Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Глазырин, А. С. Тарасов, Анти-Дюрер гипотеза
для невыпуклых многогранников, *УМН*, 2009, том 64,
выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:25:27

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Анти-Дюрер гипотеза для невыпуклых многогранников

А. А. Глазырин, А. С. Тарасов

Существует гипотеза, первое упоминание которой принято связывать с именем Альбрехта Дюрера: для любого выпуклого многогранника найдется реберная развертка из одного многоугольника. В 1999 г. А. С. Тарасовым [1] был найден невыпуклый многогранник с выпуклыми гранями, развертка которого содержит не менее двух компонент. В 2006 г. Н. П. Долбилиным была сформулирована так называемая “анти-Дюрер” гипотеза, заключающаяся в том, что для любого N существует выпуклый многогранник, реберная развертка которого должна состоять как минимум из N компонент. Эта гипотеза очевидно верна для класса многогранников с невыпуклыми гранями – в качестве примера можно взять пирамиду, построенную на n -конечной звезде. В этой работе доказывается аналог “анти-Дюрер” гипотезы для класса невыпуклых многогранников с выпуклыми гранями.

Разверткой многогранника будем называть такую совокупность многоугольников с указанием правила склеивания, что в результате склеивания получается поверхность многогранника с точки зрения внутренней метрики (более подробно см. в [2]). *Реберной* назовем такую развертку, в которой стороны многоугольников целиком составлены из ребер многогранника. Связный подграф H планарного графа G – *разрезание*, если в каждой вершине графа G сходится не менее двух ребер из H .

Обозначим через T фрагмент Татта – граф, на котором строится контрпример Татта [3] (рис. 1). Фрагмент T обладает следующим свойством – не существует гамильтонова пути между вершинами B и C .

Рис. 1. Фрагмент Татта, T_6 и T_3

Построим с помощью этого фрагмента граф T_N , состоящий из N фрагментов Татта, в которых последовательно правая боковая вершина C_i соединена ребром с левой

Первый автор поддержан грантом РФФИ 08-01-91202-ЯФ-а; второй автор поддержан грантом РФФИ 08-01-00565-а.

боковой вершиной следующего фрагмента B_{i+1} , а все верхние вершины A_i соединены с вершиной O .

Следующая теорема в некотором смысле обобщает теорему Татта.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $N > 3$ в планарном трехсвязном графе T_N число граней любого разрезания не менее $N/3 + 1$.*

Далее в качестве нашего примера мы будем использовать многогранник, реберный граф которого является графом T_N . На некоторых его вершинах мы построим так называемые шипы. Опишем построение шипа.

Пусть V – простая вершина выпуклого многогранника P с суммой подходящих плоских углов $> \pi$ (“хорошая” вершина), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – плоские углы при вершине P . Положим $\beta = \max\{\pi/2 - \alpha/8, \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)/2\}$, где $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, и пусть d – длина минимального ребра многогранника P . Выберем $r < (d/4) \sin(\alpha/2)$.

Возьмем на ребрах, выходящих из V , точки V_1, V_2, V_3 так, чтобы $VV_1 = VV_2 = VV_3 = r$. Отрежем вершину вместе с треугольной пирамидой $VV_1V_2V_3$. Построим шип – такую пирамиду с основанием $V_1V_2V_3$ и вершиной V' , что проекция V' на плоскость $V_1V_2V_3$ лежит внутри основания, расстояния $V'V_i$ больше $2r$ и плоские углы боковых граней пирамиды при основании больше β .

Боковые стороны шипа и смежные с ними грани многогранника (“большие” грани) образуют многогранник с краем P_V (см. [2]). Для многогранника P_V выполняется следующая лемма.

ЛЕММА. 1) *Две “большие” грани многогранника P_V , попавшие в одну компоненту реберной развертки P_V , либо являются соседними в этой компоненте, либо соединяются через третью “большую” грань.*

2) *Число компонент реберной развертки многогранника P_V строго больше 1.*

Пусть Q_N – выпуклый многогранник, реберный остов которого изоморфен графу T_N . Такой многогранник существует по теореме Штейница [4]. Построим на каждой “хорошей” вершине многогранника Q_N по шипу. Пусть Q'_N – полученный многогранник.

ТЕОРЕМА 2. *Реберная развертка многогранника Q'_N имеет не меньше $N/3 - 4$ компонент.*

ПЛАН ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. 1) Для графа T_N рассмотрим подграф H , соответствующий развертке многогранника Q'_N .

2) Оценим число компонент развертки снизу величиной $T_1 + T_2 - 5$, где T_1 – число граней связного планарного графа H , а T_2 – число его висячих вершин.

3) Построим из графа H разрезание H' графа T_N с числом граней не более $T_1 + T_2$. Воспользуемся обобщением теоремы Татта.

Список литературы

- [1] А. С. Тарасов, УМН, 54:3 (1999), 185–186; англ. пер.: A. S. Tarasov, *Russian Math. Surveys*, 54:3 (1999), 656–657. [2] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, ГИТТЛ, М., 1950. [3] W. T. Tutte, *J. London Math. Soc.*, 21 (1946), 98–101. [4] E. Steinitz, H. Rademacher, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluß der Elemente der Topologie*, Grundlehren Math. Wiss., 41, Springer-Verlag, Berlin, 1934.

А. А. Глазырин (A. A. Glazyrin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: phat@zmail.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
02.04.2009

А. С. Тарасов (A. S. Tarasov)
Институт системного анализа РАН
E-mail: tarasov@isa.ru