Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Бибииков, В. С. Жгун, О теореме Вальдшпургера,
УМН, 2009, том 64, выпуск 5, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:39:36

О теореме Вальдшпургера

П. В. Бибилов, В. С. Жгун

Пусть V – евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, $W \subset O(V)$ – конечная линейная группа, порожденная отражениями, C – ее фундаментальный конус и C° – его открытое ядро. Пусть V^W – пространство неподвижных точек группы W . Через W_{reg} обозначим множество элементов из W , пространство неподвижных точек которых совпадает с V^W . Пусть Π – множество единичных нормалей к граням конуса C , лежащих в одном полупространстве с C . Пусть H_e – грань, ортогональная $e \in \Pi$, а s_e – отражение относительно H_e . Через π_e обозначим вектор, ортогональный V^W и такой, что $(\pi_e, f) = \delta_{ef}/2$ для всех $f \in \Pi$. Пусть C^* – сопряженный конус к C .

Цель настоящей статьи – дать более простое и ясное доказательство следующей теоремы Вальдшпургера [1], а также получить некоторые ее уточнения.

ТЕОРЕМА 1 (Вальдшпургер). *Имеет место равенство $C^* = \bigsqcup_{w \in W} (1 - w)C^\circ$.*

ЛЕММА 1 (см. [2]). *Если $w \in W$, то $C^* \supseteq (1 - w)C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (сообщил Э. Б. Винберг). Пусть $x_0 \in C^\circ$ – произвольная точка. Рассмотрим область Дирихле $\mathcal{D}(x_0) = \{x \in V : \|x_0 - x\| \leq \|x_0 - wx\| \ \forall w \in W\} = \{x \in V : (x_0, x) \geq (x_0, wx) \ \forall w \in W\}$. Так как стабилизатор точки x_0 в группе W тривиален, то $\mathcal{D}(x_0)$ – выпуклая фундаментальная область для группы W , содержащая точку x_0 и, следовательно, совпадающая с C . Значит, $C = \{x \in V : (x_0, (1 - w)x) \geq 0 \ \forall w \in W\}$, откуда следует, что $(1 - w)C \subseteq C^*$ для всех $w \in W$.

ЛЕММА 2 (о неподвижной точке). *Для $g \in O(V)$ существует единственный элемент $w \in W$ такой, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в C° .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Будем вести доказательство индукцией по $\text{codim } V^W$. Докажем существование такого элемента $w \in W$, что преобразование $w^{-1}g$ имеет неподвижную точку в замкнутом конусе C . Рассмотрим пересечение $D = C \cap S$ единичной сферы $S = \{x \in V : \|x\| = 1\}$ и конуса C . Топологически D является замкнутым шаром. Пусть $x \in D$, тогда gx лежит в одном из конусов вида wC , где $w \in W$. Положим $f(x) = w^{-1}gx \in D$. Тем самым мы построили отображение f шара D в себя. Легко видеть, что оно корректно определено и непрерывно. По теореме Брауэра у этого отображения существует неподвижная точка. Таким образом, существуют элемент $w \in W$ и точка $x \in C$ такие, что $w^{-1}gx = x$.

Если $x \in C^\circ$, то все доказано. Пусть $x \in C \setminus C^\circ$. Рассмотрим подгруппу W_x , состоящую из элементов группы W , сохраняющих x . Обозначим Π_x – подмножество базисных векторов e , ортогональных вектору x , а $C_x := \{x \in V : (x, e) \geq 0 \ \forall e \in \Pi_x\}$. Группа W_x порождена отражениями, соответствующими векторам из Π_x , и $\text{codim } V^{W_x} > \text{codim } V^W$. По предположению индукции, примененному к элементу $w^{-1}g$, группе W_x и конусу C_x , существуют элемент $w' \in W_x$ и точка $x' \in C_x^\circ$ такие, что $(w')^{-1}w^{-1}gx' = x'$. В таком случае $(w')^{-1}w^{-1}g(x + tx') = x + tx'$ при всех $t \in \mathbb{R}$, причем $x + tx' \in C^\circ$, если $t > 0$ и достаточно мало. (Если $e \in \Pi_x$, то $(x + tx', e) = t(x', e) > 0$ при $t > 0$, а если $e \in \Pi \setminus \Pi_x$, то $(x + tx', e) = (x, e) + t(x', e) > 0$ при малых t .)

2. Докажем единственность элемента w . Пусть существуют два элемента $w_1, w_2 \in W$ такие, что $gx_1 = w_1x_1$ и $gx_2 = w_2x_2$, где $x_1, x_2 \in C^\circ$. Скалярно перемножая эти равенства, получаем: $(gx_1, gx_2) = (w_1x_1, w_2x_2)$. Учтя, что $g, w_1, w_2 \in O(V)$, приходим к $(x_1, (1 - w)x_2) = 0$, где $w = w_1^{-1}w_2 \in W$. Но $x_1 \in C^\circ$, а $(1 - w)x_2 \in C^*$ согласно лемме 1, поэтому последнее равенство возможно только при $(1 - w)x_2 = 0$. А так как $x_2 \in C^\circ$, то $w = 1$ и $w_1 = w_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По лемме о неподвижной точке, примененной к преобразованию $g = s_u$, где $u \in C^*$, существуют точка $x \in C^\circ$ и единственный элемент $w \in W$, такие, что $w^{-1}s_u x = x$. Отсюда $(1-w)x = (2(u, x)/(u, u))u$. Полагая $v = ((u, u)/(2(u, x)))x$, получаем равенство $(1-w)v = u$, причем $v \in C^\circ$, так как $x \in C^\circ$ и $(u, x) > 0$. С учетом леммы 1 это означает, что $\bigsqcup_{w \in W} (1-w)C^\circ = C^*$.

Выясним, какие конусы вида $C_w = (1-w)C$, где $w \in W_{\text{reg}}$, являются смежными, т.е. имеют пересечение коразмерности 1. Зафиксируем $w \in W_{\text{reg}}$, для каждого $e \in \Pi$ рассмотрим вектор v_e , ортогональный V^W , такой, что $(w^{-1} - 1)v_e = e$.

ЛЕММА 3. *Имеют место свойства:* 1) $(v_e, f) + (v_f, e) = -(e, f)$; 2) $(v_e, e) = -1/2$; 3) $v_e = ws_e v_e$; 4) $v_e \perp (1-w)H_e$; 5) $(v_e, (1-w)\pi_e) < 0$; 6) $\ker(1 - ws_e) = \langle v_e \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Скалярно перемножим $w^{-1}v_e = v_e + e$ и $w^{-1}v_f = v_f + f$. Из $(w^{-1}v_e, w^{-1}v_f) = (v_e, v_f) + (v_e, f) + (v_f, e) + (e, f)$ получаем требуемое. 3) Из п. 2) следует, что $w^{-1}v_e = v_e + e = v_e - (2(v_e, e)/(e, e))e = s_e v_e$. 4) По определению имеем $(v_e, (1-w)H_e) = ((1-w^{-1})v_e, H_e) = -(e, H_e) = 0$. 5) $(v_e, (1-w)\pi_e) = ((1-w^{-1})v_e, \pi_e) = -(e, \pi_e) < 0$. 6) Из п. 3) $\langle v_e \rangle \subseteq \ker(1 - ws_e)$. Обратно, пусть $z \in \ker(1 - ws_e)$. Тогда $(w^{-1} - 1)z = s_e z - z = -(2(e, z)/(e, e))e$, откуда следует, что $z \in \langle v_e \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $w \in W_{\text{reg}}$. Элемент $w' \in W$ регулярен и конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными тогда и только тогда, когда существуют такие векторы $e, f \in \Pi$, что $w' = ws_e s_f$ и $(v_e, f) > 0$; в этом случае $\text{codim}((1-w)H_e \cap (1-w')H_f) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Сначала предположим, что существуют такие $e, f \in \Pi$, что $w' = ws_e s_f$ и $(v_e, f) > 0$. Докажем, что $w' \in W_{\text{reg}}$. Предположим противное: пусть $w' \notin W_{\text{reg}}$. Тогда $\dim \ker(1 - w') = 2$, поскольку размерности пространств неподвижных точек преобразований w и ws_e отличаются на 1. Но $\ker(1 - w') \cap H_f = \{0\}$, так как $\ker(1 - w' s_f) = \ker(1 - ws_e) = \langle v_e \rangle \not\subseteq H_f$ – противоречие.

Докажем, что конусы C_w и $C_{w'}$ имеют пересечение коразмерности 1. Так как $(v_e, f) > 0$ и $(v_e, e) < 0$, то существует открытое подмножество $U \subseteq H_e$, для каждого вектора v из которого найдется такое число $t_0 > 0$, что $v' = v - t_0 v_e \in H_f$. (А именно, $U = \{v = u + \delta \pi_f : u \in H_e \cap H_f \text{ и } \delta > 0 \text{ достаточно мало}\}$. При $t_0 = \delta/(2(v_e, f)) > 0$ имеем: $(v', f) = 0$, $(v', e) = -t_0(v_e, e) > 0$ при $\delta > 0$ по п. 2) леммы 3 и $(v', h) = (u, h) + t_0(v_e, h) > 0$ при достаточно малых δ для $h \in \Pi \setminus \{e, f\}$). Значит, $(1 - w')v' = (1 - ws_e)v' = (1 - ws_e)v = (1 - w)v$, т.е. $C_w \cap C_{w'} \supseteq (1 - w)U$. Так как $w \in W_{\text{reg}}$, то пересечение $C_w \cap C_{w'}$ равно $(1 - w)H_e \cap (1 - w')H_f$ и имеет коразмерность 1.

2. Обратно, пусть конусы C_w и $C_{w'}$ являются смежными и $C_w \cap C_{w'} \subseteq (1 - w)H_e$. Заметим, что $(1 - w)H_e = (1 - ws_e)H_e \subseteq (1 - ws_e)C \subseteq \bigcup_{f \in \Pi \setminus \{e\}} (1 - ws_e)H_f = \bigcup_{f \in \Pi \setminus \{e\}} (1 - ws_e s_f)H_f$. При этом можно ограничиться теми $f \in \Pi \setminus \{e\}$, для которых $ws_e s_f \in W_{\text{reg}}$ и $\text{codim}((1 - w)H_e \cap (1 - ws_e s_f)H_f) = 1$. Так как конусы $(1 - w)H_e$ и $C_{w'}$ имеют пересечение коразмерности 1, то найдется вектор $f \in \Pi$ такой, что $w' = ws_e s_f$ и $\text{codim}((1 - w)H_e \cap (1 - w')H_f) = 1$. В силу леммы 3 имеем $0 < ((1 - w')\pi_f, v_e) = ((1 - ws_e s_f)\pi_f, v_e) = (\pi_f - ws_e(\pi_f - f), v_e) = ((1 - ws_e)\pi_f, v_e) + (ws_e f, v_e) = (f, v_e)$.

Авторы благодарят Э. Б. Винберга за постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] J.-L. Waldspurger, *J. Lie Theory*, **17:3** (2007), 597–603. [2] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, гл. 4–6, Мир, М., 1972.

П. В. Биби́ков (P. V. Bibikov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Представлено Э. Б. Винбергом
Принято редколлегией
14.04.2009

В. С. Жгун (V. S. Zhgoon)
НИИ системных исследований РАН
E-mail: zhgoon@mail.ru