Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Л. Соловьёв, О гамильтоновой форме уравнений эллиптической спиновой модели Рейсенарса–Шнайдера, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 6, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:17:19

О гамильтоновой форме уравнений эллиптической спиновой модели Рейсенарса–Шнайдера

Ф. Л. Соловьёв

Эллиптическая модель Рейсенарса–Шнайдера (РШ) [1] является гамильтоновой системой N взаимодействующих частиц, расположенных на эллиптической кривой. В пределе, когда один или оба периода кривой стремятся к бесконечности, получаются тригонометрическая или рациональная системы. Модель Рейсенарса–Шнайдера является релятивистским обобщением системы Калоджеро–Мозера. В работе [2] было предложено спиновое обобщение системы РШ, в котором каждая частица имеет дополнительные внутренние степени свободы, влияющие на взаимодействие и описываемые двумя l -мерными векторами a_i и b_i . Уравнения движения остаются интегрируемыми и имеют вид

$$\dot{f}_{ij} = \sum_{k \neq j} f_{ik} f_{kj} V(x_j - x_k) - \sum_{k \neq i} f_{ik} f_{kj} V(x_k - x_i), \quad \dot{x}_i = f_{ii}, \quad (1)$$

где $f_{ij} = b_i^T a_j$ и $V(x) = \zeta(x + \eta) - \zeta(x)$, а $\zeta(x)$ – дзета-функция Вейерштрасса.

В [3] с помощью универсальной симплектической формы (найденной в [4]) показано, что эллиптическая спиновая модель РШ гамильтонова. Выражение симплектической формы (или пуассоновой структуры) в исходных переменных известно только в рациональном и тригонометрическом пределах (см. [5]). Целью настоящей работы является вычисление ω в исходных переменных x_i и f_{ij} в простейшем эллиптическом случае, когда имеются только две частицы, т. е. $N = 2$. Проводится сравнение полученной 2-формы с симплектической формой для бесспиновой системы и с пуассоновой структурой, найденной в [5] в рациональном случае.

Общий метод, предложенный в [4], позволяет найти переменные действие-угол для эллиптической системы РШ и его спинового обобщения. Это сделано в работе [3]. Краткая схема доказательства такова. В [2] найдено лаксово представление со спектральным параметром для эллиптической системы РШ. Матрица Лакса имеет вид

$$L_{ij} = f_i \Phi(x_i - x_j - \eta), \quad \text{где } \Phi(x, z) = \frac{\sigma(z + x + \eta)}{\sigma(z + \eta)\sigma(x)} \left[\frac{\sigma(z - \eta)}{\sigma(z + \eta)} \right]^{x/2\eta}. \quad (2)$$

Спектральный параметр z определен на эллиптической кривой Γ_0 с разрезом между точками $z = \eta$ и $z = -\eta$. Собственный вектор ψ матрицы L , определенный уравнением $L\psi = k\psi$, – однозначная мероморфная функция на спектральной кривой $\hat{\Gamma}$: $\det(L - kI) = 0$. Он имеет полюсы $\hat{\gamma}_s$ на $\hat{\Gamma}$ из-за нормировки собственных векторов. В [3] показано, что универсальная симплектическая форма задается формулой

$$\omega = \sum_s \delta \ln k(\hat{\gamma}_s) \wedge \delta z(\hat{\gamma}_s). \quad (3)$$

При ограничении на листы, где 1-форма $\delta \ln k dz$ голоморфна, ω не зависит от калибровочных преобразований $L \rightarrow gLg^{-1}$, $\psi \rightarrow g\psi$ и нормировки собственных векторов. Вычисления, проведенные в [3] для матрицы Лакса (2), показывают, что $\omega = \sum_i \delta \ln f_i \wedge \delta x_i + \sum_{i \neq j} V(x_i - x_j) \delta x_i \wedge \delta x_j$, а гамильтониан бесспиновой эллиптической системы РШ равен $H = \sum_{i=1}^N f_i$.

Лаксово представление со спектральным параметром для эллиптической спиновой системы РШ (1) было найдено в [2]. Матрица Лакса имеет вид $L_{ij} = f_{ij} \Phi(x_i - x_j - \eta)$. Формально, уравнения (1) гамильтоновы с функцией Гамильтона $H = \sum_{i=1}^N f_{ii}$ и симплектической формой (3) (подробности см. в [3]).

После калибровочного преобразования диагональной матрицей $g = \text{diag}(\Phi(x_1, z), \lambda\Phi(x_2, z))$ с подходящим выбором λ матрица L_{ij} становится равной

$$L = \begin{pmatrix} -f_1 \frac{\sigma(z)}{\sigma(\eta)} & f_3 \frac{\sigma(z-x_1+x_2)\sigma(z+x_1+\eta)\sigma(x_2)}{\sigma(x_2-x_1-\eta)\sigma(z+x_2+\eta)\sigma(x_1)} \\ f_3 \frac{\sigma(z+x_1-x_2)\sigma(z+x_2+\eta)\sigma(x_1)}{\sigma(x_1-x_2-\eta)\sigma(z+x_1+\eta)\sigma(x_2)} & -f_2 \frac{\sigma(z)}{\sigma(\eta)} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma(z+\eta)\sigma(z-\eta)}},$$

где $f_1 \equiv f_{11}$, $f_2 \equiv f_{22}$, а $f_3 \equiv \sqrt{f_{12}f_{21}}$. Матрица L определена на кривой Γ рода $g = 2$, являющейся двулистным накрытием эллиптической кривой Γ_0 с двумя точками ветвления $z = \eta$ и $z = -\eta$. Спектральная кривая $\hat{\Gamma}$ матрицы L , определяемая уравнением $R = \det(L_{ij} - k\delta_{ij}) = 0$, является двулистным накрытием Γ , а функция $\partial_k R$ имеет 4 простых полюса на $\hat{\Gamma}$ над точками $z = \pm\eta$. Функция $\partial_k R$ мероморфна на $\hat{\Gamma}$, поэтому у нее 4 нуля. Нули этой функции – в точности точки ветвления кривой $\hat{\Gamma}$ над Γ . Используя формулу Римана–Гурвица, получаем, что род $\hat{\Gamma}$ равен $\hat{g} = 5$.

Обозначим через z_0 нуль детерминанта $L(z)$, т. е. $\det L(z_0) = 0$, или $f_1 f_2 \sigma^2(z_0) \times \sigma(x_{12} - \eta) \sigma(-x_{12} - \eta) = f_3^2 \sigma^2(\eta) \sigma(z_0 + x_{12}) \sigma(z_0 - x_{12})$, где $x_{12} = x_1 - x_2$. Тогда симплектические листы определяются условием $\delta z_0 = 0$. Заметим, что вместо переменных $(x_1, x_2, f_1, f_2, f_3)$ можно использовать переменные $(x_1, x_2, f_1, f_2, z_0)$.

ТЕОРЕМА. В случае $N = 2$ эллиптическая спиновая модель Рейсенарса–Шнайдера задается симплектической формой

$$\omega = -\delta \ln f_1 \wedge \delta x_1 - \delta \ln f_2 \wedge \delta x_2 + 2\tilde{V}(x_{12})\delta x_1 \wedge \delta x_2 \quad (4)$$

и функцией Гамильтона $H = f_1 + f_2$, где $\tilde{V}(x) = \zeta(x + z_0) - \zeta(x)$. Бесспиновый случай соответствует $z_0 = \eta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любой нормировке собственный вектор ψ матрицы L – мероморфная функция на $\hat{\Gamma}$, с $\hat{g} + 1 = 6$ полюсами в точках $\hat{\gamma}_s$. В данном случае полюсы $\hat{\gamma}_s$ функции ψ проще всего найти в нормировке $\psi_1 \equiv 1$. Два из них ($s = 1, 2$) находятся над точкой $z = x_{12}$, а остальные – над $z = -x_1 - \eta$ ($s = 3, 4, 5, 6$). Подставляя $\hat{\gamma}_s$ в (3), получаем формулу (4). Используя стандартные тождества для σ -функций и определение z_0 , получаем

$$f_1 f_2 (2\zeta(x_{12}) + \zeta(z_0 - x_{12}) - \zeta(z_0 + x_{12})) = f_3^2 (2\zeta(x_{12}) + \zeta(\eta - x_{12}) - \zeta(\eta + x_{12})). \quad (5)$$

С помощью (5) можно показать, что уравнения движения для функции Гамильтона $H = f_1 + f_2$ эквивалентны $\dot{x}_1 = -\dot{x}_2 = f_3^2 (2\zeta(x_{12}) + \zeta(\eta - x_{12}) - \zeta(\eta + x_{12}))$, т. е. являются системой РПП. Бесспиновый случай соответствует $f_3^2 = f_1 f_2$ и $z_0 = \eta$, как видно из (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [5] была найдена пуассонова структура в рациональном случае для произвольного N (см. формулу (3.31) в [5]). В случае двух частиц она невырождена и определена на 6-мерном пространстве $(f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, x_1, x_2)$. Соответствующая ей 2-форма определена на том же пространстве и совпадает с (4) на листах $\delta z_0 = 0$ после редукции по действию $f_{12} \rightarrow f_{12}/\lambda$, $f_{21} \rightarrow f_{21}\lambda$.

Список литературы

- [1] S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider, *Ann. Physics*, **170:2** (1986), 370–405. [2] И. М. Кричевер, А. В. Забродин, *УМН*, **50:6** (1995), 3–56. [3] I. M. Krichever, *Elliptic solutions to difference non-linear equations and nested Bethe ansatz equations*, [arXiv: solv-int/9804016](https://arxiv.org/abs/solv-int/9804016), 1998. [4] I. M. Krichever, D. H. Phong, *J. Differential Geom.*, **45:2** (1997), 349–389. [5] G. E. Arutyunov, S. A. Frolov, *J. Phys. A*, **31:18** (1998), 4203–4216.

Ф. Л. Соловьёв (F. L. Soloviev)
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York
E-mail: soloviev@nyu.edu

Представлено И. М. Кричевером
Принято редколлегией
09.04.2009