Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Герасимова, Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 4, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9293>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:00:25

Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода

О. В. Герасимова

ТЕОРЕМА. Пусть мера Хаара μ на компактной группе G такова, что $\mu(G) = 1$, а $\rho: G \rightarrow \text{End}_K V$ – непрерывное представление G в банаховом пространстве V над полем комплексных чисел K и линейный оператор $H_{[G,G]}^\rho$ определяется формулой

$$H_{[G,G]}^\rho \stackrel{\text{def}}{=} \iint_G \rho([g, h]) d\mu_g d\mu_h \quad ([g, h] \stackrel{\text{def}}{=} g^{-1}h^{-1}gh).$$

Тогда для любого n -мерного подпространства W , на котором $\rho(G)$ действует неприводимо,

$$H_{[G,G]}^\rho(w) = \frac{1}{n^2} \cdot w \quad (w \in W).$$

ВАЖНЫЙ ПРИМЕР. Пусть $\text{SU}(2, K)$ – группа унитарных (2×2) матриц над комплексным полем K с детерминантом, равным единице, V – линейное пространство всех функций $f: G \rightarrow K$, для которых $\|f\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_G |f(g)|^2 d\mu_g < \infty$, и представление $\rho: G \rightarrow \text{End}_K V$ группы G реализуется правыми сдвигами $\rho(h)f(g) \stackrel{\text{def}}{=} f(gh)$. Хорошо известно (см. [1]–[3]), что:

а) в V с точностью до эквивалентности функций реализуется гильбертово пространство относительно полуторалинейной формы $(f(g), h(g)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G f(g)\overline{h(g)} d\mu_g$;

б) для любого натурального n единственное с точностью до изоморфизма n -мерное представление группы G реализуется в V и имеет в V кратность, равную n ;

в) сумма всех конечномерных неприводимых подпространств из V плотна в V . Из теоремы заключаем, что в гильбертовом пространстве V имеется полный ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $H_{[G,G]}^\rho$. В частности, для любого натурального n кратность собственного значения $1/n^2$ равна n^2 . (См. для сравнения в книге [4] спектр оператора Шрёдингера для атома водорода.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для любого непрерывного представления $\rho: G \rightarrow \text{End}_K V$ компактной группы G в банаховом пространстве V над полем комплексных чисел K и любых $t, h \in G$ в пространстве непрерывных операторов $E(V)$ имеет место равенство

$$\int_G \rho(g^{-1}) * \rho(t^{-1} * h * t) * \rho(g) d\mu_g = \int_G \rho(g^{-1}) * \rho(h) * \rho(g) d\mu_g.$$

Обозначим через $\chi_\rho(h)$ правую часть этого равенства и продолжим по линейности отображения $\rho: G \rightarrow E(V)$, $\chi_\rho: G \rightarrow E(V)$ на любые формальные конечные линейные комбинации групповой алгебры $K[G]$. Тогда $\chi_\rho(a_1 * a_2) = \chi_\rho(a_2 * a_1)$ для всех $a_1, a_2 \in K[G]$. Ограничим операторы $\chi_\rho(K[G])$ на любое конечномерное инвариантное подпространство W , не содержащее нетривиальных инвариантных подпространств относительно действия $K[G]$. Тогда в силу непрерывности ρ и того, что интеграл является пределом конечных частичных сумм, имеем

$$\chi_\rho(h)|_W = \int_G \rho(g^{-1})|_W * \rho(h)|_W * \rho(g)|_W d\mu_g = \int_G \rho_W(g^{-1}) * \rho_W(h) * \rho_W(g) d\mu_g = \chi_{\rho_W}(h),$$

где непрерывное представление $\rho_W: G \rightarrow \text{End}_K W$ группы G в банаховом подпространстве W таково, что $\rho_W(h) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(h)|_W$ и $\chi_{\rho_W}(a_1 * a_2) = \chi_{\rho_W}(a_2 * a_1)$. Определим

отображение $\overline{\chi_{\rho_W}}: \text{End}_K W \rightarrow \text{End}_K W$, полагая для любого $a \in \text{End}_K W$

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \rho_W(g^{-1}) * a * \rho_W(g) d\mu_g.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого элемента $a \in \text{End}_K W$

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(a) = \frac{1}{n} \text{tr}(a) 1_W \quad (n = \dim_K W, \quad 1_W - \text{единица в } \text{End}_K W). \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\chi_{\rho_W}(d) = \overline{\chi_{\rho_W}}(\rho_W(d))$. Так как $\rho_W: K[G] \rightarrow \text{End}_K W$ является неприводимым представлением в конечномерном пространстве W и поле K алгебраически замкнуто, то по теореме плотности будем иметь $\rho_W(K[G]) = \text{End}_K W$ и $\overline{\chi_{\rho_W}}(d_1 * d_2) = \overline{\chi_{\rho_W}}(d_2 * d_1)$. Хорошо известно, что в конечномерном случае линейное подпространство линейных операторов с нулевым следом в $\text{End}_K W$ порождается коммутаторами $a_1 * a_2 - a_2 * a_1$ (a_1, a_2 пробегает $\text{End}_K W$). Но $\overline{\chi_{\rho_W}}$ на этом подпространстве коразмерности 1 принимает нулевое значение. Следовательно, образ $\overline{\chi_{\rho_W}}$ должен лежать в каком-то одномерном подпространстве. Прямое вычисление дает

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(1_W) = \int_G (\rho_W(g)^{-1}) * 1_W * \rho_W(g) d\mu_g = \int_G 1_W d\mu_g = 1_W.$$

Следовательно, обе части (1) принимают на $\text{End}_K W$ одинаковые значения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для произвольного базиса матричных единиц $\{E_{ij} \mid i, j = 1, \dots, n = \dim_K W\}$ и любого $a \in \text{End}_K W$

$$\overline{\chi_{\rho_W}}(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} * a * E_{ji}. \quad (2)$$

Но тогда, используя (2), получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} & \left(\int_G \rho(g^{-1}) \left(\int_G \rho(h^{-1}) \rho(g) \rho(h) d\mu_h \right) d\mu_g \right) \times w \\ &= \left(\int_G \rho_W(g^{-1}) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{ij} * \rho_W(g) * E_{ji} \right) d\mu_g \right) \times w \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\int_G \rho_W(g^{-1}) * E_{ij} * \rho_W(g) d\mu_g \right) * E_{ji} \right) \times w \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{n} \text{tr}(E_{ij}) 1_W \right) * E_{ji} \right) \times w = \frac{1}{n^2} \cdot 1_W \times w = \frac{1}{n^2} \cdot w. \end{aligned}$$

Эти аргументы справедливы и при другом порядке интегрирования и приводят к тому же ответу. Теорема полностью доказана.

Список литературы

- [1] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, 4-е изд., Наука, М., 1984. [2] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970; англ. пер.: D. P. Zelobenko, *Compact Lie groups and their representations*, Transl. Math. Monogr., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973. [3] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, 2-е изд., Наука, М., 1968; англ. пер. 1-го изд.: M. A. Naimark, *Normed rings*, Noordhoff, Groningen, 1964. [4] Г. Вейль, *Теория групп и квантовая механика*, Наука, М., 1974; пер. с нем.: H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Hirzel, Leipzig, 1931.

О. В. Герасимова (O. V. Gerasimova)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ynona_olga@rambler.ru

Представлено А. В. Михалёвым

Принято редколлегией

14.04.2009