Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зыкин, Асимптотические свойства дзета-функции Дедекинда в семействах числовых полей, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 6, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9296>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:11:34

Асимптотические свойства дзета-функции Дедекинда в семействах числовых полей

А. И. Зыкин

Нашей отправной точкой является классическая теорема Брауэра–Зигеля для числовых полей, доказанная Р. Брауэром в [1]. Она утверждает, что если K пробегает последовательность числовых полей, нормальных над $\mathbb{Q}$ и таких, что $n_K/\log |D_K| \rightarrow 0$, то $\log(h_K R_K)/\log \sqrt{|D_K|} \rightarrow 1$. Здесь D_K , h_K и R_K – дискриминант, число классов и регулятор поля K соответственно.

Эта теорема была обобщена М. А. Цфасманом и С. Влэдуцем в [2] на случай, когда условие $n_K/\log |D_K| \rightarrow 0$ не выполнено. Для того чтобы сформулировать этот результат, нам понадобится несколько обозначений. Для конечного расширения $K/\mathbb{Q}$ положим $\Phi_q(K)$ – число простых идеалов кольца целых $\mathcal{O}_K$ с нормой q , кроме того, обозначим $\Phi_{\mathbb{R}}(K)$ и $\Phi_{\mathbb{C}}(K)$ число вещественных и комплексных вложений K в $\mathbb{C}$ соответственно. Обозначим через $g_K = \log \sqrt{|D_K|}$ род поля K (по аналогии со случаем кривых над конечным полем). Расширение $K/\mathbb{Q}$ называется почти нормальным, если можно найти промежуточные расширения $K = K_n \supseteq K_{n-1} \supseteq \dots \supseteq K_1 \supseteq K_0 = \mathbb{Q}$ такие, что K_i/K_{i-1} нормально для всех i .

Рассмотрим семейство попарно неизоморфных числовых полей $\{K_i\}$. Определим $\phi_\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_\alpha(K_i)/g_{K_i}$, $\alpha \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, 2, 3, 4, 5, 7, 9, \dots\}$. Если пределы ϕ_α существуют, то семейство называется асимптотически точным. Оно называется асимптотически хорошим, если существует $\phi_\alpha \neq 0$, и асимптотически плохим в противном случае.

Несложно проверить, что условие $n_K/\log |D_K| \rightarrow 0$ из теоремы Брауэра–Зигеля эквивалентно тому, что соответствующее семейство асимптотически плохое. Теперь мы можем сформулировать теорему Цфасмана–Влэдуца, доказанную в работе [2] в асимптотически хорошем случае и в работе [3] в асимптотически плохом.

ТЕОРЕМА 1. *Для асимптотически точного семейства $\{K_i\}$ имеет место формула:*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(h_{K_i} R_{K_i})}{g_{K_i}} = 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log(2\pi) \quad (1)$$

при условии, что все K_i почти нормальны над $\mathbb{Q}$ или выполнена обобщенная гипотеза Римана (GRH) для дзета-функций Дедекинда полей K_i .

Определим предельную дзета-функцию асимптотически точного семейства числовых полей:

$$\zeta_{\{K_i\}}(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\phi_q}.$$

Теорема С из [2] дает нам абсолютную сходимость бесконечного произведения при $\operatorname{Re} s \geq 1$. Если $\varkappa_K = \operatorname{Res}_{s=1} \zeta_K(s)$ – вычет дзета-функции Дедекинда поля K в точке $s = 1$, то равенство (1) можно переписать в виде $\lim_{i \rightarrow \infty} \log \varkappa_{K_i}/g_{K_i} = \log \zeta_{\{K_i\}}(1)$. Кроме того, в работе [2] доказано, что в области $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место формула $\lim_{i \rightarrow \infty} \log \zeta_{K_i}(s)/g_{K_i} = \log \zeta_{\{K_i\}}(s)$.

Основной нашей целью является изучение вопроса о наличии подобного равенства при $\operatorname{Re} s < 1$. Уже случай $s = 1$ по сути эквивалентен теореме Брауэра–Зигеля и имеющимися на данный момент методами не может быть рассмотрен в полной общности без предположения GRH. В дальнейшем мы предполагаем, что для всех полей, которые мы рассматриваем, для соответствующей дзета-функции Дедекинда выполнена гипотеза Римана.

В предположении GRH в [2; следствие из теоремы A] доказано, что бесконечное произведение для $\zeta_{\{K_i\}}(s)$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s \geq 1/2$. Теперь сформулируем наши основные результаты.

ТЕОРЕМА 2. *В предположении GRH при $\operatorname{Re} s > 1/2$ для асимптотически точного семейства $\{K_i\}$ имеет место равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \log \zeta_{K_i}(s)/g_{K_i} = \log \zeta_{\{K_i\}}(s)$.*

Доказательство теоремы использует оценки логарифмической производной дзета-функций в критической полосе совместно с теоремой Витали о предельном переходе в последовательности голоморфных функций.

При $s = 1/2$ наш результат несколько слабее. Мы доказываем следующую верхнюю оценку.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ρ_{K_i} – первый ненулевой коэффициент в разложении $\zeta_{K_i}(s)$ в ряд Тейлора в точке $s = 1/2$, т. е. $\zeta_{K_i}(s) = \rho_{K_i}(s - 1/2)^{r_{K_i}} + o((s - 1/2)^{r_{K_i}})$. Тогда, в предположении GRH, для асимптотически точного семейства $\{K_i\}$ выполнено неравенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \log |\rho_{K_i}|/g_{K_i} \leq \log \zeta_{\{K_i\}}(1/2)$.*

Для доказательства теоремы 3 мы используем методы, с помощью которых получается верхняя оценка в равенстве из теоремы 1, а также информацию о предельном распределении нулей дзета-функций на критической прямой в семействах числовых полей. Вопрос о наличии равенства в утверждении теоремы 3 весьма тонок и связан с низко лежащими нулями дзета-функций, т. е. с нулями $\zeta_K(s)$, имеющими маленькую мнимую часть по сравнению с g_K . Мы полагаем, что равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \log |\rho_{K_i}|/g_{K_i} = \log \zeta_{\{K_i\}}(1/2)$ может быть неверно для некоторых семейств $\{K_i\}$, ввиду “случайного” поведения низко лежащих нулей дзета-функций. Однако оно может быть верным для “большинства” семейств. Более подробное обсуждение вопроса, хотя и в несколько другой ситуации (низко лежащие нули L -функций, ассоциированных с модулярными формами на $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$), можно найти в работе [4].

Сформулируем одно следствие из теоремы 2. Напомним, что постоянная Эйлера–Кронекера числового поля K определяется следующим образом $\gamma_K = c_0(K)/c_{-1}(K)$, где $\zeta_K(s) = c_{-1}(K)(s - 1)^{-1} + c_0(K) + O(s - 1)$. Я. Ихара в работе [5] получил асимптотическую формулу для γ в семействах кривых над конечными полями. Мы же имеем следующий результат, вытекающий из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. *В предположении GRH для асимптотически точного семейства числовых полей $\{K_i\}$ имеет место формула $\lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{K_i}/g_{K_i} = -\sum_q \phi_q \log q/(q - 1)$.*

Это утверждение сформулировано в [6] без предположения GRH. К сожалению, доказательство, данное там, содержит лакуны. Оно использует необоснованную перестановку предельных переходов в суммировании по степеням простых чисел и в пределе по семейству $\{K_i\}$. Таким образом, вопрос о наличии равенства без предположения GRH остается открытым.

Я выражаю благодарность моему научному руководителю М. А. Цфасману за постоянное внимание к работе, а также М. Балазару за ценные советы и идеи.

Список литературы

- [1] R. Brauer, *Amer. J. Math.*, **69:2** (1947), 243–250. [2] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduț, *Mosc. Math. J.*, **2:2** (2002), 329–402. [3] A. Zykin, *Mosc. Math. J.*, **5:4** (2005), 961–968. [4] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **91** (2000), 55–131. [5] Y. Ihara, *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., **253**, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 407–451. [6] M. A. Tsfasman, *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., **253**, Birkhäuser, Boston, MA, 2006, 453–458.

А. И. Зыкин (A. I. Zykin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Независимый московский университет
E-mail: alzykin@gmail.com

Представлено А. Б. Сосинским
Принято редколлегией
05.04.2009