение размерности p на многообразии $M \times \mathbb{R}^{2k}$, индуцированное слоением $\mathcal{F}$. Группоид голономии $G^{\mathbb{R}^{2k}}$ этого слоения совпадает с $G \times \mathbb{R}^{2k}$. Беря композицию $\text{ch}_a: K_0(C_c^\infty(G^{\mathbb{R}^{2k}})) \rightarrow H_c^*(M \times \mathbb{R}^{2k}/\hat{\mathcal{F}})$ с интегрированием вдоль $\mathbb{R}^{2k}$ получаем отображение

$$\text{ch}_a^{\mathbb{R}^{2k}}: K_0(C_c^\infty(G^{\mathbb{R}^{2k}})) \rightarrow H_c^*(M/\mathcal{F}).$$

Отметим, что, вообще говоря, в данном случае мы не имеем изоморфизма Ботта между $K_0(C_c^\infty(G^{\mathbb{R}^{2k}}))$ и $K_0(C_c^\infty(G))$. При достаточно большом k определено отображение $\pi_1: K_c^0(T\mathcal{F}) \rightarrow K_0(C_c^\infty(G^{\mathbb{R}^{2k}}))$.

ТЕОРЕМА 8.8. *Для любого $u \in K_c^0(T\mathcal{F})$ справедливо равенство*

$$\text{ch}_a^{\mathbb{R}^{2k}} \circ \pi_1(u) = (-1)^p \int_{\mathcal{F}} \pi_{\mathcal{F}!}(\text{ch}(u)) \text{Td}(T\mathcal{F} \otimes \mathbb{C}) \in H_c^*(M/\mathcal{F}),$$

где $\pi_{\mathcal{F}!}: H_c^*(T\mathcal{F}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M, \mathbb{R})$ – интегрирование вдоль слоев расслоения $\pi_{\mathcal{F}}: T\mathcal{F} \rightarrow M$.

Предположим, что размерность слоения $\mathcal{F}$ четна, оно ориентировано и имеет спинорную структуру. Пусть $\mathcal{E}$ – эрмитово векторное расслоение на M , $D_{\mathcal{E}}$ – соответствующий послойный оператор Дирака на M с коэффициентами в расслоении $\mathcal{E}$. В работе [192], предполагая, что слоение $\mathcal{F}$ риманово и расслоение $\text{Ind}(D_{\mathcal{E}})$ трансверсально гладко, авторы доказали совпадение двух характеров Черна, определенных в предыдущих работах:

$$\overline{\text{ch}}(\text{Ind}(D_{\mathcal{E}})) = \text{ch}_a(\text{Ind}(D_{\mathcal{E}})) \in H_c^*(M/\mathcal{F}).$$

Наконец, в работе [193] при условии, что семейство проекторов на послойные гармонические формы в средней размерности является в определенном

смысле трансверсально гладким, авторы определили высшую гармоническую сигнатуру четномерного ориентированного риманова слоения на компактном римановом многообразии и доказали ее инвариантность при послойных гомотопиях.

Отметим также работы [194], [195], касающиеся циклических версий формулы Лефшеца для диффеоморфизмов, которые отображают каждый слой слоения в себя.

Во всех приведенных выше теоремах высшие индексы $\text{Ind}_\tau(A)$ эллиптического G -оператора A зависят только от класса $[\sigma_A] \in K_0(T^*\mathcal{F})$, определяемого его главным символом, что, как уже отмечалось выше, справедливо не для любого циклического коцикла τ . Следуя работе [176], скажем, что (периодический) циклический коцикл τ на алгебре $C_c^\infty(G)$ можно локализовать, если значение функционала $A \mapsto \langle \text{Ind } A, \tau \rangle \in \mathbb{C}$, определенного на множестве эллиптических G -операторов, зависит только от $[\sigma_A]$. В этом случае корректно определено отображение $\text{Ind}_\tau: K_0(T^*\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию

$$\langle \text{Ind } A, \tau \rangle = \text{Ind}_\tau([\sigma_A]).$$

Отображение Ind_τ называется высшим локализованным индексом, ассоциированным с τ .

Скажем, что $(k+1)$ -линейный функционал τ на пространстве $C_c^\infty(G)$ ограничен, если он продолжается до непрерывного $(k+1)$ -линейного функционала τ_m на пространстве $C_c^m(G)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Многие геометрические коциклы (такие, как групповые коциклы, трансверсальный фундаментальный класс, коциклы, задаваемые классом Годбийона–Вея и вторичными характеристическими классами слоения) являются ограниченными коциклами. В работе [196] доказано, что каждый ограниченный циклический коцикл на алгебре $C_c^\infty(G)$ можно локализовать. Доказательство этого факта основано на конструкциях касательного группоида G^T , ассоциированного с группоидом голономии G , и некоторой алгебры $\mathcal{S}_c(G^T)$ функций на G^T . Эта алгебра была построена в работе [197]. Она является строгим деформационным квантованием алгебры Шварца $\mathcal{S}(T^*\mathcal{F})$. Можно построить отображение аналитического индекса

$$\text{Ind}_a: K(T^*\mathcal{F}) \rightarrow K_0(C_r^*(M, \mathcal{F})),$$

используя касательный группоид G^T и его C^* -алгебру $C_r^*(G^T)$ (см. работы [95], [171], [172]). Используя эту конструкцию, в работе [176] автор вывел формулу для высшего локализованного индекса Ind_τ , ассоциированного с ограниченным коциклом τ , в терминах асимптотического предела коциклов на алгебре $\mathcal{S}_c(G^T)$.

Все приведенные выше факты о высших локализованных индексах справедливы для произвольного группоида Ли G . Роль кокасательного пространства $T^*\mathcal{F}$ в этом случае играет пространство A^*G , где AG – алгеброид Ли группоида G . В работе [196] доказано, что если группоид G является этальным, то любой циклический коцикл на алгебре $C_c^\infty(G)$ ограничен. Это утверждение применимо, например, к приведенному группоиду голономии слоения G_T^T , ассоциированному с некоторой полной трансверсалью T .

Список литературы

- [1] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. I”, *УМН*, **23**:5 (1968), 99–142; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. Singer, “The index of elliptic operators. I”, *Ann. of Math.* (2), **87**:3 (1968), 484–530.
- [2] М. Ф. Атья, Г. Б. Сегал, “Индекс эллиптических операторов. II”, *УМН*, **23**:6 (1968), 135–149; пер. с англ.: M. F. Atiyah, G. B. Segal, “The index of elliptic operators. II”, *Ann. of Math.* (2), **87**:3 (1968), 531–545.
- [3] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. III”, *УМН*, **24**:1 (1969), 127–182; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. Singer, “The index of elliptic operators. III”, *Ann. of Math.* (2), **87**:3 (1968), 546–604.
- [4] М. Ф. Атья, И. М. Зингер, “Индекс эллиптических операторов. IV”, *УМН*, **27**:4 (1972), 161–178; пер. с англ.: M. F. Atiyah, I. Singer, “The index of elliptic operators. IV”, *Ann. of Math.* (2), **93**:1 (1971), 119–138.
- [5] Ю. П. Соловьев, Е. В. Троицкий, *C*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии*, Факториал, М., 1996; англ. пер.: Yu. P. Solov'yov, E. V. Troitsky, *C*-algebras and elliptic operators in differential topology*, Transl. Math. Monogr., **192**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [6] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and the Dirac operator*, Grundlehren Math. Wiss., **298**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah–Singer index theorem*, Second edition, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- [8] R. B. Melrose, *The Atiyah–Patodi–Singer index theorem*, Res. Notes in Math., **4**, A K Peters, Wellesley, MA, 1993.
- [9] R. S. Palais, *Seminar on the Atiyah–Singer index theorem*, Ann. of Math. Stud., **57**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965.
- [10] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Second edition, Pitman Res. Notes Math. Ser., **395**, Longman, Harlow, 1998.
- [11] M. F. Atiyah, “Elliptic operators and compact groups”, Lecture Notes in Math., **401**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974.
- [12] I. M. Singer, “Recent applications of index theory for elliptic operators”, *Partial differential equations* (Berkeley, CA, 1971), Proc. Sympos. Pure Math., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, 11–31.
- [13] A. Connes, “A survey of foliations and operator algebras”, *Operator algebras and applications, Part I* (Kingston, ON, 1980), Proc. Sympos. Pure Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, 521–628.
- [14] A. Connes, “Noncommutative differential geometry”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **62** (1985), 257–360.
- [15] A. Connes, “Sur la théorie non commutative de l’intégration”, *Algèbres d’opérateurs* (Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math., **725**, Springer, Berlin, 1979, 19–143.
- [16] A. Connes, “Noncommutative geometry – year 2000”, *GAGA 2000* (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal., Special Volume, Part II, 2000, 481–559.
- [17] A. Connes, “Cyclic cohomology, noncommutative geometry and quantum group symmetries”, *Noncommutative geometry*, Lecture Notes in Math., **1831**, Springer, Berlin, 2004, 1–71.
- [18] Yu. A. Kordyukov, “Noncommutative geometry of foliations”, *J. K-Theory*, **2**:2 (2008), 219–327.
- [19] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [20] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, H. Figueroa, *Elements of noncommutative geometry*, Birkhäuser Adv. Texts. Basler Lehrbücher, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.

- [21] G. Landi, *An introduction to noncommutative spaces and their geometries*, Lecture Notes in Phys. Monogr., **51**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [22] M. Khalkhali, M. Marcolli (eds.), *An invitation to noncommutative geometry*, International Workshop on Noncommutative Geometry (Tehran, 2005), World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.
- [23] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B. Yu. Sternin, *Elliptic theory and noncommutative geometry. Nonlocal elliptic operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **183**, Birkhäuser, Basel, 2008.
- [24] J. C. Várilly, *An introduction to noncommutative geometry*, EMS Ser. Lect. Math., European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006.
- [25] K. B. Sinha, D. Goswami, *Quantum stochastic processes and noncommutative geometry*, Cambridge Tracts in Math., **169**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [26] J.-M. Bismut, "The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs", *Invent. Math.*, **83**:1 (1985), 91–151.
- [27] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Math. Ser., **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
- [28] P. Baum, R. G. Douglas, "K homology and index theory", *Operator algebras and applications, Part I* (Kingston, ON, 1980), Proc. Sympos. Pure Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, 117–173.
- [29] E. Getzler, "The odd Chern character in cyclic homology and spectral flow", *Topology*, **32**:3 (1993), 489–507.
- [30] H. P. McKean, Jr., I. M. Singer, "Curvature and the eigenvalues of the Laplacian", *J. Differential Geom.*, **1**:1 (1967), 43–69.
- [31] M. Atiyah, R. Bott, V. K. Patodi, "On the heat equation and the index theorem", *Invent. Math.*, **19**:4 (1973), 279–330.
- [32] P. B. Gilkey, "Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes", *Adv. Math.*, **10**:3 (1973), 344–382.
- [33] V. K. Patodi, "Curvature and the eigenforms of the Laplace operator", *J. Differential Geom.*, **5**:1–2 (1971), 233–249.
- [34] E. Getzler, "A short proof of the local Atiyah–Singer index theorem", *Topology*, **25**:1 (1986), 111–117.
- [35] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77** (1975), 43–69.
- [36] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **79**:1 (1976), 71–99.
- [37] M. F. Atiyah, R. Bott, "A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I", *Ann. of Math. (2)*, **86**:2 (1967), 374–407.
- [38] M. F. Atiyah, R. Bott, "A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications", *Ann. of Math. (2)*, **88**:3 (1968), 451–491.
- [39] Г. Г. Каспаров, "Операторный K-функтор и расширения C^* -алгебр", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 (1980), 571–636; англ. пер.: G. G. Kasparov, "The operator K-functor and extensions of C^* -algebras", *Math. USSR-Izv.*, **16**:3 (1981), 513–572.
- [40] N. Berline, M. Vergne, "A proof of Bismut local index theorem for a family of Dirac operators", *Topology*, **26**:4 (1987), 435–463.
- [41] S. Ferry, A. Ranicki, J. Rosenberg, "A history and survey of the Novikov conjecture", *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1* (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **226**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 7–66.
- [42] M. Gromov, "Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures", *Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. II* (New Brunswick, NJ, 1993), Progr. Math., **132**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996, 1–213.

- [43] G. Kasparov, “Novikov’s conjecture on higher signatures: the operator K -theory approach”, *Representation theory of groups and algebras*, Contemp. Math., **145**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 79–99.
- [44] E. Leichtnam, P. Piazza, “Elliptic operators and higher signatures”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **54**:5 (2004), 1197–1277; [arXiv:math/0406020](#).
- [45] M. F. Atiyah, “Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras”, *Colloque “Analyse et Topologie” en l’honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, Astérisque, **32–33**, Soc. Math. France, Paris, 1976, 43–72.
- [46] A. Connes, H. Moscovici, “Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups”, *Topology*, **29**:3 (1990), 345–388.
- [47] J. Lott, “Superconnections and higher index theory”, *Geom. Funct. Anal.*, **2**:4 (1992), 421–454.
- [48] J. Lott, “Higher eta-invariants”, *K-Theory*, **6**:3 (1992), 191–233.
- [49] M. A. Rieffel, “Morita equivalence for operator algebras”, *Operator algebras and applications, Part I* (Kingston, ON, 1980), Proc. Sympos. Pure Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, 285–298.
- [50] M. F. Atiyah, “Global theory of elliptic operators”, *Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics* (Tokyo, 1969), Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, 21–30.
- [51] Г. Г. Каспаров, “Топологические инварианты эллиптических операторов. I. K -гомологии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:4 (1975), 796–838; англ. пер.: G. G. Kasparov, “Topological invariants of elliptic operators. I. K -homology”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:4 (1975), 751–792.
- [52] L. G. Brown, R. G. Douglas, P. A. Fillmore, “Extensions of C^* -algebras and K -homology”, *Ann. of Math. (2)*, **105**:2 (1977), 265–324.
- [53] P. Baum, N. Higson, T. Schick, “On the equivalence of geometric and analytic K -homology”, *Pure Appl. Math. Quart.*, **3**:1 (2007), 1–24; [arXiv:math/0701484](#).
- [54] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Индекс эллиптических операторов над C^* -алгебрами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 831–859; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “The index of elliptic operators over C^* -algebras”, *Math. USSR-Izv.*, **15**:1 (1980), 87–112.
- [55] M. Breuer, “Fredholm theories in von Neumann algebras. I”, *Math. Ann.*, **178**:3 (1968), 243–254.
- [56] M. Breuer, “Fredholm theories in von Neumann algebras. II”, *Math. Ann.*, **180**:4 (1969), 313–325.
- [57] J. Phillips, I. Raeburn, “An index theorem for Toeplitz operators with noncommutative symbol space”, *J. Funct. Anal.*, **120**:2 (1994), 239–263.
- [58] M. Karoubi, *Homologie cyclique et K -théorie*, Astérisque, **149**, 1987.
- [59] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [60] L. B. Schweitzer, “A short proof that $M_n(A)$ is local if A is local and Fréchet”, *Internat. J. Math.*, **3**:4 (1992), 581–589; [arXiv:funct-an/9211005](#).
- [61] A. Connes, “An analogue of the Thom isomorphism for crossed products of a C^* -algebra by an action of $\mathbb{R}$ ”, *Adv. in Math.*, **39**:1 (1981), 31–55.
- [62] J.-B. Bost, “Principe d’Oka, K -théorie et systèmes dynamiques non commutatifs”, *Invent. Math.*, **101**:1 (1990), 261–333.
- [63] A. Connes, H. Moscovici, “The local index formula in noncommutative geometry”, *Geom. Funct. Anal.*, **5**:2 (1995), 174–243.
- [64] A. Connes, “Geometry from the spectral point of view”, *Lett. Math. Phys.*, **34**:3 (1995), 203–238.
- [65] S. Baaĵ, P. Julg, “Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^* -modules hilbertiens”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **296**:21 (1983), 875–878.

- [66] R. Ji, “Smooth dense subalgebras of reduced group C^* -algebras, Schwartz cohomology of groups, and cyclic cohomology”, *J. Funct. Anal.*, **107**:1 (1992), 1–33.
- [67] A. Connes, *On the spectral characterization of manifolds*, [arXiv: abs/0810.2088](#), 2008.
- [68] J. Dixmier, “Existence de traces non normales”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **262** (1966), A1107–A1108.
- [69] A. Connes, “The action functional in non-commutative geometry”, *Comm. Math. Phys.*, **117**:4 (1988), 673–683.
- [70] M. Wodzicki, “Noncommutative residue. Chapter I. Fundamentals”, *K-theory, arithmetic and geometry* (Moscow, 1984–1986), *Lecture Notes in Math.*, **1289**, Springer, Berlin, 1987, 320–399.
- [71] V. Guillemin, “A new proof of Weyl’s formula on the asymptotic distribution of eigenvalues”, *Adv. Math.*, **55**:2 (1985), 131–160.
- [72] А. Л. Кери, Ф. А. Сукочев, “Следы Диксмье и некоторые приложения в некоммутативной геометрии”, *УМН*, **61**:6 (2006), 45–110; англ. пер.: A. L. Carey, F. A. Sukochev, “Dixmier traces and some applications in non-commutative geometry”, *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1039–1099.
- [73] A. L. Carey, J. Phillips, A. Rennie, F. A. Sukochev, “The local index formula in semifinite von Neumann algebras. I: Spectral flow”, *Adv. Math.*, **202**:2 (2006), 451–516.
- [74] A. L. Carey, J. Phillips, A. Rennie, F. A. Sukochev, “The local index formula in semifinite von Neumann algebras. II: The even case”, *Adv. Math.*, **202**:2 (2006), 517–554.
- [75] A. Connes, H. Moscovici, “Type III and spectral triples”, *Traces in number theory, geometry and quantum fields*, *Aspects Math.*, **E38**, Vieweg, Wiesbaden, 2008, 57–71.
- [76] H. Moscovici, *Local index formula and twisted spectral triples*, [arXiv: abs/0902.0835](#), 2009.
- [77] A. Haefliger, “Groupoïdes d’holonomie et classifiants”, *Astérisque*, **116** (1984), 70–97.
- [78] A. Haefliger, “Some remarks on foliations with minimal leaves”, *J. Differential Geom.*, **15**:2 (1980), 269–384.
- [79] R. Bott, “On topological obstructions to integrability”, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Gauthiers-Villars, Paris, 1971, 27–36.
- [80] Y. Carrière, “Flots riemanniens”, *Astérisque*, **116** (1984), 31–52.
- [81] H. E. Winkelnkemper, “The graph of a foliation”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **1**:3 (1983), 53–75.
- [82] A. Haefliger, “Homotopy and integrability”, *Manifolds – Amsterdam 1970* (Proc. Nuffic Summer School), *Lecture Notes in Math.*, **197**, Springer, Berlin, 1971, 133–163.
- [83] A. Haefliger, “Differential cohomology”, *Differential topology* (Varenna, 1976), Li-guori, Naples, 1979, 19–70.
- [84] J. Phillips, “The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold”, *Rocky Mountain J. Math.*, **17**:1 (1987), 151–165.
- [85] T. Fack, G. Skandalis, “Sur les représentations et idéaux de la C^* -algèbre d’un feuilletage”, *J. Operator Theory*, **8** (1982), 95–129.
- [86] M. Hilsum, G. Skandalis, “Stabilité des C^* -algèbres de feuilletages”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **33**:3 (1983), 201–208.
- [87] F. Kamber, Ph. Tondeur, *Foliated bundles and characteristic classes*, *Lecture Notes in Math.*, **493**, Springer, Berlin–New York, 1975.
- [88] A. Connes, G. Skandalis, “The longitudinal index theorem for foliations”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **20**:6 (1984), 1139–1183.

- [89] G. G. Kasparov, “ K -theory, group C^* -algebras, and higher signatures (conspectus)”, *Novikov conjectures, index theorems and rigidity*, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **226**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, 101–146.
- [90] P. S. Muhly, J. N. Renault, D. P. Williams, “Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras”, *J. Operator Theory*, **17**:1 (1987), 3–22.
- [91] M. A. Rieffel, “ C^* -algebras associated with irrational rotations”, *Pacific J. Math.*, **93**:2 (1981), 415–429.
- [92] A. Connes, “ C^* algèbres et géométrie différentielle”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **290**:13 (1980), A599–A604.
- [93] A. Konechny, A. Schwarz, “Introduction to M(atrix) theory and noncommutative geometry”, *Phys. Rep.*, **360**:5–6 (2002), 353–465.
- [94] M. Crainic, I. Moerdijk, “Foliation groupoids and their cyclic homology”, *Adv. Math.*, **157**:2 (2001), 177–197.
- [95] M. Hilsum, G. Skandalis, “Morphismes K -orientés d’espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **20**:3 (1987), 325–390.
- [96] P. Baum, A. Connes, “Geometric K -theory for Lie groups and foliations”, *Enseign. Math.* (2), **46**:1–2 (2000), 3–42.
- [97] G. Segal, “Classifying spaces and spectral sequences”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **34**:1 (1968), 105–112.
- [98] S. Hurder, *Classifying foliations*, [arXiv: abs/0804.1240](https://arxiv.org/abs/0804.1240), 2008.
- [99] A. Connes, “Cyclic cohomology and the transverse fundamental class of a foliation”, *Geometric methods in operator algebras* (Kyoto, 1983), Pitman Res. Notes Math. Ser., **123**, Longman, Harlow, 1986, 52–144.
- [100] R. G. Douglas, J. F. Glazebrook, F. W. Kamber, G. Yu, “Index formulas for geometric Dirac operators in Riemannian foliations”, *K-Theory*, **9**:5 (1995), 407–441.
- [101] C. C. Moore, C. Schochet, *Global analysis on foliated spaces*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **9**, Springer, New York, 1988.
- [102] A. Connes, “The von Neumann algebra of a foliation”, *Mathematical problems in theoretical physics, Proc. Internat. Conf.* (Rome, 1977), Lecture Notes in Phys., **80**, Springer, Berlin–New York, 1978, 145–151.
- [103] J.-L. Sauvageot, “Semi-groupe de la chaleur transverse sur la C^* -algèbre d’un feuilletage riemannien”, *J. Funct. Anal.*, **142**:2 (1996), 511–538.
- [104] A. Gorokhovsky, “Characters of cycles, equivariant characteristic classes and Fredholm modules”, *Comm. Math. Phys.*, **208**:1 (1999), 1–23.
- [105] M.-T. Benaméur, J. L. Heitsch, “Index theory and non-commutative geometry. I. Higher families index theory”, *K-Theory*, **33**:2 (2004), 151–183.
- [106] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984; англ. пер.: D. B. Fuks, *Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau, New York, 1986.
- [107] A. Connes, M. Takesaki, “The flow of weights on factors of type III”, *Tôhoku Math. J.* (2), **29**:4 (1977), 473–575.
- [108] S. Hurder, A. Katok, “Secondary classes and transverse measure theory of a foliation”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **11**:2 (1984), 347–350.
- [109] H. Moriyoshi, “On cyclic cocycles associated with the Godbillon–Vey classes”, *Geometric study of foliations* (Tokyo, 1993), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, 411–423.
- [110] H. Moriyoshi, T. Natsume, “The Godbillon–Vey cyclic cocycle and longitudinal Dirac operators”, *Pacific J. Math.*, **172**:2 (1996), 483–539.
- [111] J.-L. Brylinski, V. Nistor, “Cyclic cohomology of étale groupoids”, *K-Theory*, **8**:4 (1994), 341–365.

- [112] N. Berline, M. Vergne, “The Chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index”, *Invent. Math.*, **124**:1–3 (1996), 11–49.
- [113] N. Berline, M. Vergne, “L’indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques”, *Invent. Math.*, **124**:1–3 (1996), 51–101.
- [114] P.-É. Paradan, M. Vergne, *Index of transversally elliptic operators*, [arXiv: abs/0804.1225](#), 2008.
- [115] G. G. Kasparov, *K-theoretic index theorems for elliptic and transversally elliptic operators*, Preprint, Vanderbilt University, Nashville, 2008; *J. K-Theory* (to appear).
- [116] Guo Liang Yu, “Cyclic cohomology and the index theory of transversely elliptic operators”, *Selfadjoint and nonselfadjoint operator algebras and operator theory* (Fort Worth, TX, 1990), *Contemp. Math.*, **120**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 189–192.
- [117] T. Kawasaki, “The index of elliptic operators over V -manifolds”, *Nagoya Math. J.*, **84** (1981), 135–157.
- [118] J. Fox, P. Haskell, “The index of transversally elliptic operators for locally free actions”, *Pacific J. Math.*, **164**:1 (1994), 41–85.
- [119] J. Fox, P. Haskell, “The index of transversally elliptic operators on locally homogeneous spaces of finite volume”, *Michigan Math. J.*, **41**:2 (1994), 323–336.
- [120] P.-É. Paradan, “Localization of the Riemann–Roch character”, *J. Funct. Anal.*, **187**:2 (2001), 442–509.
- [121] P.-É. Paradan, “Spin^c-quantization and the K -multiplicities of the discrete series”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **36**:5 (2003), 805–845.
- [122] V. Mathai, R. B. Melrose, I. M. Singer, “Equivariant and fractional index of projective elliptic operators”, *J. Differential Geom.*, **78**:3 (2008), 465–473.
- [123] V. Mathai, R. B. Melrose, I. M. Singer, “Fractional analytic index”, *J. Differential Geom.*, **74**:2 (2006), 265–292.
- [124] A. Nestke, P. Zickermann, “The index of transversally elliptic complexes”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **34**:9 (1985), 165–175.
- [125] Yu. A. Kordyukov, “Transversally elliptic operators on G -manifolds of bounded geometry”, *Russian J. Math. Phys.*, **2**:2 (1994), 175–198; Yu. A. Kordyukov, “Transversally elliptic operators on a G -manifold of bounded geometry”, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:1 (1995), 41–64.
- [126] Yu. A. Kordyukov, “The Egorov theorem for transverse Dirac-type operators on foliated manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **57**:11 (2007), 2345–2364.
- [127] Yu. A. Kordyukov, “Vanishing theorems for transverse Dirac operators on Riemannian foliations”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **34**:2 (2008), 195–211.
- [128] C. Lazarov, “Transverse index and periodic orbits”, *Geom. Funct. Anal.*, **10**:1 (2000), 124–159.
- [129] J. A. Álvarez López, Yu. A. Kordyukov, “Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one”, *Foliations: geometry and dynamics* (Warsaw, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, 159–183.
- [130] Ch. Deninger, W. Singhof, “A note on dynamical trace formulas”, *Dynamical, spectral, and arithmetic zeta functions* (San Antonio, TX, 1999), *Contemp. Math.*, **290**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 41–55.
- [131] D. Fried, “Lefschetz formulas for flows”, *The Lefschetz centennial conference, Part III* (Mexico City, 1984), *Contemp. Math.*, **58**, **III**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 19–69.
- [132] V. Guillemin, “Lectures on spectral theory of elliptic operators”, *Duke Math. J.*, **44**:3 (1977), 485–517.
- [133] S. J. Patterson, “On Ruelle’s zeta-function”, *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part II* (Ramat Aviv, 1989), Israel Math. Conf. Proc., **3**, Weizmann, Jerusalem, 1990, 163–184.

- [134] A. Juhl, “Cohomological theory of dynamical zeta functions”, *Progr. Math.*, **194**, Birkhäuser, Basel, 2001.
- [135] Ch. Deninger, *Analogies between analysis on foliated spaces and arithmetic geometry*, [arXiv: abs/0709.2801](https://arxiv.org/abs/0709.2801), 2007.
- [136] E. Leichtnam, “An invitation to Deninger’s work on arithmetic zeta functions”, *Geometry, spectral theory, groups, and dynamics*, *Contemp. Math.*, **387**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 201–236.
- [137] J. A. Álvarez López, Yu. A. Kordyukov, “Lefschetz distribution for Lie foliations”, *C*-algebras and elliptic theory. II*, *Trends Math.*, Basel, Birkhäuser, 2008, 1–40.
- [138] Yu. A. Kordyukov, “Noncommutative spectral geometry of Riemannian foliations”, *Manuscripta Math.*, **94**:1 (1997), 45–73.
- [139] Yu. A. Kordyukov, “Egorov’s theorem for transversally elliptic operators on foliated manifolds and noncommutative geodesic flow”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **8**:2 (2005), 97–119.
- [140] A. Connes, “Gravity coupled with matter and the foundation of non commutative geometry”, *Comm. Math. Phys.*, **182**:1 (1996), 155–176.
- [141] R. Beals, P. Greiner, *Calculus on Heisenberg manifolds*, *Ann. of Math. Stud.*, **119**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1988.
- [142] A. Connes, H. Moscovici, “Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem”, *Comm. Math. Phys.*, **198**:1 (1998), 199–246.
- [143] A. Connes, H. Moscovici, “Differentiable cyclic cohomology and Hopf algebraic structures in transverse geometry”, *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, *Monogr. Enseign. Math.*, **38**, Enseignement Math., Geneva, 2001, 217–255.
- [144] G. Skandalis, “Noncommutative geometry, the transverse signature operator, and Hopf algebras [after A. Connes and H. Moscovici]”, *Cyclic homology in non-commutative geometry*, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **121**, Springer, Berlin, 2004, 115–134.
- [145] D. Perrot, “A Riemann–Roch theorem for one-dimensional complex groupoids”, *Comm. Math. Phys.*, **218**:2 (2001), 373–391.
- [146] D. Kreimer, “On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theories”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2**:2 (1998), 303–334.
- [147] A. Connes, D. Kreimer, “Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry”, *Comm. Math. Phys.*, **199**:1 (1998), 203–242.
- [148] A. Connes, D. Kreimer, “Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. I: The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem”, *Comm. Math. Phys.*, **210**:1 (2000), 249–273.
- [149] A. Connes, D. Kreimer, “Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. II: The β -function, diffeomorphisms and the renormalization group”, *Comm. Math. Phys.*, **216**:1 (2001), 215–241.
- [150] A. Connes, H. Moscovici, “Modular Hecke algebras and their Hopf symmetry”, *Mosc. Math. J.*, **4**:1 (2004), 67–109.
- [151] A. Connes, H. Moscovici, “Rankin–Cohen brackets and the Hopf algebra of transverse geometry”, *Mosc. Math. J.*, **4**:1 (2004), 111–130.
- [152] R. G. Douglas, S. Hurder, J. Kaminker, “The longitudinal cocycle and the index of the Toeplitz operators”, *J. Funct. Anal.*, **101**:1 (1991), 120–144.
- [153] R. G. Douglas, S. Hurder, J. Kaminker, “Cyclic cocycles, renormalization and eta invariants”, *Invent Math.*, **103**:1 (1991), 101–181.
- [154] L. A. Coburn, R. G. Douglas, D. G. Schaeffer, I. M. Singer, “C*-algebras of operators on a half-space. II. Index theory”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40** (1971), 69–79.
- [155] Б. В. Федосов, М. А. Шубин, “Индекс случайных эллиптических операторов. I”, *Матем. сб.*, **106**:1 (1978), 108–140; *англ. пер.:* B. V. Fedosov, M. A. Šubin, “The index of random elliptic operators. I”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:5 (1978), 671–699.

- [156] Б. В. Федосов, М. А. Шубин, “Индекс случайных эллиптических операторов. II”, *Матем. сб.*, **106**:3 (1978), 455–483; англ. пер.: B. V. Fedosov, M. A. Šubin, “The index of random elliptic operators. II”, *Math. USSR-Sb.*, **35**:1 (1979), 131–156.
- [157] М. А. Шубин, “Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами”, *УМН*, **34**:2 (1979), 95–135; англ. пер.: M. A. Shubin, “The spectral theory and the index of elliptic operators with almost periodic coefficients”, *Russian Math. Surveys*, **34**:2 (1979), 109–157.
- [158] R. E. Curto, P. S. Muhly, J. Xia, “Toeplitz operators on flows”, *J. Funct. Anal.*, **93**:2 (1990), 391–450.
- [159] M. Lesch, “On the index of the infinitesimal generator of a flow”, *J. Operator Theory*, **26**:1 (1991), 73–92.
- [160] A. Carey, J. Phillips, F. Sukochev, “Spectral flow and Dixmier traces”, *Adv. Math.*, **173**:1 (2003), 68–113.
- [161] M. Ramachandran, “Von Neumann index theorems for manifolds with boundary”, *J. Differential Geom.*, **38**:2 (1993), 315–349.
- [162] G. Perić, “Eta invariants of Dirac operators on foliated manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **334**:2 (1992), 761–782.
- [163] J. L. Heitsch, C. Lazarov, “A Lefschetz theorem for foliated manifolds”, *Topology*, **29**:2 (1990), 127–162.
- [164] J. L. Heitsch, C. Lazarov, “Rigidity theorems for foliations by surfaces and spin manifolds”, *Michigan Math. J.*, **38**:2 (1991), 285–297.
- [165] Bai-Ling Wang, “Geometric cycles, index theory and twisted K -homology”, *J. Non-commut. Geom.*, **2**:4 (2008), 497–552.
- [166] M.-T. Benaméur, “A longitudinal Lefschetz theorem in K -theory”, *K-Theory*, **12**:3 (1997), 227–257.
- [167] S. Vassout, *Feuilletages et résidu non commutatif longitudinal*, Ph.D. thesis, Institut Jussieu, Paris, 2001.
- [168] M.-T. Benaméur, T. Fack, “Type II non-commutative geometry. I. Dixmier trace in von Neumann algebras”, *Adv. Math.*, **199**:1 (2006), 29–87.
- [169] S. Vassout, “Unbounded pseudodifferential calculus on Lie groupoids”, *J. Funct. Anal.*, **236**:1 (2006), 161–200.
- [170] M.-T. Benaméur, A. L. Carey, J. Phillips, A. Rennie, F. A. Sukochev, K. P. Wojciechowski, “An analytic approach to spectral flow in von Neumann algebras”, *Analysis, geometry and topology of elliptic operators*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006, 297–352.
- [171] B. Monthubert, F. Pierrot, “Indice analytique and groupoïdes de Lie”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **325**:2 (1997), 193–198.
- [172] V. Nistor, A. Weinstein, P. Xu, “Pseudodifferential operators on differential groupoids”, *Pacific J. Math.*, **189**:1 (1999), 117–152.
- [173] P. Baum, A. Connes, “Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes”, *Foliations* (Tokyo, 1983), Adv. Stud. Pure Math., **5**, North-Holland, Amsterdam, 1985, 1–14.
- [174] M. Hilsaum, G. Skandalis, “Invariance par homotopie de la signature à coefficients dans un fibré presque plat”, *J. Reine Angew. Math.*, **423** (1992), 73–99.
- [175] S. Hurder, “Coarse geometry of foliations”, *Geometric study of foliations* (Tokyo, 1993), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, 35–96.
- [176] P. Carrillo Rouse, *Higher localized analytic indices and strict deformation quantization*, [arXiv: abs/0810.4480](https://arxiv.org/abs/0810.4480), 2008.
- [177] V. Nistor, “The index of operators on foliated bundles”, *J. Funct. Anal.*, **141**:2 (1996), 421–434; [arXiv: dg-ga/9607002](https://arxiv.org/abs/dg-ga/9607002), 1996.
- [178] V. Nistor, “On the Cuntz–Quillen boundary map”, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **16**:5 (1994), 203–208.

- [179] J. L. Heitsch, “Bismut superconnections and the Chern character for Dirac operators on foliated manifolds”, *K-Theory*, **9**:6 (1995), 507–528.
- [180] X. Jiang, “An index theorem on foliated flat bundles”, *K-Theory*, **12**:4 (1997), 319–359.
- [181] R. G. Douglas, J. Kaminker, “Induced cyclic cocycles and higher eta invariants”, *J. Funct. Anal.*, **147**:2 (1997), 301–326.
- [182] И. Н. Бернштейн, Б. И. Розенфельд, “Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений”, *УМН*, **28**:4 (1973), 103–138; англ. пер.: I. N. Bernshtein, B. I. Rozenfel’d, “Homogeneous spaces of infinite-dimensional Lie algebras and characteristic classes of foliations”, *Russian Math. Surveys*, **28**:4 (1973), 107–142.
- [183] A. Gorokhovsky, “Secondary characteristic classes and cyclic cohomology of Hopf algebras”, *Topology*, **41**:5 (2002), 993–1016.
- [184] A. Gorokhovsky, J. Lott, “Local index theory over étale groupoids”, *J. Reine Angew. Math.*, **560** (2003), 151–198.
- [185] A. Gorokhovsky, J. Lott, “Local index theory over foliation groupoids”, *Adv. Math.*, **204**:2 (2006), 413–447.
- [186] E. Leichtnam, P. Piazza, “Étale groupoids, eta invariants and index theory”, *J. Reine Angew. Math.*, **587** (2005), 169–233.
- [187] E. Leichtnam, P. Piazza, “Cut-and-paste on foliated bundles”, *Spectral geometry of manifolds with boundary and decomposition of manifolds*, Contemp. Math., **366**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 151–192.
- [188] V. Nistor, “A bivariant Chern character for p -summable quasimorphisms”, *K-Theory*, **5**:3 (1991), 193–211.
- [189] V. Nistor, “A bivariant Chern–Connes character”, *Ann. of Math. (2)*, **138**:3 (1993), 555–590.
- [190] A. Gorokhovsky, “Bivariant Chern character and longitudinal index”, *J. Funct. Anal.*, **237**:1 (2006), 105–134.
- [191] J. L. Heitsch, C. Lazarov, “A general families index theorem”, *K-Theory*, **18**:2 (1999), 181–202.
- [192] M.-T. Benaméur, J. L. Heitsch, “Index theory and non-commutative geometry. II. Dirac operators and index bundles”, *J. K-Theory*, **1**:2 (2008), 305–356.
- [193] M.-T. Benaméur, J. L. Heitsch, *The higher harmonic signature for foliations I. The untwisted case*, [arXiv: abs/0711.0352](https://arxiv.org/abs/0711.0352), 2007.
- [194] M.-T. Benaméur, “Cyclic cohomology and the family Lefschetz theorem”, *Math. Ann.*, **323**:1 (2002), 97–121.
- [195] M.-T. Benaméur, “A higher Lefschetz formula for flat bundles”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:1 (2003), 119–142.
- [196] P. Carrillo Rouse, “A Schwartz type algebra for the tangent groupoid”, *K-Theory and Noncommutative Geometry* (Valladolid, 2006), European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008, 181–200.
- [197] P. Carrillo Rouse, *Compactly supported analytic indices for Lie groupoids*, [arXiv: abs/0803.2060](https://arxiv.org/abs/0803.2060), 2008.

Ю. А. Кордюков (Yu. A. Kordyukov)
 Институт математики с вычислительным
 центром УНЦ РАН
E-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Поступила в редакцию
 11.01.2009