Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кругликов, Монотонность функции вращения и антисогласованные контактные структуры, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 1, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm929>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 02:29:57

МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ ВРАЩЕНИЯ И АНТИСОГЛАСОВАННЫЕ КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Б. С. Кругликов

В [2], [4] (см. также [5]) построена теория траекторной классификации интегрируемых в боттовском смысле нерезонансных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Системам с монотонными функциями вращения отвечают более простые траекторные инварианты. В этой заметке мы рассмотрим геометрию, отвечающую монотонности функции вращения.

Контактная структура ξ на гиперповерхности Q^{2n-1} в симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) называется *согласованной* с симплектической формой ω , если для локально задающей ξ формы α выполнено условие $\alpha \wedge \omega^{n-1}|_Q \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем функцию $\psi(t)$ *k-возмущенно-монотонной*, если она представима в виде суммы $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$, где функция ψ_1 монотонна, а возмущение ψ_2 не превосходит по абсолютной величине k : $|\psi_2(t)| < k$.

Рассмотрим нерезонансную боттовскую интегрируемую гамильтонову систему (ИГС) $v = \text{sgrad}_\omega H$ на неособом изоэнергетическом многообразии $Q_c^3 = \{H = c\} \subset (M^4, \omega)$, $dH(x) \neq 0$ при $x \in Q^3$. Дополнительный интеграл F , $\{H, F\} = 0$, определяет гамильтоново действие $\mathbb{R}^2$ системы v на M^4 (см. доказательство теоремы Лиувилля, [1]): точке $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ соответствует сдвиг точек из M^4 за единичное время вдоль векторного поля $t \text{sgrad}_\omega H + s \text{sgrad}_\omega F$. Это действие можно рассматривать при ограничении на инвариантное многообразие Q_c^3 . На любом ребре молекулы e (см. [3]) – однопараметрическом семействе торов Лиувилля $T^2 \times I$ – оно локально свободно. Так как на ребре все орбиты действия компактны, можно профакторизовать это действие до действия тора T^2 , причем также гамильтонова. Действительно, в силу теоремы Лиувилля, на ребре существуют координаты (φ, t) такие, что

$$\omega|_e = (\Phi_1(t) d\varphi^1 + \Phi_2(t) d\varphi^2) \wedge dt.$$

Действие тора T^2 задается сдвигами вдоль $\partial_{\varphi^1}, \partial_{\varphi^2}$. Циклам $\{\varphi_2 = \text{const}\}, \{\varphi_1 = \text{const}\}$ на торах Лиувилля $T^2(t)$ отвечают переменные действия I_1, I_2 такие, что $\text{sgrad}_\omega I_i = \partial_{\varphi^i}$. Имеем: $v = v^1(t)\partial_{\varphi^1} + v^2(t)\partial_{\varphi^2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $\rho(t) = v^2(t)/v^1(t)$, $\rho: I \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, называется *функцией вращения* данной ИГС на ребре e . $\psi = \arctg \rho(t) \pmod{2\pi}$ называется *угловой функцией*. Знаки монотонности функций ρ и ψ противоположны.

ТЕОРЕМА 1 [6]. Для $T^2 \times I \subset Q^3 \subset (M^4, \omega)$ – ребра молекулы W – следующие свойства эквивалентны:

- (1) существует контактная форма, согласованная с ω и инвариантная относительно гамильтонова действия T^2 ,
- (2) угловая функция $\psi(t)$ является $\pi/2$ -возмущенно-монотонной.

СЛЕДСТВИЕ. Рассмотрим гамильтонову систему на $(T^*P^2, \omega = dp \wedge dq)$ с гамильтонианом $H = \frac{|p|^2}{2} + U(q)$, где P^2 – замкнутая поверхность, (q, p) – стандартные координата-импульс. Если система интегрируема с боттовским интегралом, то при больших энергиях, $E \gg 1$, на любом ребре молекулы $W_E = W(Q = \{H = E\})$ угловая функция будет $\pi/2$ -возмущенно-монотонной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассматриваемая гамильтонова система по принципу Мопертюи эквивалентна геодезическому потоку на двумерной поверхности. В случае известных интегрируемых геодезических потоков результат подтверждается явными формулами для функции вращения, полученными Е. Селивановой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим стандартную форму $\alpha = p dq$ на T^*P^2 , $d\alpha = \omega$;

$$dH \wedge \alpha \wedge d\alpha = dH \wedge \alpha \wedge \omega = (p dp + (\partial U / \partial q) dq) \wedge (p dq) \wedge (dp \wedge dq) = |p|^2 dp_1 \wedge dq^1 \wedge dp_2 \wedge dq^2.$$

Но при $E > \max_{q \in P^2} U(q)$ на $Q_E = \{H = E\}$ выполнено неравенство $|p| \neq 0$. Следовательно, $\alpha \wedge d\alpha|_Q = \alpha \wedge \omega|_Q \neq 0$ на Q_E и $dH(x) \neq 0$ при $x \in Q$. Рассмотрим $T^2 \times I$ – произвольное ребро молекулы W . На нем задано гамильтоново действие группы T^2 . Усредним α по этому действию:

$$\alpha_{\text{ср}}(w) = \frac{1}{(2\pi)^2} \oint_{T^2} \alpha(w|_{\varphi}) d\varphi^1 \wedge d\varphi^2.$$

Усредняя равенство $d\alpha = \omega$, получаем, в силу $\omega_{\text{ср}} = \omega$, равенство $d\alpha_{\text{ср}} = \omega$, а поскольку усреднение формы объема суть форма объема, неравенство $\alpha \wedge \omega \neq 0$ влечет за собой неравенство $\alpha_{\text{ср}} \wedge \omega \neq 0$. Теперь утверждение следует из теоремы.

Если же мы хотим получить условие монотонности, то α и ω надо связать более жестким условием, чем условие согласованности – условием *антисогласованности* $\alpha \wedge \omega = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(Q, \omega|_Q)$ – неособая изоэнергетическая поверхность боттовской ИГС $v = \text{sgrad}_{\omega} H$ с интегралом F . На некотором ребре e угловая функция монотонна тогда и только тогда, когда на нем существует такая инвариантная относительно гамильтонова действия тора T^2 контактная форма α , что $\alpha \wedge \omega = 0$.

ЛЕММА 1. 1-форма α на ребре $T^2 \times I \subset Q^3$ нерезонансной боттовской ИГС v инвариантна относительно гамильтонова действия тора T^2 , если и только если

$$\mathcal{L}_v \alpha|_{T^2} \equiv 0, \quad \mathcal{L}_v \mathcal{L}_v \alpha \equiv 0,$$

где $\mathcal{L}_v$ – производная Ли, а $T^2 = T^2(t)$ – ливиллев тор ребра.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(Q^3, \omega|_Q)$ – неособая изоэнергетическая поверхность боттовской ИГС v . На ребре e угловая функция монотонна тогда и только тогда, когда на нем существует трансверсальное ливиллевым торам, инвариантное относительно гамильтонова действия T^2 векторное поле η , такое что $\omega(\eta, \mathcal{L}_v \eta) \neq 0$.

ЛЕММА 2. Векторное поле η на ребре $T^2 \times I \subset Q^3$ инвариантно относительно гамильтонова действия тора T^2 , если и только если $\mathcal{L}_v \eta \in T(T^2)$ – касательное расщепление ливиллева тора, и $\mathcal{L}_v \mathcal{L}_v \eta \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно считать функцию $f = \omega(\eta, \mathcal{L}_v \eta)$ заданной на ребре $e \ni t$. При изменении монотонности угловой функции $\psi = \psi(t)$, функция $f = f(t)$ меняет знак, а нули f соответствуют экстремумам ψ .

Автор благодарен академику РАН профессору А. Т. Фоменко и д.ф.м.н. А. В. Болсинову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
 [2] Болсинов А. В. // Матем. сб. 1995. Т. 186. №1. С. 3–28. [3] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 59–77. [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. // Матем. сб. 1994. Т. 185. №4, 5. С. 27–80, 27–78. [5] Kruglikov B. Exact smooth classification of Hamiltonian systems on 2-manifolds // Preprint of ICTP, Trieste, Nov. 1994, IC/94/314. [6] Nguen Tien Zung. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems // Preprint of ICTP, Trieste. 1993, IC/93/305.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: borkru@difgeo.math.msu.ru

Принято редколлегией
01.11.1995