Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, К вопросу об определении хаоса, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 4, 125–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:56:27

УДК 517.957

К вопросу об определении хаоса

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

В работе дается новое определение хаотического инвариантного множества для непрерывного полупотока в метрическом пространстве. Предлагаемое нами определение обобщает известное определение Девани и позволяет учесть одну специфическую особенность, возникающую в некомпактном и бесконечномерном случае, — так называемый турбулентный хаос.

Статья состоит из двух разделов. В разделе 1 приводится ряд известных фактов, относящихся к хаотической динамике, а также формулируются новые определения и результаты. В разделе 2 содержательность нашего определения хаоса иллюстрируется на конкретном примере. А именно, исследуется некоторая бесконечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая аттрактор, хаотический в смысле нового определения, но не являющийся таковым по Девани или Кнудсену.

Библиография: 65 названий.

Ключевые слова: аттрактор, хаос, топологическая транзитивность, перемешивание, инвариантная мера, гиперболичность.

СОДЕРЖАНИЕ

1. О некоторых базовых определениях и понятиях, связанных с хаотической динамикой.....	126
1.1. Хаотичность по Девани и Кнудсену	126
1.2. Новое определение хаоса.....	127
1.3. Об объеме понятия “странный аттрактор”	131
1.4. Примеры аттракторов, состоящих из неустойчивых по Ляпунову периодических или квазипериодических траекторий.....	134
1.5. Эргодический и энтропийный подходы к определению сложности	139
2. Базовая модель турбулентного хаоса.....	145
2.1. Общие свойства рассматриваемой системы	145
2.2. Структура турбулентного аттрактора	148
2.3. Регуляризация турбулентного хаоса	162
2.4. О некоторых приложениях.....	167
Список литературы.....	169

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-01004) и Целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП.2.1.1.630).

© А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, 2009

1. О некоторых базовых определениях и понятиях, связанных с хаотической динамикой

1.1. Хаотичность по Девани и Кнудсену. Начнем с соответствующих определений. Через (X, ρ) обозначим полное метрическое пространство с метрикой ρ и будем считать, что в X задан непрерывный полупоток φ^t . Это означает, что имеется семейство отображений $\varphi^t: X \rightarrow X$, $t \geq 0$, со свойствами: $\varphi^0 = I$ (I – тождественный оператор), $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ для любых $t, s \geq 0$; функция $\varphi^t(x)$ непрерывна по совокупности переменных $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times X$. Предположим, далее, что существует непустое замкнутое и ограниченное подмножество $A \subset X$, инвариантное для полупотока φ^t , т. е. $\varphi^t(A) \subset A$ при всех $t \geq 0$. Наиболее популярным в настоящее время является определение хаоса по Девани [1], которое звучит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Полупоток φ^t называется хаотическим по Девани на инвариантном множестве A при выполнении условий:

1.1 а) φ^t топологически транзитивен, т. е. для любых двух непустых множеств $U, V \subset A$, открытых в топологии пространства (A, ρ) , существует такое $t_0 = t_0(U, V) \geq 0$, что $\varphi^{t_0}(U) \cap V \neq \emptyset$;

1.1 б) периодические траектории полупотока $\varphi^t|_A$ плотны в A (напомним, что периодической называется траектория $\gamma(x_0) = \{x = \varphi^t(x_0) : t \geq 0\}$, для которой $x_0 = \varphi^T(x_0)$ при некотором $T > 0$);

1.1 в) справедливо свойство существенной зависимости от начальных условий: найдется такое универсальное $\Delta > 0$ (постоянная неустойчивости), что для любых $x \in A$, $\delta > 0$ выполняется неравенство $\rho(\varphi^{t_0}(x), \varphi^{t_0}(y)) \geq \Delta$ при некотором $y \in A$ таком, что $\rho(x, y) < \delta$, и некотором $t_0 \geq 0$.

Вслед за работой [1] довольно быстро появились статьи [2]–[5], в которых это определение подверглось всестороннему анализу. В частности, в [2] было доказано, что из условий 1.1 а) и 1.1 б) вытекает 1.1 в) (в случае, когда A не состоит из одной периодической траектории), а в [3] установлено, что ни транзитивность, ни плотность периодических траекторий не выводимы из оставшихся двух условий. Далее, авторы работы [4] показали, что в случае полупотока с дискретным временем, порожденного некоторым непрерывным отображением $f: J \rightarrow J$ интервала J (конечного или бесконечного), свойство транзитивности эквивалентно хаотичности по Девани. И наконец, в [5] было замечено, что условия 1.1 а) и 1.1 б) можно объединить. А именно, эти условия эквивалентны следующему требованию: для любых двух непустых множеств $U, V \subset A$, открытых в топологии пространства (A, ρ) , существует периодическая траектория полупотока $\varphi^t|_A$, имеющая с каждым из них непустое пересечение.

Отдельного упоминания заслуживает статья [6], в которой предложено следующее определение хаоса, обобщающее определение 1.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Полупоток φ^t называется хаотическим по Кнудсену на инвариантном множестве A при выполнении требований:

1.2 а) имеет место существенная зависимость от начальных условий;

1.2 б) найдется такая траектория $\gamma(x_0) = \{x = \varphi^t(x_0) : t \geq 0\}$ с начальным условием $x_0 \in A$, что замыкание $\gamma(x_0)$ совпадает с A .

Причина, по которой уместно обобщить определение Девани, состоит в том, что на самом деле оно является слишком жестким. Действительно, фундаментальное свойство хаоса – существенная зависимость от начальной точки – оказалось следствием первых двух условий. Поэтому желательно иметь другое определение хаоса, для которого условия 1.1а) и 1.1б) (в ряде случаев сравнительно легко проверяемые) были бы достаточными. Одним из таких определений как раз и служит определение 1.2. Действительно, при дополнении предположении о сепарабельности пространства (A, ρ) из свойства топологической транзитивности вытекает существование всюду плотной в A траектории (см. [7]). Таким образом, в этом случае хаотичность по Девани влечет хаотичность по Кнудсену.

Недостатком определения 1.2 является, на наш взгляд, его излишняя широта. В самом деле, в рамках данного определения хаотические инвариантные множества могут существовать даже у потоков на двумерном торе. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно взять известный пример Пуанкаре (см. [8; гл. IV, § 5, с. 314–316]) и заметить, что сужение предложенного им потока на минимальное инвариантное множество будет хаотическим по Кнудсену. Следовательно, проблема поиска нового определения хаоса, которое по возможности не допускало бы подобных артефактов, остается актуальной. Один из вариантов ее решения предлагается в настоящей работе. Точнее говоря, ниже дается определение хаотического инвариантного множества, которое не только обобщает определение Девани, но и позволяет учесть некоторые специфические особенности, возникающие в случае некомпактного инвариантного множества A .

1.2. Новое определение хаоса. В настоящее время нет единого и устраивающего всех определения хаоса. Общепринятым является лишь тот факт, что основной характеристикой хаотической динамики должна быть существенная зависимость от начальных условий. Действительно, в обыденном сознании указанное свойство стало синонимом хаоса и получило даже специальное название – эффект бабочки. Но, как это ни парадоксально звучит на первый взгляд, одной только существенной зависимости недостаточно для того, чтобы поток был хаотическим. Такого рода примеры хорошо известны (два из них разбираются в п. 1.4). Эти примеры наводят на мысль, что помимо неустойчивости всех траекторий следует требовать наличия в инвариантном множестве A некоторого количества движений, которые уместно называть сложными.

Для того чтобы придать термину “сложность” конкретный смысл, напомним сначала известное понятие рекуррентной траектории по Биркгофу (см., например, [8]). А именно, траектория $\gamma(x_0) \subset A$ полупотока φ^t называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T = T(\varepsilon) > 0$, что при каждом $t_0 \geq 0$ справедливо включение $\gamma(x_0) \subset O_\varepsilon(\gamma_{[t_0, t_0+T]}(x_0))$. Здесь $\gamma_{[t_0, t_0+T]}(x_0)$ – отрезок траектории $\gamma(x_0)$, отвечающий значениям $t \in [t_0, t_0+T]$, а символом $O_\varepsilon(*)$ обозначена ε -окрестность соответствующего множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Траекторию $\gamma(x_0)$ полупотока φ^t , принадлежащую инвариантному множеству A , будем называть сложной, если для нее выполняется одна из следующих двух альтернатив:

1.3 а) ω -предельное множество $\omega(x_0)$ этой траектории пусто;

1.3 б) справедливо равенство $\omega(x_0) = A$, но сама траектория $\gamma(x_0)$ не является рекуррентной.

Для оценки степени содержательности этого определения заметим, что отнюдь не всякая траектория, не обладающая свойством рекуррентности, оказывается сложной. Например, ограниченная траектория $\gamma(x_0)$ автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости, наматывающаяся при $t \rightarrow +\infty$ на некоторый сепаратрисный контур или предельный цикл Γ , очевидным образом нерекуррентна. Но она не будет также и сложной. Действительно, из определения 1.3 с необходимостью следует, что для сложной траектории, принадлежащей компактному множеству, должно выполняться включение $\gamma(x_0) \subset \omega(x_0)$. В нашем же случае $\omega(x_0) = \Gamma$, а значит, $\gamma(x_0) \cap \omega(x_0) = \emptyset$.

Перейдем теперь непосредственно к новому определению хаоса, которое формулируется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Полупоток φ^t будем называть хаотическим на инвариантном множестве A при выполнении ограничений:

1.4 а) $\varphi^t|_A$ обладает свойством существенной зависимости от начальных условий;

1.4 б) найдется такое подмножество $A_0 \subset A$, $\bar{A}_0 = A$, что любая траектория $\gamma(x_0)$ с начальным условием $x_0 \in A_0$ является сложной.

Следует особо подчеркнуть, что требование ограниченности инвариантного множества A , оговоренное нами в начале п. 1.1, в определениях 1.3, 1.4 отбросить, вообще говоря, нельзя. Действительно, при отказе от него легко строится соответствующий артефакт. Например, положим $A = \mathbb{R}^2$, а в качестве φ^t возьмем полупоток, порождаемый решениями линейной системы $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$. Данный полупоток обладает, очевидно, свойством существенной зависимости от начальных условий и ω -предельное множество каждой его ненулевой траектории пусто. Тем самым, если забыть об условии ограниченности A , то φ^t оказывается хаотическим в смысле нашего определения. Ясно, однако, что такая ситуация из рассмотрения должна быть исключена.

Остановимся на естественно возникающем вопросе о связи между приведенным определением хаоса и определением 1.1.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что пространство (A, ρ) сепарабельно. Тогда из хаотичности полупотока $\varphi^t|_A$ по Девани вытекает его хаотичность в смысле определения 1.4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеет место хаотичность по Девани. Тогда полупоток $\varphi^t|_A$ топологически транзитивен. Далее, поскольку пространство (A, ρ) предполагается сепарабельным, то, как уже отмечалось выше, отсюда следует существование в A плотной траектории $\gamma(x_0)$. Покажем, что именно эта траектория и является сложной.

Заметим в первую очередь, что упомянутая траектория не будет рекуррентной. Действительно, в противном случае в силу известной теоремы Биркгофа [8] имеем $\gamma(x_0) = A$, причем A – компактное минимальное инвариантное

множество полупотока φ^t . Но, с другой стороны, это множество не может быть таковым, поскольку согласно условию 1.16) в нем плотны периодические траектории. Тем самым, для проверки сложности траектории $\gamma(x_0)$ достаточно убедиться в справедливости равенства $\omega(x_0) = A$.

Предполагая противное, рассмотрим сначала случай $\omega(x_0) = \emptyset$, означающий, что инвариантное множество A состоит из одной траектории $\gamma(x_0)$. Но тогда в силу условия 1.16) данная траектория с необходимостью периодическая. А это очевидным образом противоречит как условию 1.1в), так и предположению о пустоте $\omega(x_0)$.

Обратимся теперь к случаю, когда $\omega(x_0)$ является истинным подмножеством A . Тогда $A = \overline{\gamma(x_0)} = \gamma(x_0) \cup \omega(x_0)$, но при этом $x_0 \notin \omega(x_0)$, а значит, справедливо неравенство $\delta_0 = \rho(x_0, \omega(x_0)) > 0$. Заметим также, что в рассматриваемой ситуации все периодические траектории полупотока $\varphi^t|_A$ заведомо лежат в множестве $\omega(x_0)$. Следовательно, они не могут быть плотны в A , так как каждая из них находится на расстоянии, не меньшем δ_0 , от точки x_0 . Таким образом, вступаем в противоречие с условием 1.16).

Для завершения доказательства теоремы 1.1 остается в качестве множества A_0 , о котором говорится в условии 1.46), взять $A_0 = \gamma(x_0)$ и заметить, что все траектории с начальными условиями из этого множества относятся к сложным.

Остановимся теперь на связи между определениями 1.2 и 1.4. Ясно, что из хаотичности по Кнудсену не вытекает хаотичность в смысле определения 1.4, о чем свидетельствует уже упоминавшийся выше пример Пуанкаре. Однако ситуацию можно несколько подправить, если ввести понятие так называемой усиленной хаотичности по Кнудсену.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Будем говорить, что полупоток φ^t усиленно хаотичен по Кнудсену на инвариантном множестве A , если по-прежнему выполняется свойство существенной зависимости от начальных условий и, кроме того, найдется нерекуррентная траектория $\gamma(x_0) \subset A$ такая, что $\overline{\gamma(x_0)} = A$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что при каждом фиксированном $x_0 \in A$ функция $\varphi^t(x_0)$ равномерно непрерывна по $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда из усиленной хаотичности полупотока $\varphi^t|_A$ по Кнудсену вытекает его хаотичность в смысле определения 1.4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем плотную в A нерекуррентную траекторию $\gamma(x_0)$, о которой говорится в определении 1.5, и покажем, что она является сложной. Как и при обосновании теоремы 1.1, для этого достаточно убедиться в справедливости равенства $\omega(x_0) = A$.

В предположении противного при всех достаточно малых $\delta > 0$ в любой δ -окрестности начальной точки x_0 (в пространстве (A, ρ)) лежат лишь точки кривой $\gamma(x_0)$ вида $\varphi^{t_0}(x_0)$, где $0 \leq t_0 \leq \bar{t}(\delta)$, причем $\bar{t}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$. Действительно, при $\omega(x_0) = \emptyset$ данный факт очевиден, так как в этом случае $A = \gamma(x_0)$. Если же $\omega(x_0)$ – истинное подмножество A , то, как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1.1, имеем $A = \gamma(x_0) \cup \omega(x_0)$ и $\rho(x_0, \omega(x_0)) > 0$.

Из описанной структуры окрестностей точки x_0 и из свойства равномерной непрерывности полупотока φ^t по t заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и при всех $\varphi^{t_0}(x_0) \in O_\delta(x_0)$ справедливо неравенство

$$\rho(\varphi^t(x_0), \varphi^t(\varphi^{t_0}(x_0))) = \rho(\varphi^t(x_0), \varphi^{t+t_0}(x_0)) < \varepsilon.$$

Тем самым, в точке x_0 нарушается свойство существенной зависимости от начальных данных, что противоречит соответствующему условию из определения 1.5. Теорема 1.2 доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что в случае компактного множества A верно и обратное утверждение: хаотичность полупотока $\varphi^t|_A$ в смысле определения 1.4 влечет его усиленную хаотичность по Кнудсену. В самом деле, из компактности A для любой сложной траектории $\gamma(x_0) \subset A$ вытекает равенство $\omega(x_0) = A$, а значит, автоматически $\gamma(x_0)$ нерекуррентна и $\overline{\gamma(x_0)} = A$. Добавим еще, что для полупотока, порождаемого в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ траекториями некоторой автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

с гладкой правой частью f , выполняются сразу оба требования – и равномерная непрерывность по t , и компактность инвариантного множества. Поэтому для таких полупотоков определения 1.4 и 1.5 оказываются эквивалентными.

Подведем некоторый итог. Как установлено выше, при определенных условиях из хаотичности по Девани или из усиленной хаотичности по Кнудсену вытекает хаотичность в смысле определения 1.4. Следует также отметить, что в упомянутом чуть выше конечномерном случае для любой сложной траектории из A всегда справедливо равенство $\omega(x_0) = A$. В связи с этим уместен вопрос: существует ли полупоток $\varphi^t|_A$, хаотический в смысле определения 1.4 и такой, что для некоторого плотного семейства его сложных траекторий реализуется альтернатива 1.3а) из определения 1.3? Положительный ответ на него дается в разделе 2 и фактически означает, что в бесконечномерном и некомпактном случае возможен новый тип хаоса, не сводящийся к хаотичности по Девани или Кнудсену. Такой тип хаоса в дальнейшем будем называть турбулентным.

Для того чтобы проиллюстрировать основные свойства турбулентного хаоса, обозначим через l банахово пространство бесконечномерных векторов

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) : \eta_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \tag{1.2}$$

с нормой

$$\|\eta\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n| < \infty, \tag{1.3}$$

а в качестве полного метрического пространства (X, ρ) возьмем конус $K \subset l$, состоящий из векторов (1.2) с неотрицательными координатами. Наш основной результат – следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. В пространстве K существует непрерывный полупоток φ^t , имеющий замкнутое, ограниченное и некомпактное инвариантное множество A со свойствами:

а) полупоток $\varphi^t|_A$ хаотичен в смысле определения 1.4, но не будет таковым по Девани и Кнудсену (для него нарушаются условия 1.1 а), 1.1 б), 1.2 б) из соответствующих определений);

б) A является аттрактором, т.е. существует такое открытое множество $\mathcal{U} \subset K$ (поглощающая окрестность), что $\varphi^t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ при всех $t > 0$ и $\bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}) = A$;

в) A – глобальный аттрактор в том смысле, что для любого замкнутого и ограниченного множества $B \subset K$, не содержащего вектор $\eta = 0$, найдется такое $t_0 = t_0(B) > 0$, что $\varphi^t(B) \subset \mathcal{U}$ при всех $t \geq t_0$;

г) хаусдорфова размерность множества A равна бесконечности;

д) для любой сложной траектории из A реализуется альтернатива 1.3 а) из определения 1.3, т.е. A заведомо является турбулентным хаотическим множеством;

е) множество A связно.

В процессе доказательства этой теоремы, которое излагается в разделе 2, будет предъявлен конкретный полупоток, порожденный некоторой счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве l и обладающий аттрактором с перечисленными выше свойствами.

1.3. Об объеме понятия “странный аттрактор”. Термин “странный аттрактор”, имеющий непосредственное отношение к интересующей нас проблеме определения хаоса, был введен в употребление Д. Рюэлем и Ф. Такенсом в статье [9]. В дальнейшем он приобрел весьма широкую популярность среди специалистов, так или иначе связанных с нелинейной динамикой. Однако, как отмечено в обзоре [10], в настоящее время понятие “странный аттрактор” является скорее парадигмой, чем строго определенным математическим объектом.

Действительно, первоначально под странным аттрактором понималось притягивающее инвариантное множество, отличное от конечного объединения гладких подмногообразий фазового пространства [9]. Но впоследствии стало ясно, что геометрическая сложность – это лишь одна из возможных характеристик хаотической динамики, причем не самая главная. Были обнаружены так называемые странные нехаотические аттракторы [11], имеющие фрактальную геометрическую структуру, но не обладающие основным свойством хаоса – существенной зависимостью от начальных условий.

Последующая эволюция понятия “странный аттрактор” связана с переходом от геометрических характеристик к динамическим. Так, например, в работах [12]–[15] странным считается аттрактор, для которого выполняются свойства топологической транзитивности и существенной зависимости от начальных условий (в конечномерном случае это эквивалентно хаотичности по Кнудсену). Далее, в [16] странным назван аттрактор, содержащий некоторую трансверсальную гомоклиническую орбиту. И наконец, следует упомянуть общепринятый в физической теории колебаний эвристический критерий наличия

странного аттрактора, заключающийся в положительности старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}$ этого аттрактора (см. [17]–[20]). В последнем случае уместно говорить о так называемом физическом хаосе.

Интересно отметить, что в конечномерной ситуации, т.е. для системы вида (1.1), физический хаос допускает аккуратное математическое описание. Действительно, в силу известной эргодической теоремы Оселедца [21] показатель $\lambda_{\max}$ одинаков для почти всех точек x_0 из аттрактора A по некоторой заданной на нем естественной, или колмогоровской, эргодической инвариантной мере. Существование же последней приходится постулировать.

Для описания соответствующего ограничения сделаем следующее. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – поглощающая окрестность аттрактора A (по поводу определения этой окрестности см. утверждение 6) из теоремы 1.3). Далее, зафиксируем произвольно число $T > 0$ и рассмотрим борелевскую меру $\mu_{x_0, T}$ в $\mathbb{R}^n$, определенную по следующему правилу: для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ полагаем

$$\mu_{x_0, T}(B) = \text{mes}\{t : 0 \leq t \leq T, \varphi^t(x_0) \in B\}/T, \quad (1.4)$$

где $\text{mes}(\cdot)$ – обычная мера Лебега, $\varphi^t(x_0)$ – траектория системы (1.1) с начальным условием x_0 при $t = 0$. Ясно, что (1.4) – относительная доля времени пребывания фазовой точки $\varphi^t(x_0)$ в B . Основное наше допущение заключается в том, что для любой фиксированной непрерывной функции $g: \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$ и для почти всех $x_0 \in \mathcal{U}$ (по мере Лебега) должно выполняться предельное равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{U}} g d\mu_{x_0, T} = \int_{\mathcal{U}} g d\mu, \quad (1.5)$$

где μ – некоторая не зависящая от x_0 эргодическая борелевская вероятностная мера. В этом случае μ и есть колмогоровская инвариантная мера на хаотическом аттракторе A .

Итак, проблема поиска подходящего определения странного аттрактора по-прежнему актуальна. По существу, она сводится к интересующей нас проблеме определения хаотического инвариантного множества. Действительно, мы всегда можем сказать, что аттрактор A полупотока φ^t является странным, если он хаотичен в том или ином смысле (по Девани, Кнудсену и т.д.). Однако, как будет ясно чуть ниже, такой подход излишне прямолинеен. В частности, в конечномерном случае наиболее удачным, на наш взгляд, является понятие странного аттрактора, которое формулируется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Компактный аттрактор A системы дифференциальных уравнений (1.1) будем называть странным при условии, что существует подмножество $\tilde{A} \subset A$, обладающее свойствами:

1.6 а) $\tilde{A}$ – вероятностный аттрактор [22], т.е. наименьшее замкнутое множество, содержащее ω -предельные множества траекторий системы (1.1) для почти всех (по мере Лебега) начальных условий из поглощающей окрестности $\mathcal{U}$;

1.6 б) множество $\tilde{A}$ представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся компактов $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m$, причем сужение полупотока φ^t на каждое из этих множеств усиленно хаотично по Кнудсену.

Следует отметить, что класс систем (1.1), имеющих такого типа аттракторы, заведомо не пуст. В самом деле, свойствами 1.6 а), 1.6 б) обладают, например, псевдогиперболические аттракторы [23]. Частным случаем последних являются так называемые аттракторы лоренцевского типа, достаточные условия существования которых в терминах оператора последования Пуанкаре приведены в [24] (см. также [10]). Заметим, далее, что для аттракторов лоренцевского типа $m = 1$, а полупоток $\varphi^t|_{\tilde{A}}$ хаотичен по Девани. Следовательно, он будет хаотическим и в смысле определения 1.5. Что же касается упомянутых выше достаточных условий существования таких аттракторов, то в трехмерном случае их реализуемость установлена в [25]. Добавим, наконец, что, как показано в [26], к псевдогиперболическим относится и аттрактор в классической системе Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy$$

при значениях параметров $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$.

Особо подчеркнем, что среди аттракторов лоренцевского типа существуют такие, для которых полупоток $\varphi^t|_{\tilde{A}}$ не является топологически транзитивным. Именно по этой причине в определении 1.6 мы требуем хаотичность φ^t не на всем аттракторе A , а лишь на более узких его частях $\tilde{A}_k$, $k = 1, \dots, m$.

Сформулированное выше определение странного аттрактора носит достаточно общий характер. Во всяком случае, мы стремились минимизировать ограничения, накладываемые на инвариантное множество A . Теперь же для сравнения попытаемся взглянуть на данную проблему с противоположной точки зрения. А именно, зададимся вопросом о том, какие максимальные требования можно предъявить к хаотическому аттрактору. Для этого нам понадобится известное понятие гиперболического инвариантного множества (см., например, [27], [28]).

Пусть имеется некоторое компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$, инвариантное для траекторий системы (1.1). Будем называть это множество гиперболическим при выполнении следующих ограничений. Во-первых, для каждого $x_0 \in A$ пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = E^+(x_0) \oplus E^-(x_0) \oplus E^0(x_0). \quad (1.6)$$

Здесь x_0 играет роль параметра, а $E^0(x_0)$ – одномерное подпространство, натянутое на вектор скорости $f(x_0)$ (считаем, естественно, что $f(x_0) \neq 0$ при всех $x_0 \in A$). Во-вторых, подпространства $E^\pm(x_0)$ из (1.6) обладают свойством инвариантности по отношению к линеаризации потока $x = \varphi^t(x_0)$, порождаемого системой (1.1) на множестве A . Это означает, что

$$E^\pm(t) = \mathcal{K}(t)E^\pm(0), \quad E^-(t) = \mathcal{K}(t)E^-(0) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

где $E^\pm(t) = E^\pm(x)|_{x=\varphi^t(x_0)}$, а через $\mathcal{K}(t)$, $\mathcal{K}(0) = I$, обозначена матрица Коши линейной системы

$$\dot{h} = B(t)h, \quad B(t) = f'_x(\varphi^t(x_0)). \quad (1.8)$$

В-третьих, найдутся такие универсальные положительные постоянные M_1, M_2, m_1, m_2 , что для любых двух векторов $h_+ \in E^+(0)$, $h_- \in E^-(0)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(t)h_-\| &\leq M_1 \exp(-m_1 t) \|h_-\| \quad \forall t \geq 0, \\ \|\mathcal{K}(t)h_+\| &\leq M_2 \exp(m_2 t) \|h_+\| \quad \forall t \leq 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Перейдем теперь к определению понятия “странный гиперболический аттрактор”, которое звучит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Инвариантное компактное множество A системы (1.1) называется гиперболическим странным аттрактором при выполнении условий:

1.7 а) A – аттрактор системы (1.1) (это означает, напомним, существование поглощающей окрестности $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \supset A$, со свойствами $\varphi^t(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$ при всех $t > 0$, $A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U})$);

1.7 б) A – гиперболическое инвариантное множество;

1.7 в) полупоток $\varphi^t|_A$ топологически транзитивен.

Из общих соображений ясно, что любое разумное определение хаоса должно включать гиперболические странные аттракторы. Наше определение 1.4 выдерживает этот тест. Действительно, из условия 1.7 а) заключаем, что A локально максимально, т.е. в окрестности $\mathcal{U}$ нет большего, чем A , множества, также инвариантного для потока φ^t при всех $t \in \mathbb{R}$. А отсюда и из требований 1.7 б), 1.7 в) вытекает свойство плотности в A периодических орбит (см. [27]). Тем самым, на гиперболическом странном аттракторе полупоток φ^t заведомо хаотичен по Девани, а значит, будет таковым и в смысле определений 1.4, 1.5 (см. теоремы 1.1, 1.2 и комментарии к ним).

Продолжая обсуждение определения 1.7, уместно вспомнить результат из [29] о существовании для гиперболического странного аттрактора A единственной инвариантной эргодической вероятностной меры μ (так называемой SRB-меры) с носителем A , для которой выполняется равенство (1.5). Далее, в силу уже упоминавшейся ранее теоремы Оселедца [21] старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max}$ системы в вариациях (1.8) одинаков для почти всех $x_0 \in A$ по мере μ , а из (1.7), (1.9) вытекает неравенство $\lambda_{\max} > 0$. Таким образом, аттрактор из определения 1.7 удовлетворяет критериям, предъявляемым к физическому хаосу.

В заключение скажем несколько слов о реализуемости гиперболических странных аттракторов в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Из приведенных в [30], [31] бифуркационных теорем и из содержащегося в [32] численного анализа следует, что гиперболические аттракторы типа соленоида Смейла–Вильямса могут наблюдаться в системах (1.1) при $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Что же касается трехмерных систем, то вопрос о существовании в них странных гиперболических аттракторов, по всей видимости, пока открыт.

1.4. Примеры аттракторов, состоящих из неустойчивых по Ляпунову периодических или квазипериодических траекторий. Как уже отмечалось выше, одного только свойства существенной зависимости от начальных условий, вообще говоря, недостаточно для хаотичности полупотока φ^t

на инвариантном множестве A . Ниже рассматривается ряд примеров, подтверждающих этот факт.

Наш основной пример – система обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$, имеющая вид

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad \dot{\mu} = g(\mu), \quad (1.10)$$

где $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, а бесконечно дифференцируемые по своим переменным функции f, g удовлетворяют следующим дополнительным ограничениям.

Во-первых, двумерная система

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad (1.11)$$

где μ рассматривается как параметр, на некотором конечном отрезке $[\mu_1, \mu_2]$ изменения этого параметра имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$x = x_*(\varphi, \mu), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mu). \quad (1.12)$$

Здесь вектор-функция $x_*(\varphi, \mu) \in C^\infty$ такова, что $x_*(\varphi + 2\pi, \mu) \equiv x_*(\varphi, \mu)$, $\partial x_*/\partial \varphi \neq 0$, а частота $\omega(\mu) \in C^\infty$ удовлетворяет требованиям: $\omega(\mu) > 0$, $\omega'(\mu) \neq 0$ при всех $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$.

Во-вторых, считаем, что $g(\mu) \equiv 0$ при $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, $g(\mu) > 0$ при $\mu < \mu_1$, $g(\mu) < 0$ при $\mu > \mu_2$.

Из приведенных свойств функции $g(\mu)$ следует, что аттрактором отщепляющегося от (1.10) скалярного уравнения $\dot{\mu} = g(\mu)$ служит отрезок $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, на котором это уравнение приобретает вид $\dot{\mu} = 0$. А отсюда и из требований, наложенных на систему (1.11), вытекает, что аттрактором исходной системы (1.10) будет прямое произведение цикла (1.12) на отрезок $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, т. е. множество

$$A = \{(x, \mu) : x = x_*(\varphi, \mu), \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (1.13)$$

Аттрактор (1.13) очевидным образом не хаотичен, поскольку каждая его траектория

$$L_0 = \{(x, \mu) = (x_*(\varphi_0 + \omega(\mu_0)t, \mu_0), \mu_0)\} \quad (1.14)$$

оказывается периодической. Однако для него выполняется свойство существенной зависимости от начальных условий.

Для проверки требуемого факта наряду с (1.14) рассмотрим траектории

$$L_n = \{(x, \mu) = (x_*(\varphi_0 + \omega(\mu_n)t, \mu_n), \mu_n)\} \subset A, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.15)$$

где $\mu_n \rightarrow \mu_0$, но при этом отношение $\omega(\mu_n)/\omega(\mu_0)$ остается иррациональным (в силу условия $\omega'(\mu) \neq 0$ такая последовательность μ_n заведомо существует). Заметим, далее, что равномерно по $t \geq 0$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма)

$$\begin{aligned} & \|x_*(\varphi_0 + \omega(\mu_n)t, \mu_n) - x_*(\varphi_0 + \omega(\mu_0)t, \mu_0)\| \\ &= \|x_*(\varphi_0 + \omega(\mu_n)t, \mu_0) - x_*(\varphi_0 + \omega(\mu_0)t, \mu_0)\| + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1.16)$$

и, в частности, начальные условия траекторий (1.14), (1.15) при $t = 0$ с ростом n становятся сколь угодно близкими. Но при $t \rightarrow +\infty$ эта близость нарушается. Действительно, полагая в (1.16) $t = 2\pi m/\omega(\mu_0)$, $m \in \mathbb{N}$, убеждаемся, что при любом фиксированном n и при подходящем выборе последовательности номеров $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ имеет место асимптотическое равенство

$$\left\| x_* \left(\varphi_0 + 2\pi m_k \frac{\omega(\mu_n)}{\omega(\mu_0)}, \mu_0 \right) - x_*(\varphi_0, \mu_0) \right\| = \Delta_0(\varphi_0, \mu_0) + o(1), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (1.17)$$

где

$$\Delta_0(\varphi_0, \mu_0) = \max_{0 \leq \psi \leq 2\pi} \|x_*(\psi, \mu_0) - x_*(\varphi_0, \mu_0)\|. \quad (1.18)$$

Установленные соотношения (1.16)–(1.18) свидетельствуют о том, что аттрактор (1.13) действительно обладает свойством существенной зависимости от начальных условий. Что же касается постоянной неустойчивости Δ , то в силу (1.18) в качестве таковой можно взять любое число из интервала $(0, \Delta_*)$, где

$$\Delta_* = \min_{\substack{0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi \\ \mu_1 \leq \mu_0 \leq \mu_2}} \Delta_0(\varphi_0, \mu_0) > 0.$$

Следующий пример представляет собой некоторое усложнение предыдущего. Фиксируем произвольно натуральное $N \geq 2$ и рассмотрим систему

$$\ddot{x}_n + (n^2 + \mu)x_n = \lambda \left(1 - \sum_{k=1}^N (\dot{x}_k)^2 + (k^2 + \mu)x_k^2 \right) \dot{x}_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.19)$$

$$\dot{\mu} = g(\mu). \quad (1.20)$$

Здесь λ – положительный параметр, а функция $g(\mu)$ та же, что и в (1.10). Единственное дополнительное требование состоит в том, что для постоянной μ_1 , входящей в определение этой функции, выполняется неравенство $\mu_1 > 0$.

Обратимся сначала к вспомогательной системе (1.19), считая, что μ – параметр, принадлежащий отрезку $[\mu_1, \mu_2]$. Рассмотрим затем квадратичную форму

$$E(x, \dot{x}, \mu) = \sum_{n=1}^N (\dot{x}_n)^2 + (n^2 + \mu)x_n^2, \quad (1.21)$$

где $x = (x_1, \dots, x_N)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N)$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *При любом фиксированном $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ аттрактором вспомогательной системы (1.19) является множество*

$$A_\mu = \{(x, \dot{x}) : E(x, \dot{x}, \mu) = 1\}. \quad (1.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное решение $(x(t), \dot{x}(t))$ системы (1.19) с ненулевыми начальными условиями при $t = 0$ и обозначим через $E(t)$ функцию, получающуюся после подстановки компонент $x_n(t)$, $\dot{x}_n(t)$, $n = 1, \dots, N$, этого решения в (1.21). Затем умножим каждое уравнение

из (1.19) на $\dot{x}_n$ и просуммируем соответствующие равенства по n . В результате приходим к следующему дифференциальному уравнению для $E(t)$:

$$\frac{1}{2} \dot{E} = \lambda(1 - E) \sum_{n=1}^N (\dot{x}_n(t))^2. \quad (1.23)$$

Обратим внимание, что поскольку уравнение (1.23) допускает решение $E = 1$, то множество (1.22) оказывается инвариантным для системы (1.19). Поэтому для обоснования леммы достаточно убедиться, что $E(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$.

Предположим сначала, что $E(0) < 1$. Тогда при всех $t \geq 0$ выполняется априорная оценка $E(t) < 1$, так как в силу инвариантности множества (1.22) график функции $E(t)$ не может пересечь прямую $E = 1$. Объединяя эту оценку с вытекающим из (1.23) неравенством $\dot{E}(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$ и применяя теорему Вейерштрасса, приходим к выводу, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = E_*$, где $0 < E_* \leq 1$.

Убедимся теперь, что $E_* = 1$. В предположении противного фиксируем натуральное n_0 , $n_0 \leq N$, для которого

$$|x_{n_0}(0)| + |\dot{x}_{n_0}(0)| \neq 0 \quad (1.24)$$

(так как выбранное нами решение $(x(t), \dot{x}(t))$ системы (1.19) нетривиально, то требуемое n_0 обязательно найдется). Далее, рассмотрим уравнение из (1.19) с номером $n = n_0$ и будем считать в нем $\alpha(t) = E(t) - E_*$ уже известной функцией. В результате это уравнение примет вид

$$\ddot{x}_{n_0} + (n_0^2 + \mu)x_{n_0} = \lambda(1 - E_* - \alpha(t))\dot{x}_{n_0}. \quad (1.25)$$

И наконец, учитывая в (1.25) неравенство $E_* < 1$ и предельное соотношение $\alpha(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, убеждаемся, что решение данного уравнения с начальными условиями (1.24) обладает свойством: $|x_{n_0}(t)| + |\dot{x}_{n_0}(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Последнее же очевидным образом противоречит априорной оценке $E(t) < 1$.

Итак, установлено, что в случае $E(0) < 1$ справедливо требуемое предельное равенство $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 1$. Остается добавить, что оно сохраняется и при $E(0) > 1$ (данный факт вытекает из априорных оценок $E(t) > 1$, $\dot{E}(t) \leq 0$ при всех $t \geq 0$ и рассуждений, аналогичных изложенным выше). Лемма 1.1 доказана.

Из утверждения леммы 1.1 и свойств функции $g(\mu)$ немедленно следует, что аттрактором полной системы (1.19), (1.20) будет множество

$$A = \{(x, \dot{x}, \mu) : E(x, \dot{x}, \mu) = 1, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\}, \quad (1.26)$$

на котором эта система записывается в виде

$$\ddot{x}_n + \omega_n^2(\mu)x_n = 0, \quad \dot{\mu} = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.27)$$

где $\omega_n(\mu) = \sqrt{n^2 + \mu}$. Ясно также, что данный аттрактор заведомо не хаотичен (в силу (1.27) движения на нем квазипериодические или периодические). Но, тем не менее, справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1.2. *На аттракторе (1.26) система (1.19), (1.20) обладает свойством существенной зависимости от начальных условий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любое решение $(x_0(t), \dot{x}_0(t), \mu_0)$ из аттрактора (1.26), для компонент $x_{n,0}(t)$, $n = 1, \dots, N$, которого справедливы формулы

$$x_{n,0}(t) = \rho_n \cos(\omega_n(\mu_0)t + \varphi_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.28)$$

Здесь начальные фазы φ_n произвольны, а амплитуды $\rho_n \geq 0$ связаны равенством

$$\sum_{n=1}^N \omega_n^2(\mu_0) \rho_n^2 = 1. \quad (1.29)$$

На следующем этапе подберем решение $(x_\mu(t), \dot{x}_\mu(t), \mu) \in A$, начальные условия которого при $t = 0$ близки к $(x_0(0), \dot{x}_0(0), \mu_0)$. А именно, считая, что $|\mu - \mu_0| \ll 1$, положим $x_\mu(t) = (x_{1,\mu}(t), \dots, x_{N,\mu}(t))$, где

$$x_{n,\mu}(t) = \tilde{\rho}_n(\mu) \cos(\omega_n(\mu)t + \varphi_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.30)$$

Подчеркнем, что в (1.30) фазы φ_n взяты теми же, что и в (1.28). Что же касается амплитуд $\tilde{\rho}_n$, то они определяются по следующему правилу. Фиксируем такой номер p , $p \leq N$, для которого соответствующая амплитуда ρ_p из (1.28), (1.29) удовлетворяет равенству $\omega_p^2(\mu_0) \rho_p^2 = \max_{1 \leq n \leq N} \omega_n^2(\mu_0) \rho_n^2$. Далее, будем считать, что $\tilde{\rho}_n = \rho_n$ при $n \neq p$ и $\tilde{\rho}_p = \rho_p + \delta(\mu)$, где функция $\delta(\mu)$, $\delta(\mu_0) = 0$, определяется как неявная из аналогичного (1.29) соотношения

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^N \omega_n^2(\mu) \rho_n^2 + \omega_p^2(\mu) (\rho_p + \delta)^2 = 1. \quad (1.31)$$

Заметим, что применимость к уравнению (1.31) в точке $(\delta, \mu) = (0, \mu_0)$ теоремы о неявной функции по переменной δ гарантируется вытекающим из (1.29) неравенством $\rho_p > 0$.

На заключительном этапе доказательства попытаемся получить равномерную по $\mu_0 \in [\mu_1, \mu_2]$ и по амплитудам $\rho_n \geq 0$, $n = 1, \dots, N$ таким, что

$$\sum_{n=1}^N \omega_n^2(\mu_0) \rho_n^2 = 1,$$

оценку снизу на функцию

$$H(t) = \sum_{n=1}^N \omega_n^2(\mu_0) (x_{n,0}(t) - x_{n,\mu}(t))^2 + (\dot{x}_{n,0}(t) - \dot{x}_{n,\mu}(t))^2 \quad (1.32)$$

при достаточно больших t и при $\mu \rightarrow \mu_0$. В связи с этим обратим внимание, что в силу (1.28)–(1.30) при $\mu \rightarrow \mu_0$ для (1.32) справедливо равномерное по $t \geq 0$ и по μ_0, ρ_n , $n = 1, \dots, N$, асимптотическое представление

$$H(t) = \sum_{n=1}^N 4 \omega_n^2(\mu_0) \rho_n^2 \sin^2 \left(\frac{(\mu - \mu_0)t}{2(\omega_n(\mu) + \omega_n(\mu_0))} \right) + o(1). \quad (1.33)$$

Далее, из (1.33), в свою очередь, вытекает существование такой последовательности моментов времени $t = t_m(\mu)$, $m \geq 1$, стремящейся к бесконечности при одновременном стремлении m к ∞ и μ к μ_0 , что

$$H(t)|_{t=t_m(\mu)} = H_*(\mu_0, \rho_1, \dots, \rho_N) + o(1), \quad m \rightarrow \infty, \quad \mu \rightarrow \mu_0, \quad (1.34)$$

где

$$H_*(\mu_0, \rho_1, \dots, \rho_N) = \sup_{z \in \mathbb{R}} \sum_{n=1}^N 4\omega_n^2(\mu_0)\rho_n^2 \sin^2\left(\frac{z}{\omega_n(\mu_0)}\right). \quad (1.35)$$

Асимптотическое равенство (1.34) сводит интересующую нас проблему к получению оценки снизу на H_* , равномерной по μ_0 и ρ_n , $n = 1, \dots, N$. В связи с этим обратимся к формуле (1.35), из которой очевидным образом имеем

$$H_* \geq \max_{z \in \mathbb{R}} 4\omega_n^2(\mu_0)\rho_n^2 \sin^2\left(\frac{z}{\omega_n(\mu_0)}\right) = 4\omega_n^2(\mu_0)\rho_n^2 \quad \forall n \leq N.$$

Суммируя затем данные неравенства по n , убеждаемся, что

$$H_* \geq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 4\omega_n^2(\mu_0)\rho_n^2 = \frac{4}{N}.$$

Лемма 1.2 доказана.

Интересно отметить, что у приведенных нами примеров существует достаточно простой дискретный аналог. Таковым является закручивающее отображение Π плоского кольца A на себя. В полярных координатах (r, φ) упомянутое кольцо и само отображение имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \{(r, \varphi) : r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}\}, \\ \Pi : (r, \varphi) &\rightarrow (r, \varphi + r). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Несложная проверка показывает, что для отображения из (1.36) выполняется требование существенной зависимости от начальных условий на A , в то время как все его траектории периодические или квазипериодические.

Подводя итог, добавим, что во всех трех наших примерах соответствующая динамическая система на инвариантном множестве A удовлетворяет условиям 1.1б), 1.1в) из определения хаоса по Девани, но не обладает свойством топологической транзитивности. По этой же причине разобранные примеры не подпадают и под более слабые условия хаоса (см. определения 1.2, 1.4).

1.5. Эргодический и энтропийный подходы к определению сложности. В данном пункте мы остановимся на связи нашего определения хаоса с некоторыми характеристиками сложности, принятыми в эргодической теории. Одной из таких характеристик является перемешивание – топологическое или метрическое (см. [33]–[36]).

Обратимся сначала к топологическому случаю. Как и в п. 1.1, рассмотрим непрерывный полупоток φ^t , заданный в полном метрическом пространстве (X, ρ) и имеющий непустое замкнутое инвариантное множество $A \subset X$. Однако

теперь A уже не предполагается ограниченным. Необходимость в этом условии отпадает, поскольку перемешивание, как топологическое, так и метрическое, препятствует возникновению артефактов, подобных описанному в п. 1.2. Более того, как будет показано ниже, при некоторых не слишком обременительных дополнительных предположениях из свойства перемешивания вытекает хаотичность в смысле определения 1.4.

ТЕОРЕМА 1.4. *Предположим, что выполнены следующие ограничения:*

1.4 а) $\varphi^t|_A$ – топологическое перемешивание, т.е. для любых двух непустых множеств $U, V \subset A$, открытых в топологии пространства (A, ρ) , существует такое $t_0 = t_0(U, V) \geq 0$, что $\varphi^t(U) \cap V \neq \emptyset$ при всех $t \geq t_0$;

1.4 б) пространство (A, ρ) сепарабельно и состоит более чем из одной точки;

1.4 в) в множестве A содержится хотя бы одно периодическое движение.

Тогда полупоток $\varphi^t|_A$ хаотичен в смысле определения 1.4 и любая его всюду плотная траектория оказывается сложной (множество плотных траекторий непусто и для каждой из них реализуется альтернатива 1.3б) из определения 1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно (см. [7]), в случае, когда фазовое пространство состоит более чем из одной точки, из топологического перемешивания вытекает существенная зависимость от начальных данных. Поэтому в силу условий 1.4 а), 1.4 б) наш полупоток обладает указанным свойством. Далее, поскольку пространство (A, ρ) еще и сепарабельно, а полупоток $\varphi^t|_A$ транзитивен, то хотя бы одна его траектория плотна в A . Фиксируем любую из таких траекторий и обозначим ее через $\gamma(x_0) = \{x = \varphi^t(x_0) : t \geq 0\}$, $x_0 \in A$.

Покажем теперь, что введенная выше траектория $\gamma(x_0)$ является сложной. В самом деле, она заведомо не может быть рекуррентной по Биркгофу. В противном случае $\overline{\gamma(x_0)} = A$ представляет собой компактное минимальное множество, а значит, в силу условия 1.4 в) рассматриваемая траектория с необходимостью периодическая и $A = \gamma(x_0)$. Последнее же очевидным образом противоречит требованию топологического перемешивания.

Итак, для завершения обоснования теоремы осталось убедиться, что $\omega(x_0) = A$, где, напомним, через $\omega(x_0)$ мы обозначаем ω -предельное множество траектории $\gamma(x_0)$. Предполагая противное, имеем $A = \gamma(x_0)$ (при $\omega(x_0) = \emptyset$) или $A = \gamma(x_0) \cup \omega(x_0)$, $\rho(x_0, \omega(x_0)) > 0$. В обоих случаях, однако, при всех достаточно малых $\delta > 0$ соответствующая δ -окрестность начальной точки x_0 содержит только точки вида $\varphi^t(x_0)$, где $0 \leq t \leq \bar{t}(\delta)$ и $\bar{t}(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$ (см. аналогичное место в доказательстве теоремы 1.2).

Учитывая вышесказанное и полагая в условии 1.4 а) теоремы $U = V = O_\delta(x_0)$, приходим к выводу, что $\varphi^t(x_0) \in O_\delta(x_0)$ при любом достаточно малом $\delta > 0$ и при всех $t \geq t_0(\delta)$. Тем самым, автоматически $x_0 \in \omega(x_0)$, что противоречит каждой из возможных альтернатив: $\omega(x_0) = \emptyset$ или $\rho(x_0, \omega(x_0)) > 0$. Теорема 1.4 доказана.

В дополнение к установленной теореме отметим, что условие 1.4 в) можно заменить требованием существования собственного подмножества $A_0 \subset A$,

замкнутого и инвариантного для траекторий полупотока φ^t . Совсем же отказать от этого условия нельзя. Контрпримером здесь служит построенная в [37] минимальная символическая система, обладающая свойством топологического перемешивания. Очевидно, что такая система не будет хаотической в смысле определения 1.4.

Приступим теперь к рассмотрению метрического случая. В связи с этим дополнительно предположим, что наше фазовое пространство (X, ρ) сепарабельно и снабжено борелевской вероятностной мерой μ , инвариантной для полупотока φ^t . Последнее означает, что для любого μ -измеримого множества $\mathcal{C} \subset A$ при всех $t \geq 0$ выполняется равенство $\mu(\varphi^{-t}(\mathcal{C})) = \mu(\mathcal{C})$, где $\varphi^{-t}(\mathcal{C}) = \{x \in X : \varphi^t(x) \in \mathcal{C}\}$ – полный прообраз $\mathcal{C}$, который также предполагается измеримым. Что же касается замкнутого инвариантного множества A , то в качестве такового возьмем

$$A = \text{supp } \mu \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ для любого открытого множества } U \subset X, \text{ содержащего точку } x\}. \quad (1.37)$$

Справедливо следующее утверждение, являющееся метрическим аналогом теоремы 1.4.

ТЕОРЕМА 1.5. *Предположим, что*

1.5 а) $\varphi^t|_A$ – метрическое перемешивание, т.е. для любых двух μ -измеримых множеств $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset X$ выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(\varphi^{-t}(\mathcal{C}_1) \cap \mathcal{C}_2) = \mu(\mathcal{C}_1)\mu(\mathcal{C}_2);$$

1.5 б) $A = \text{supp } \mu$ состоит более чем из одной точки и содержит хотя бы одно периодическое движение.

Тогда полупоток $\varphi^t|_A$ хаотичен в смысле определения 1.4. Более того, найдется такое μ -измеримое подмножество $A_0 \subset A$, $\mu(A_0) = 0$, что любая траектория $\gamma(x_0)$ рассматриваемого полупотока с начальным условием $x_0 \in A \setminus A_0$ является сложной (точнее говоря, удовлетворяет требованию 1.3 б) из определения 1.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в [33], свойство метрического перемешивания влечет справедливость на множестве (1.37) соответствующего топологического аналога. А отсюда и из 1.5 а), 1.5 б) с учетом сепарабельности пространства (X, ρ) заключаем, что полупоток $\varphi^t|_A$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы. Следовательно, он является хаотическим и каждая его плотная траектория относится к сложным. Таким образом, для завершения обоснования теоремы остается проверить, что множество начальных условий, отвечающих плотным траекториям, имеет полную меру в пространстве (A, ρ) .

Обозначим через $L(A, \mu)$ пространство μ -суммируемых на A вещественных функций $f(x)$. Как известно (см. [33]–[36]), из свойства метрического перемешивания вытекает эргодичность. Это означает, что для любой функции $f(x) \in L(A, \mu)$ можно указать такое множество $A_0 \subset A$, $\mu(A_0) = 0$, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(\varphi^t(x_0)) dt = \int_A f(x) d\mu \quad \forall x_0 \in A \setminus A_0. \quad (1.38)$$

Ясно также, что в силу счетной аддитивности меры μ множество A_0 в (1.38) можно выбрать единым для любого фиксированного счетного семейства функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, из $L(A, \mu)$.

На следующем этапе введем в рассмотрение некоторую счетную систему непустых открытых множеств $O_n \subset A$, $n = 1, 2, \dots$, образующих базу топологии пространства (A, ρ) , и обозначим через $\chi_{O_n}(x)$, $n \geq 1$, соответствующие индикаторы. Как уже было сказано чуть выше, найдется такое подмножество $A_0 \subset A$, $\mu(A_0) = 0$, что на оставшейся части $A \setminus A_0$ предельные равенства вида (1.38) выполняются для всех функций $\chi_{O_n}(x)$, $n \geq 1$. Покажем, что именно это множество и является искомым, т. е. при любом $x_0 \in A \setminus A_0$ соответствующая траектория $\gamma(x_0)$ полупотока φ^t плотна в A .

Предполагая противное, имеем некоторую траекторию $\gamma(x_0)$, $x_0 \in A \setminus A_0$, для которой множество $A \setminus \overline{\gamma(x_0)}$ непусто и открыто. Тем самым, заведомо найдется такое натуральное n_0 , что $O_{n_0} \subset A \setminus \overline{\gamma(x_0)}$. Остается подставить в равенство (1.38) функцию $f(x) = \chi_{O_{n_0}}(x)$ и заметить, что $\chi_{O_{n_0}}(\varphi^t(x_0)) \equiv 0$ при $t \geq 0$, но в то же время

$$\int_A \chi_{O_{n_0}}(x) d\mu = \mu(O_{n_0}) > 0$$

(строгая положительность меры $\mu(O_{n_0})$ вытекает из (1.37)). Полученное противоречие доказывает теорему 1.5.

Следует отметить, что под действие установленной теоремы подпадают такие важные классы динамических систем, как системы Колмогорова, или K -системы (см. [34]–[36]), точные эндоморфизмы Рохлина [38] и системы, допускающие стохастические аттракторы в смысле Синая [39]. В самом деле, во всех перечисленных случаях наблюдается метрическое перемешивание. Что же касается периодических движений, то, как правило, в упомянутых системах они не только существуют, но и оказываются всюду плотными на соответствующем инвариантном множестве или даже во всем фазовом пространстве.

Заканчивая обсуждение взаимосвязи хаоса и перемешивания, добавим, что теоремы, обратные к 1.4 и 1.5, не верны. В качестве соответствующего контрпримера возьмем полупоток, о котором говорится в теореме 1.3. Если предположить, что его аттрактор A является носителем некоторой перемешивающей борелевской вероятностной меры μ , то с необходимостью $\varphi^t|_A$ – топологическое перемешивание. Последнее же невозможно, поскольку указанный полупоток не обладает даже более слабым свойством – топологической транзитивностью.

Перейдем к вопросу о связи нашего определения хаоса с энтропийным подходом к понятию сложности. При его обсуждении ограничимся рассмотрением полупотока $\{T^n, n = 0, 1, \dots\}$ с дискретным временем, порожденного итерациями некоторого непрерывного отображения $T: X \rightarrow X$, где X – метрический компакт. Подчеркнем, что для дискретного времени аналогии определений 1.1–1.5 и теорем 1.1, 1.2, 1.4, 1.5 сохраняются (вместе с обоснованиями). В частности, теорема 1.2 теперь звучит так: из усиленной хаотичности полупотока $\{T^n, n \geq 0\}$ по Кнудсену вытекает его хаотичность в смысле определения 1.4.

Следуя работам [40], [41], полупоток $\{T^n, n \geq 0\}$ назовем квазислучайным, если существует T -инвариантная борелевская вероятностная мера μ , для которой $h_\mu(T) > 0$, где h_μ – метрическая энтропия (см., например, [42]). Однако в ряде случаев удобнее иметь дело не с метрической, а с топологической энтропией $h_{\text{top}}(T)$. Опираясь на известный вариационный принцип [43], [44]:

$$h_{\text{top}}(T) = \sup_{\mu} h_{\mu}(T),$$

где супремум берется по всем вероятностным борелевским T -инвариантным мерам μ , приходим к выводу, что требование $h_\mu(T) > 0$ эквивалентно выполнению неравенства $h_{\text{top}}(T) > 0$.

По поводу связи условия $h_{\text{top}}(T) > 0$ с нашим определением хаоса можно сказать следующее. Из свойства квазислучайности, вообще говоря, не вытекает хаотичность в смысле определения 1.4. Об этом свидетельствует предложенный в [45] пример минимальной символической системы, имеющей положительную топологическую энтропию. Однако, по всей видимости, такая ситуация не типична, что косвенным образом подтверждают результаты работы [46]. В упомянутой статье установлено, что в случае, когда T – диффеоморфизм класса $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, компактного двумерного риманова многообразия M , из условия $h_{\text{top}}(T) > 0$ вытекает существование у полупотока $\{T^n, n \geq 0\}$ хотя бы одной инвариантной гиперболической подковы Λ (определение подковы см., например, в [33]). Точнее говоря, в этом случае отображение T имеет гиперболическую периодическую орбиту с трансверсальной гомоклинической точкой. Остается добавить, что сужение рассматриваемого полупотока на Λ является хаотическим по Девани, а значит, будет таковым и в смысле определения 1.4.

Как оказывается, энтропийный подход к понятию сложности можно увязать с информационной сложностью по Колмогорову. Соответствующие результаты были получены в статьях [47], [48]. В частности, в работе [48] дано определение сложности отдельно взятой траектории $\gamma(x_0) = \{T^n x_0, n \geq 0\}$ полупотока $\{T^n, n \geq 0\}$, которую уместно назвать информационной сложностью.

Для формулировки определения информационной сложности необходимо ввести ряд вспомогательных обозначений и понятий. Пусть $\mathfrak{u} = \{U_1, \dots, U_k\}$ – произвольное конечное покрытие компакта X открытыми множествами U_i , $i = 1, \dots, k$; $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, k\}$ – конечный алфавит; $\Lambda = \prod_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$, где $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}$ для всех $i \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. Далее, отображение (вообще говоря, неоднозначное) $\psi_{\mathfrak{u}}: X \rightarrow \Lambda$ определим так: $\omega \in \psi_{\mathfrak{u}}(x)$, если бесконечное слово $\omega = \{\omega(i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ таково, что $T^i x \in U_{\omega(i)}$ для $i \in \mathbb{Z}_+$. Наконец, через ω^n будем обозначать слово $\{\omega(0), \omega(1), \dots, \omega(n-1)\}$, а через $K(\omega^n)$ – сложность конечного слова ω^n по Колмогорову (см. [49], [50]).

Остановимся чуть более подробно на описании величины $K(S)$. Пусть $\mathcal{A}$ – вычислимая функция, определенная на некотором подмножестве пространства всех конечных 0–1 слов p и принимающая значения в множестве конечных слов S из алфавита $\mathcal{L}$. Сложность $K_{\mathcal{A}}(S)$ слова S относительно функции $\mathcal{A}$ определяется равенством

$$K_{\mathcal{A}}(S) = \begin{cases} \inf_{p: \mathcal{A}(p)=S} l(p), & \text{где } l(p) \text{ – длина слова } p, \\ +\infty, & \text{если } \mathcal{A}(p) \neq S \text{ для всех } p. \end{cases}$$

В работе [49] показано существование такой вычислимой функции $\mathcal{B}$, что для любой другой вычислимой функции $\mathcal{A}$ и любого конечного слова S имеет место оценка

$$K_{\mathcal{B}}(S) \leq K_{\mathcal{A}}(S) + C_{\mathcal{A}},$$

где $C_{\mathcal{A}}$ – константа, зависящая лишь от $\mathcal{A}$. Сложность слова S относительно функции $\mathcal{B}$ называется сложностью по Колмогорову и обозначается через $K(S)$.

Приведенной информации вполне достаточно для формулировки требуемого определения из [48], которое звучит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Величину

$$K(x_0, T) = \sup_u \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \min_{\omega^n \in (\psi_u(x_0))^n} K(\omega^n) \right\},$$

где супремум берется по всем открытым конечным покрытиям u , назовем информационной сложностью траектории

$$\gamma(x_0) = \{T^n x_0, n \geq 0\}.$$

Саму же траекторию $\gamma(x_0)$ при условии $K(x_0, T) > 0$ будем называть информационно сложной.

В заключение рассмотрим закономерно возникающий вопрос о связи определения 1.8 с нашим определением сложной траектории. Как оказывается, при некоторых вполне естественных дополнительных ограничениях эти понятия почти совпадают. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.6. Пусть X – метрический компакт, $T: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение, μ – заданная на X борелевская T -инвариантная вероятностная мера. Предположим, далее, что

1.6 а) полупоток $\{T^n, n \geq 0\}$ обладает свойством перемешивания по отношению к мере μ ;

1.6 б) множество $A = \text{supp } \mu$ состоит более чем из одной точки и содержит хотя бы одно периодическое движение;

1.6 в) выполняется неравенство $h_{\mu}(T) > 0$.

Тогда найдется такое μ -измеримое подмножество $A_0 \subset X$, $\mu(A_0) = 0$, что любая траектория $\gamma(x_0)$ рассматриваемого полупотока с начальным условием $x_0 \in X \setminus A_0$ является сложной как в смысле определения 1.3, так и в информационном смысле.

Для доказательства заметим, что в силу условий 1.6 а), 1.6 б) мы находимся в рамках применимости теоремы 1.5 и, следовательно, μ -почти любая траектория $\gamma(x_0)$ полупотока $\{T^n, n \geq 0\}$ оказывается сложной в смысле определения 1.3. Далее, как отмечено в [48], в случае эргодической инвариантной меры μ (а наша мера таковой является) для μ -почти всех $x_0 \in X$ справедливо соотношение $K(x_0, T) = h_{\mu}(T)$. Таким образом, для завершения обоснования теоремы 1.6 остается воспользоваться условием 1.6 в).

2. Базовая модель турбулентного хаоса

2.1. Общие свойства рассматриваемой системы. Модель, о которой пойдет речь ниже, представляет собой бесконечномерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\eta}_n = \left[1 - \varkappa \eta_n - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \eta_k \right] \eta_n, \quad n \geq 1, \quad (2.1)$$

с параметром $\varkappa > 1$. В фазовом пространстве l , состоящем из векторов (1.2), (1.3), эта система порождает абстрактное дифференциальное уравнение

$$\dot{\eta} = \eta + F(\eta) \quad (2.2)$$

с гладкой по Фреше и ограниченной нелинейностью F . Точнее говоря, в силу равенств

$$F(\eta) = -(\varkappa - 1) \eta * \eta - f(\eta)\eta, \quad f(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n, \quad (2.3)$$

где $*$ – операция покомпонентного умножения векторов, отображение $F: l \rightarrow l$ является непрерывной квадратичной формой.

Как обычно, решением задачи Коши для уравнения (2.2) с произвольным начальным условием

$$\eta|_{t=0} = \eta_0 \quad (2.4)$$

из l назовем непрерывно дифференцируемую (в метрике l) на некотором интервале J , $0 \in J$, вектор-функцию $\eta(t)$, обращающую соотношения (2.2), (2.4) в верные равенства. Напомним, далее, что в силу результатов из [51] общие свойства абстрактных дифференциальных уравнений с ограниченными и гладкими правыми частями аналогичны соответствующим свойствам конечномерных систем. Поэтому, в частности, для уравнения (2.2) справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 2.1. *Для любого ограниченного множества $\Omega \subset l$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что каждое решение $\eta = \eta(t, \eta_0)$, $\eta(0, \eta_0) = \eta_0$, задачи Коши (2.2), (2.4) с начальным условием $\eta_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $-t_0 \leq t \leq t_0$.*

ЛЕММА 2.2. *Пусть задано произвольное решение $\eta = \eta_*(t)$ уравнения (2.2) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Тогда найдется такое достаточно малое $r_0 > 0$, что любое решение $\eta = \eta(t, \eta_0)$ этого уравнения с начальным условием $\eta(0, \eta_0) = \eta_0 \in B$, $B = \{\eta \in l : \|\eta - \eta_*(0)\| \leq r_0\}$, существует на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ и непрерывно по совокупности переменных $(t, \eta_0) \in [0, \bar{t}] \times B$.*

Для доказательства леммы 2.1 перейдем от (2.2), (2.4) к эквивалентному интегральному уравнению

$$\eta(t) = \exp(t)\eta_0 + \int_0^t \exp(t - \tau)F(\eta(\tau)) d\tau. \quad (2.5)$$

Обозначим через Π оператор, порожденный правой частью уравнения (2.5) в пространстве $C([-t_0, t_0]; l)$ непрерывных на отрезке $-t_0 \leq t \leq t_0$ вектор-функций $\eta(t) \in l$ с нормой $\|\eta(t)\|_C = \max_{-t_0 \leq t \leq t_0} \|\eta(t)\|$. Опираясь на свойства ограниченности и гладкости F (см. (2.3)), нетрудно установить существование для любого фиксированного $r_0 > 0$ такого не зависящего от $\eta_0 \in \Omega$ достаточно малого $t_0 = t_0(r_0, \Omega) > 0$, что оператор Π преобразует в себя множество

$$\{\eta(t) \in C([-t_0, t_0]; l) : \|\eta(t) - \exp(t)\eta_0\|_C \leq r_0\} \quad (2.6)$$

и оказывается сжимающим. Тем самым, в множестве (2.6) он имеет единственную неподвижную точку $\eta = \eta(t, \eta_0)$, которая и является искомым решением задачи Коши (2.2), (2.4).

Доказательство существования решений из леммы 2.2 связано с анализом аналогичного (2.5) интегрального уравнения

$$\Pi(h, \eta_0) = 0, \quad (h, \eta_0) \in C([0, \bar{t}]; l) \times l, \quad (2.7)$$

где $h(t) = \eta(t, \eta_0) - \eta_*(t)$ и

$$\begin{aligned} \Pi(h, \eta_0) = & h(t) - \exp(t)(\eta_0 - \eta_*(0)) \\ & - \int_0^t \exp(t - \tau) [F(\eta_*(\tau) + h(\tau)) - F(\eta_*(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что в точке $h = 0$, $\eta_0 = \eta_*(0)$ к этому уравнению применима теорема о неявном отображении по переменной h . Таким образом, решения уравнения (2.2), о которых говорится в лемме 2.2, задаются равенством $\eta(t, \eta_0) = \eta_*(t) + h(t, \eta_0)$, где $h(t, \eta_0) \in C([0, \bar{t}]; l)$ – решение уравнения (2.7), существующее при всех η_0 , близких к $\eta_*(0)$, и непрерывное по совокупности переменных.

В дальнейшем нам потребуется еще одна лемма, которая связана с продолжением решений уравнения (2.2). Перед ее формулировкой для каждого решения $\eta(t)$ этого уравнения с начальным условием (2.4) определим так называемый максимальный полуинтервал существования $[0, t_{\max})$, где

$$t_{\max} = \sup\{t_0 : \eta(t) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (2.8)$$

В силу леммы 2.1 множество значений t_0 , по которым берется супремум в (2.8), заведомо не пусто. Ясно также, что любое решение $\eta(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал $[0, t_{\max})$, причем не исключен случай $t_{\max} = +\infty$. Если же, напротив, $t_{\max} < +\infty$, то справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2.3. Пусть для некоторого решения $\eta(t)$ уравнения (2.2) конечна величина (2.8). Тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|\eta(t)\| = +\infty. \quad (2.9)$$

Доказательство сформулированной леммы проводится от противного. Действительно, предположим, что соотношение (2.9) не выполняется. В этом случае существуют такая последовательность моментов времени t_n , $t_n \nearrow t_{\max}$

при $n \rightarrow \infty$, и такая постоянная $M > 0$, что $\|\eta(t_n)\| \leq M$, $n \geq 1$. Далее, в условиях леммы 2.1 в качестве ограниченного множества Ω возьмем $\{\eta(t_n), n \geq 1\}$. Тогда, очевидно, решение $\eta(t)$ будет определено на отрезках вида $[t_n, t_n + t_0]$, $n \geq 1$, где $t_0 = t_0(\Omega) > 0$. Ясно также, что при достаточно больших n выполняется включение $t_{\max} \in (t_n, t_n + t_0)$. Последнее же противоречит определению $t_{\max}$ (см. (2.8)).

Обратимся теперь к решениям уравнения (2.2) с начальными условиями из конуса K векторов с неотрицательными координатами. Из структуры правых частей системы (2.1) очевидным образом заключаем, что этот конус является инвариантным для траекторий рассматриваемого уравнения. Более того, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. *Для решения $\eta(t)$ уравнения (2.2) с произвольным начальным условием $\eta(0) = \eta_0 \in K$ выполняется равенство $t_{\max} = +\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольно вектор $\eta_0 \in K$ и обозначим через $\eta(t) \in K$ соответствующее решение задачи Коши (2.2), (2.4). Далее, введем в рассмотрение функцию

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t), \quad (2.10)$$

где $\eta_n(t)$, $n \geq 1$, – координаты вектора $\eta(t)$. Нетрудно увидеть, что из (2.1) для $S(t)$ вытекает дифференциальное неравенство

$$\dot{S}(t) \leq S(t) - S^2(t), \quad (2.11)$$

которое, в свою очередь, приводит к априорной оценке

$$S(t) \leq S_*(t), \quad t \geq 0, \quad (2.12)$$

где $S_*(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{S} = S - S^2, \quad S|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^0, \quad (2.13)$$

а η_n^0 , $n \geq 1$, – компоненты начального условия $\eta_0 \in K$.

Предположим теперь, что для выбранного нами решения $\eta(t)$ выполняется неравенство $t_{\max} < +\infty$. Тогда в силу леммы 2.3 имеем $S(t) = \|\eta(t)\| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_{\max} - 0$. А это очевидным образом противоречит оценке (2.12). Лемма 2.4 доказана.

Объединяя утверждения лемм 2.2, 2.4, приходим к выводу, что в конусе K система (2.2) порождает непрерывный полупоток $\varphi^t(\eta_0)$, $\eta_0 \in K$, определенный по правилу:

$$\varphi^t(\eta_0) = \eta(t, \eta_0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.14)$$

где $\eta(t, \eta_0)$ – решение задачи Коши (2.2), (2.4). Как будет ясно из последующего анализа, этот полупоток удовлетворяет всем требованиям, о которых говорится в теореме 1.3.

2.2. Структура турбулентного аттрактора. При анализе введенного выше полупотока (2.14) нам потребуется множество $\mathcal{U} = K \cap \{\eta \in l : c_1 < \|\eta\| < c_2\}$, где c_1, c_2 – произвольно фиксированные постоянные из интервалов $(0, 1/\varkappa)$ и $(1, +\infty)$ соответственно. Из дифференциального неравенства (2.11) и из аналогичной оценки снизу

$$\dot{S}(t) = S(t) - S^2(t) - (\varkappa - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2(t) \geq S(t) - \varkappa S^2(t) \quad (2.15)$$

вытекает, что, во-первых, это множество поглощающее, т.е. $\overline{\varphi^t(\mathcal{U})} \subset \mathcal{U}$ при всех $t > 0$; во-вторых, для любого замкнутого и ограниченного подмножества $B \subset K$, не содержащего точку $\eta = 0$, найдется такое $t_0 = t_0(B) \geq 0$, что $\varphi^t(B) \subset \mathcal{U}$ при всех $t \geq t_0$ (более того, подбирая надлежащим образом постоянные c_1, c_2 , можно добиться справедливости включения $B \subset \mathcal{U}$). Ясно также, что наличие инвариантного множества с перечисленными свойствами автоматически влечет существование у полупотока (2.14) в конусе K глобального аттрактора

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}). \quad (2.16)$$

Наша основная задача состоит в изучении структуры аттрактора (2.16). В связи с этим в первую очередь обратим внимание на следующий факт. Как показывает непосредственная проверка, в множестве (2.16) содержится счетное число состояний равновесия $O_{n_1, \dots, n_k}$ системы (2.1) с компонентами

$$\begin{aligned} \eta_n &= \tilde{\eta}_k \quad \text{при } n = n_j, \quad j = 1, \dots, k; \\ \eta_n &= 0 \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $\tilde{\eta}_k = 1/(k + \varkappa - 1)$, а $n_1 < \dots < n_k$ – произвольный конечный набор натуральных чисел.

Убедимся далее, что все состояния равновесия (2.17) неустойчивы. С этой целью фиксируем какое-либо из них и линеаризуем на нем исходную систему (2.1). В результате приходим к линейной системе, которая в переменных

$$\begin{aligned} u &= \text{colon}(u_1, \dots, u_k), \quad u_j = \eta_{n_j} - \tilde{\eta}_k, \quad j = 1, \dots, k, \\ v &= \{\eta_n : n \geq 1, n \neq n_j, j = 1, \dots, k\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

записывается в виде

$$\dot{u} = Cu + Dv, \quad \dot{v} = \frac{\varkappa - 1}{k + \varkappa - 1} v. \quad (2.19)$$

Здесь элементы $c_{j,r}$ матрицы C задаются равенствами

$$c_{j,j} = -\varkappa \tilde{\eta}_k, \quad c_{j,r} = -\tilde{\eta}_k, \quad j, r = 1, \dots, k, \quad j \neq r, \quad (2.20)$$

а оператор D действует по правилу:

$$Dv = -\tilde{\eta}_k h_0(v)e, \quad h_0(v) = \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}} \eta_n, \quad e = \text{colon}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k. \quad (2.21)$$

Обратим внимание, что матрица C из (2.19) гурвицева: в силу (2.20) она имеет собственные значения $\lambda = (1 - \varkappa) \tilde{\eta}_k < 0$ (кратности $k - 1$) и $\lambda = -1$. А это значит, что рассматриваемое состояние равновесия является седловым, причем его устойчивое многообразие $W^s(O_{n_1, \dots, n_k})$ k -мерно, а размерность неустойчивого многообразия $W^u(O_{n_1, \dots, n_k})$ равна бесконечности. В линейном приближении, т. е. в рамках системы (2.19), эти многообразия имеют вид

$$\begin{aligned} W^s(O_{n_1, \dots, n_k}) &= \{(u, v) : v = 0\}, \\ W^u(O_{n_1, \dots, n_k}) &= \left\{ (u, v) : u = -\frac{h_0(v)}{k + 2(\varkappa - 1)} e \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где переменные u, v , линейный функционал $h_0(v)$ и вектор e определены равенствами (2.18), (2.21).

Итак, установлено, что аттрактор (2.16) содержит счетное число седловых состояний равновесия (2.17). Кроме того, бесконечномерное неустойчивое многообразие любого из них также принадлежит множеству A . А это означает, что аттрактор A заведомо некомпактен и сам имеет бесконечную хаусдорфову размерность. Более детальную информацию о его структуре дает следующее утверждение.

ЛЕММА 2.5. *Для траектории $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \dots)$ системы (2.1) с произвольным начальным условием $\eta(0) = \eta_0 \in K$, $\eta_0 \neq 0$, реализуется одна из следующих двух возможностей.*

1) *В случае, когда начальный вектор $\eta_0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_n^0, \dots)$ содержит бесконечное число ненулевых компонент, справедливы предельные равенства*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 1, \quad (2.23)$$

где $\theta(t) = \max_{n \geq 1} \eta_n(t)$, $S(t)$ – функция (2.10).

2) *Если у вектора η_0 ненулевыми являются только координаты с номерами $n_1 < \dots < n_k$, где k – некоторое конечное натуральное число, то*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta_{n_j}(t) &= \frac{1}{k + \varkappa - 1}, \quad j = 1, \dots, k; \\ \eta_n(t) &\equiv 0 \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала ситуацию, когда у начального вектора η_0 ненулевыми оказываются компоненты с номерами $n_1 < \dots < n_j < \dots$ и таковых бесконечно много. В этом случае, очевидно, $\eta_n(t) \equiv 0$ при $n \neq n_j$, $j \geq 1$, а для $\eta_{n_j}(t)$ получаем систему, которая с точностью до обозначений совпадает с исходной системой (2.1). Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что $\eta_n^0 > 0$ при всех $n \geq 1$.

Зафиксируем произвольно номер n и обратимся к уравнению для $\eta_n(t)$, имеющему вид

$$\dot{\eta}_n = (1 - S(t) - (\varkappa - 1)\eta_n)\eta_n. \quad (2.25)$$

Далее, считая $S(t)$ в (2.25) уже известной функцией, найдем решение данного уравнения с начальным условием $\eta_n(0) = \eta_n^0 > 0$. На этом пути приходим

к формулам

$$\eta_n(t) = \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} \left(1 + \frac{1}{(\varkappa - 1)\eta_n^0 \psi(t)} \right)^{-1}, \quad (2.26)$$

$$\phi(t) = \exp \left\{ \int_0^t (1 - S(\tau)) d\tau \right\}, \quad \psi(t) = \int_0^t \phi(\sigma) d\sigma.$$

Остановимся на некоторых необходимых для дальнейшего свойствах функций $\phi(t)$ и $\psi(t)$. А именно, покажем сначала, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty. \quad (2.27)$$

С этой целью обратимся к оценке (2.12), из которой имеем

$$1 - S(t) \geq 1 - S_*(t), \quad t \geq 0, \quad (2.28)$$

где $S_*(t)$ – решение задачи Коши (2.13), обладающее в случае $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^0 > 0$ свойствами:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_*(t) = 1, \quad \int_0^{+\infty} |1 - S_*(\tau)| d\tau < \infty. \quad (2.29)$$

Учитывая, далее, факт сходимости фигурирующего в (2.29) интеграла, из неравенства (2.28) и из явного выражения для $\phi(t)$ (см. (2.26)) последовательно выводим:

$$\inf_{t \geq 0} \int_0^t (1 - S(\tau)) d\tau > -\infty, \quad \inf_{t \geq 0} \phi(t) > 0.$$

А отсюда и из формулы для $\psi(t)$ интересующее нас равенство (2.27) вытекает очевидным образом.

Еще одно свойство, которое нуждается в проверке, это ограниченность при $t \rightarrow +\infty$ функции $\phi(t)/\psi(t)$. Его справедливость следует из неравенства

$$\frac{\phi(t)}{\psi(t)} = (\varkappa - 1)\eta_n(t) \left(1 + \frac{1}{(\varkappa - 1)\eta_n^0 \psi(t)} \right) \leq (\varkappa - 1)S_*(t) \left(1 + \frac{1}{(\varkappa - 1)\eta_n^0 \psi(t)} \right)$$

и из уже установленного соотношения (2.27).

Приступим теперь непосредственно к доказательству леммы и обоснуем сначала первое предельное равенство из (2.23). В связи с этим зафиксируем произвольно натуральное N и рассмотрим любой частичный предел $\gamma_* \geq 0$ отношения $\phi(t)/\psi(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ (который в силу сказанного чуть выше заведомо конечен). Выберем, далее, последовательность $t_k > 0$, $k \geq 1$, $t_k \rightarrow +\infty$, для которой $\phi(t_k)/\psi(t_k) \rightarrow \gamma_*$ при $k \rightarrow \infty$. Нетрудно увидеть (см. (2.26), (2.27)), что на этой последовательности

$$\eta_n(t_k) \rightarrow \frac{\gamma_*}{\varkappa - 1}, \quad k \rightarrow \infty, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.30)$$

Но в то же время должно выполняться неравенство (см. (2.12))

$$\sum_{n=1}^N \eta_n(t_k) \leq S_*(t_k),$$

из которого при $k \rightarrow \infty$ с учетом свойств (2.29), (2.30) выводим

$$N \frac{\gamma_*}{\varkappa - 1} \leq 1.$$

А отсюда в силу произвольности N с необходимостью имеем $\gamma_* = 0$.

Следует отметить, что поскольку выше в качестве γ_* брался любой частичный предел отношения $\phi(t)/\psi(t)$, то на самом деле в рассматриваемом случае

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = 0. \quad (2.31)$$

Что же касается первого предельного соотношения (2.23), то оно вытекает из (2.31) и из очевидных оценок (см. (2.26))

$$\eta_n(t) < \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} \quad \forall n \geq 1, \quad \forall t > 0.$$

Для доказательства второго из свойств (2.23) попытаемся получить на $S(t)$ оценку снизу вида

$$S_{**}(t) \leq S(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.32)$$

где $S_{**}(t)$ – некоторая пока неизвестная функция. С этой целью рассмотрим уравнение для $S(t)$ из (2.15) и учтем в нем очевидную оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^2(t) \leq \theta(t)S(t).$$

В итоге приходим к дифференциальному неравенству

$$\dot{S}(t) \geq (1 - (\varkappa - 1)\theta(t))S(t) - S^2(t),$$

из которого, в свою очередь, следует, что в качестве функции $S_{**}(t)$ в (2.32) можно взять

$$S_{**}(t) = \frac{S_0 \exp \left\{ \int_0^t (1 - (\varkappa - 1)\theta(\tau)) d\tau \right\}}{1 + S_0 \int_0^t \exp \left\{ \int_0^\tau (1 - (\varkappa - 1)\theta(\sigma)) d\sigma \right\} d\tau}, \quad S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^0. \quad (2.33)$$

Проанализируем поведение при $t \rightarrow +\infty$ функции (2.33). Из уже доказанного свойства $\theta(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$, очевидным образом выводим:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int_0^t (1 - (\varkappa - 1)\theta(\tau)) d\tau \right\} &\rightarrow +\infty, \\ \int_0^t \exp \left\{ \int_0^\tau (1 - (\varkappa - 1)\theta(\sigma)) d\sigma \right\} d\tau &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому в силу правила Лопиталя

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S_{**}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S_0(1 - (\varkappa - 1)\theta(t))}{S_0} = 1.$$

А отсюда и из (2.12), (2.29), (2.32) требуемое предельное равенство для $S(t)$ вытекает автоматически.

Перейдем теперь ко второму из указанных в лемме случаев и заметим, что, как и выше, тождества $\eta_n(t) \equiv 0$ при всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}$ очевидным образом следуют из структуры правых частей системы (2.1). Поэтому в доказательстве нуждаются только предельные соотношения из (2.24).

Покажем сначала, что в данном случае

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{k}{k + \varkappa - 1}. \quad (2.34)$$

В связи с этим снова обратимся к дифференциальному уравнению для $S(t)$ из (2.15), которое теперь принимает вид

$$\dot{S}(t) = S(t) - S^2(t) - (\varkappa - 1) \sum_{j=1}^k \eta_{n_j}^2(t),$$

и учтем в его правой части оценку

$$\sum_{j=1}^k \eta_{n_j}^2(t) \geq \frac{1}{k} S^2(t),$$

справедливую в силу выпуклости функции $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. В результате получаем дифференциальное неравенство

$$\dot{S}(t) \leq S(t) - \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{k}\right) S^2(t)$$

и, соответственно, оценку

$$S(t) \leq \bar{S}(t), \quad t \geq 0, \quad (2.35)$$

где $\bar{S}(t)$ – решение задачи Коши

$$\dot{S} = S - \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{k}\right) S^2, \quad S|_{t=0} = \sum_{j=1}^k \eta_{n_j}^0 > 0. \quad (2.36)$$

Для того чтобы установить на $S(t)$ аналогичную оценку снизу, рассмотрим вытекающую из (2.25), (2.35) серию дифференциальных неравенств

$$\dot{\eta}_{n_j} \geq (1 - \bar{S}(t) - (\varkappa - 1)\eta_{n_j})\eta_{n_j}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Заметим, далее, что каждое из них приводит к соответствующей оценке

$$\eta_{n_j}(t) \geq \underline{\eta}_{n_j}(t), \quad t \geq 0,$$

где $\underline{\eta}_{n_j}(t)$ – функция, определяемая посредством аналогичных (2.26) равенств

$$\begin{aligned} \underline{\eta}_{n_j}(t) &= \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{\underline{\phi}(t)}{\underline{\psi}(t)} \left(1 + \frac{1}{(\varkappa - 1)\eta_{n_j}^0 \underline{\psi}(t)}\right)^{-1}, \\ \underline{\phi}(t) &= \exp\left\{\int_0^t (1 - \bar{S}(\tau)) d\tau\right\}, \quad \underline{\psi}(t) = \int_0^t \underline{\phi}(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.37)$$

И, наконец, полагая $\underline{S}(t) = \sum_{j=1}^k \underline{\eta}_{n_j}(t)$, приходим к выводу, что

$$\underline{S}(t) \leq S(t), \quad t \geq 0. \quad (2.38)$$

Остановимся на характере поведения функций $\bar{S}(t)$, $\underline{S}(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Для первой из них очевидным образом имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{S}(t) = \frac{k}{k + \varkappa - 1}, \quad (2.39)$$

так как она является решением задачи Коши (2.36). Далее, используя (2.39) в формулах для $\underline{\phi}(t)$ и $\underline{\psi}(t)$ из (2.37), убеждаемся, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{\phi}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{\psi}(t) = +\infty. \quad (2.40)$$

А отсюда, применяя правило Лопиталя, последовательно находим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{\eta}_{n_j}(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{\underline{\phi}(t)}{\underline{\psi}(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varkappa - 1} (1 - \bar{S}(t)) \\ &= \frac{1}{k + \varkappa - 1}, \quad j = 1, \dots, k; \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{S}(t) &= \frac{k}{k + \varkappa - 1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Остается заметить, что из всей совокупности установленных фактов (см. (2.35), (2.38)–(2.41)) вытекает требуемое равенство (2.34).

Для завершения обоснования леммы привлечем явные выражения для компонент $\eta_{n_j}(t)$, $j = 1, \dots, k$. Подчеркнем, что они по-прежнему задаются формулами (2.26) (при $n = n_j$) и, в частности, фигурирующие в (2.26) функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ в силу уже установленного предельного равенства (2.34) обладают аналогичными (2.40) свойствами $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$. Тем самым, снова применяя правило Лопиталя, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \eta_{n_j}(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varkappa - 1} (1 - S(t)) \\ &= \frac{1}{k + \varkappa - 1}, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Лемма 2.5 полностью доказана.

Предельные равенства (2.23), реализующиеся для подавляющего большинства траекторий $\eta(t)$ системы (2.1), на первый взгляд кажутся взаимоисключающими. Их одновременное выполнение приводит к следующему весьма парадоксальному свойству.

СЛЕДСТВИЕ 2.5.1. *В первом из рассмотренных в лемме 2.5 случаев ω -предельное множество любой траектории $\eta(t)$ является пустым.*

В предположении противного для некоторой траектории $\eta(t) \in K$, имеющей бесконечное число ненулевых компонент, найдется такая последовательность моментов времени t_k , $k \geq 1$, $t_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, что

$$\eta(t_k) \rightarrow \eta_* = (\eta_1^*, \dots, \eta_n^*, \dots) \in K$$

по норме пространства l (см. (1.3)). Далее, обратимся к серии очевидных неравенств

$$\begin{aligned} \max_{n \geq 1} \eta_n^* &\leq \max_{n \geq 1} \eta_n(t_k) + \max_{n \geq 1} |\eta_n(t_k) - \eta_n^*| \leq \theta(t_k) + \|\eta(t_k) - \eta_*\|, \\ \left| \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^* - 1 \right| &\leq |S(t_k) - 1| + \|\eta(t_k) - \eta_*\| \end{aligned}$$

и перейдем в них к пределу при $k \rightarrow \infty$. В результате с учетом свойств (2.23) и предполагаемого выше условия $\|\eta(t_k) - \eta_*\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, приходим к заключению, что одновременно $\max_{n \geq 1} \eta_n^* = 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n^* = 1$. Полученное противоречие доказывает пустоту ω -предельного множества рассматриваемой траектории $\eta(t)$.

Подведем промежуточный итог. Как уже было отмечено выше, множество (2.16) представляет собой глобальный, некомпактный и бесконечномерный аттрактор полупотока (2.14) в конусе K . Далее, в силу леммы 2.5 и следствия 2.5.1 все сложные траектории из A суть траектории с бесконечным числом ненулевых компонент, для которых реализуется альтернатива 1.3 а) из определения 1.3. Таким образом, установлены утверждения б)–д) теоремы 1.3.

Убедимся теперь, что множество A не будет хаотическим по Девани и Кнудсену. В связи с этим снова обратимся к лемме 2.5, из которой следует, что A не содержит ни одной плотной траектории. Не является также плотной в A и совокупность состояний равновесия (2.17) (других периодических движений у полупотока (2.14) нет). Тем самым, инвариантное множество (2.16) не удовлетворяет условиям 1.1 а), 1.1 б) и 1.2 б) из соответствующих определений 1.1 и 1.2.

Итак, для завершения обоснования теоремы 1.3 осталось показать, что, во-первых, векторы с бесконечным числом ненулевых координат плотны в A (в силу сказанного выше это означает плотность в A сложных траекторий); во-вторых, полупоток φ^t демонстрирует на A свойство существенной зависимости от начальных условий; в-третьих, множество A связно.

Проверка трех перечисленных фактов помимо леммы 2.5 требует некоторой дополнительной информации об аттракторе (2.16). В частности, для каждого входящего в A состояния равновесия $O_{n_1, \dots, n_k}$ (см. (2.17)) необходимо выяснить структуру его локального неустойчивого многообразия $W_{\text{loc}}^u(O_{n_1, \dots, n_k})$, которое по определению есть пересечение $W^u(O_{n_1, \dots, n_k})$ с достаточно малой окрестностью точки $O_{n_1, \dots, n_k}$. В связи с этим обозначим через V пространство векторов v из (2.18) с нормой

$$\|v\| = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \neq n_j, j=1, \dots, k}} |\eta_n|. \quad (2.42)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.6. *Для любого конечного набора натуральных чисел $n_1 < \dots < n_k$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $r_0 = r_0(n_1, \dots, n_k, m) > 0$, что*

$$W_{\text{loc}}^u(O_{n_1, \dots, n_k}) = \left\{ (u, v) : u = \left(-\frac{h_0(v)}{k + 2(\varkappa - 1)} + h_1(v) \right) e, \|v\| \leq r_0 \right\}. \quad (2.43)$$

Здесь u, v – координаты (2.18), линейный функционал $h_0(v)$ и вектор e заимствованы из (2.22), а нелинейный C^m -гладкий функционал $h_1: \{v \in V : \|v\| \leq r_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ таков, что $h_1(0) = 0$, $h'_1(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведенная лемма представляет собой вариант известного в гиперболической теории результата о наличии локального неустойчивого многообразия в окрестности седлового состояния равновесия. В случае $\dim W_{\text{loc}}^u < \infty$ имеются различные версии его обоснования (см., например, [52]–[55]). Некоторые из них переносятся и на случай $\dim W_{\text{loc}}^u = \infty$. Таковой, например, является известная схема Перрона (см. [53]), которая заведомо работает и для системы (2.1). Точнее говоря, эту схему надо применять к соответствующему оператору сдвига φ^{-t_0} , $t_0 = \text{const} > 0$. Как отмечено в [53], получающееся в результате инвариантное многообразие отображения φ^{-t_0} на самом деле не зависит от t_0 и является одновременно интегральным многообразием потока φ^t .

Итак, вопрос о существовании у системы (2.1) многообразия $W_{\text{loc}}^u(O_{n_1, \dots, n_k})$ класса C^m при любом фиксированном m не вызывает сомнений. В проверке нуждается лишь справедливость для него весьма специального представления вида (2.43).

Для обоснования требуемого равенства сначала перейдем в системе (2.1) к переменным (2.18), в которых она приобретает вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= - \left(\varkappa u_j + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^k u_m + h_0(v) \right) (u_j + \tilde{\eta}_k), \quad j = 1, \dots, k, \\ \dot{v} &= \frac{\varkappa - 1}{k + \varkappa - 1} v - (\varkappa - 1)v * v - h_0(v)v - v \sum_{j=1}^k u_j, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где, как и в (2.3), операция $*$ означает покоординатное умножение векторов. Далее, заметим, что получившаяся система (2.44) допускает инвариантное многообразие $u_1 = \dots = u_k = z$, $z \in \mathbb{R}$, на котором, в свою очередь, она записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= - [(\varkappa + k - 1)z + h_0(v)](z + \tilde{\eta}_k), \\ \dot{v} &= \frac{\varkappa - 1}{k + \varkappa - 1} v - (\varkappa - 1)v * v - h_0(v)v - kvz. \end{aligned} \quad (2.45)$$

И, наконец, применим к (2.45) метод Перрона или, скажем, схему, предложенную в [55]. В результате убеждаемся, что в достаточно малой окрестности точки $(z, v) = (0, 0)$ у этой системы существует инвариантное многообразие

$$(z, v) : z = - \frac{h_0(v)}{k + 2(\varkappa - 1)} + h_1(v), \quad \|v\| \leq r_0. \quad (2.46)$$

Здесь $h_0(v)$ – линейный функционал из (2.21), $\|\cdot\|$ – норма (2.42), а нелинейный функционал $h_1(v)$ определен на множестве $\{v \in V : \|v\| \leq r_0\}$ и имеет гладкость C^m , где m – произвольно фиксированное натуральное число (от выбора которого, вообще говоря, зависит фигурирующая в (2.46) величина r_0). Кроме того, $h_1(v)$ обладает нужными свойствами $h_1(0) = 0$, $h'_1(0) = 0$.

Возвращаясь к исходной системе (2.44), заметим, что многообразию (2.46) в ней соответствует инвариантное множество

$$(u, v) : u = \left(-\frac{h_0(v)}{k + 2(\varkappa - 1)} + h_1(v) \right) e, \quad \|v\| \leq r_0, \quad (2.47)$$

где, напомним, e – вектор из $\mathbb{R}^k$ вида $\text{colon}(1, \dots, 1)$. Остается добавить, что инвариантное многообразие (2.47) совпадает с интересующим нас многообразием $W_{\text{loc}}^u(O_{n_1, \dots, n_k})$ (в силу единственности последнего). Лемма 2.6 доказана.

Для формулировки очередного утверждения нам потребуются глобальные аналоги многообразий (2.43), которые определяются следующим образом. Зафиксируем произвольно начальный вектор $\eta_0 \in W_{\text{loc}}^u(O_{n_1, \dots, n_k}) \cap K$ и рассмотрим соответствующее решение $\eta(t, \eta_0)$ задачи Коши (2.2), (2.4), существующее на полуоси $t \in \mathbb{R}_+$ (см. лемму 2.4). Объединение всех таких траекторий обозначим через $\widetilde{W}^u(O_{n_1, \dots, n_k})$ и будем называть глобальным неустойчивым многообразием состояния равновесия $O_{n_1, \dots, n_k}$.

ЛЕММА 2.7. *Аттрактор (2.16) допускает представление вида*

$$A = \bigcup_{n_1 < \dots < n_k} \widetilde{W}^u(O_{n_1, \dots, n_k}). \quad (2.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сразу, что включение

$$\bigcup_{n_1 < \dots < n_k} \widetilde{W}^u(O_{n_1, \dots, n_k}) \subset A$$

очевидно. Поэтому для обоснования леммы достаточно показать, что произвольная траектория $\eta(t)$ системы (2.1) с начальным условием $\eta(0) = \eta_0$ из множества A определена на всей оси $\mathbb{R}$, а при $t \rightarrow -\infty$ стремится к одному из состояний равновесия (2.17).

Прежде всего убедимся, что на A полупоток (2.14) допускает естественное расширение до потока φ^t , $t \in \mathbb{R}$. Для этого воспользуемся леммой 2.1, из которой следует, что на данном множестве определен оператор φ^{-t} , $t \in [0, t_0]$, где $t_0 = t_0(A) > 0$. Далее, применяя отображение φ^{-t} к очевидному равенству $\varphi^t(A) = A$, $t \geq 0$, и учитывая свойство $\varphi^{-t} \circ \varphi^t = I$, приходим к выводу, что $\varphi^{-t}(A) = A$ при всех $t \in [0, t_0]$. А отсюда по индукции имеем $\varphi^{-nt}(A) = A$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, t_0]$, что эквивалентно соотношению $\varphi^{-t}(A) = A$ при любом $t \geq 0$.

На следующем этапе зафиксируем произвольно траекторию $\eta(t) \in A$ и возьмем любую ее компоненту $\eta_n(t)$, для которой $\eta_n(0) = \eta_n^0 > 0$. Заметим, далее, что $\eta_n(t)$ по-прежнему задается формулами (2.26). Однако теперь мы можем гарантировать выполнение условий

$$1 - S(t) \geq 0, \quad \psi(t) + \frac{1}{(\varkappa - 1)\eta_n^0} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

Действительно, из оценок (2.12) и (2.15) заключаем, что

$$A \subset K \cap \left\{ \eta \in l : \frac{1}{\varkappa} \leq \|\eta\| \leq 1 \right\}. \quad (2.50)$$

А отсюда и из соотношения $S(t) = \|\eta(t)\|$ вытекает первое свойство (2.49). Второе же из этих свойств – следствие формулы

$$\psi(t) + \frac{1}{(\varkappa - 1)\eta_n^0} = \frac{1}{\varkappa - 1} \frac{\phi(t)}{\eta_n(t)}$$

и того факта, что рассматриваемая траектория $\eta(t)$ определена при всех $t \in \mathbb{R}$.

Установленные неравенства (2.49) позволяют разобраться с поведением при $t \rightarrow -\infty$ функций $\phi(t)$, $\psi(t)$ из (2.26). Действительно, обратимся сначала к $\psi(t)$ и заметим, что в силу свойств $\dot{\psi}(t) = \phi(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и $\psi(0) = 0$ и теоремы Вейерштрасса $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = -\psi_*$, где $0 < \psi_* \leq +\infty$. Далее, нетрудно увидеть, что предположение $\psi_* = +\infty$ противоречит второй оценке из (2.49). Тем самым, убеждаемся, что

$$\psi(t) \searrow -\psi_*, \quad t \rightarrow -\infty, \quad (2.51)$$

где $\psi_* \in (0, +\infty)$.

Рассмотрим теперь функцию $\phi(t)$, для которой очевидным образом имеем $\dot{\phi}(t) = (1 - S(t))\phi(t) \geq 0$, $\phi(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому, снова опираясь на теорему Вейерштрасса, заключаем, что $\phi(t) \rightarrow \phi_*$, $t \rightarrow -\infty$, где $\phi_* \geq 0$. Однако в случае $\phi_* > 0$ автоматически $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi(t) = -\infty$, что, как уже было сказано выше, невозможно. Поэтому с необходимостью

$$\phi(t) \searrow 0, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (2.52)$$

Используя свойство (2.51) и переходя к пределу при $t \rightarrow -\infty$ во втором неравенстве из (2.49), для любой нулевой компоненты η_n^0 начального вектора $\eta(0)$ получаем оценку

$$(\varkappa - 1)\psi_*\eta_n^0 \leq 1. \quad (2.53)$$

Ясно также, что соответствующее равенство $(\varkappa - 1)\psi_*\eta_n^0 = 1$ может выполняться лишь для конечного числа номеров n , которые обозначим через $n_1 < \dots < n_k$. Далее, представим вектор-функцию $\eta(t)$ в виде суммы

$$\eta(t) = \eta^{(1)}(t) + \eta^{(2)}(t), \quad \eta^{(j)}(t) = (\eta_1^{(j)}(t), \dots, \eta_n^{(j)}(t), \dots), \quad j = 1, 2, \quad (2.54)$$

где

$$\eta_n^{(1)}(t) = \begin{cases} \eta_n(t) & \text{при } n = n_s, \quad s = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{при } n \in \mathbb{N} \setminus \{n_s\}, \end{cases} \quad \eta^{(2)}(t) = \eta(t) - \eta^{(1)}(t),$$

и покажем, что $\|\eta^{(2)}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Для проверки требуемого факта вновь обратимся к формулам (2.26), из которых при каждом $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_s\}$ с учетом (2.51), (2.53) имеем

$$\eta_n(t) = \frac{\eta_n^0 \phi(t)}{1 + (\varkappa - 1)\psi(t)\eta_n^0} < \frac{\eta_n^0 \phi(t)}{1 - (\varkappa - 1)\psi_*\eta_n^0} \leq \frac{\eta_n^0 \phi(t)}{1 - \max_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n_s\}} (\varkappa - 1)\psi_*\eta_m^0}.$$

А отсюда и из (2.52), в свою очередь, следует, что

$$\|\eta^{(2)}(t)\| \leq \frac{\phi(t)}{1 - \max_{m \in \mathbb{N} \setminus \{n_s\}} (\varkappa - 1)\psi_*\eta_m^0} \|\eta^{(2)}(0)\| \rightarrow 0 \quad (2.55)$$

при $t \rightarrow -\infty$.

Рассмотрим теперь конечномерное слагаемое $\eta^{(1)}(t)$ из (2.54). Заметим сразу, что $\eta^{(1)}(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ (в противном случае $\eta^{(1)}(t) \equiv 0$, что в совокупности с (2.55) противоречит включению (2.50)). Далее, из соотношений

$$\eta_{n_s}^0 = \frac{1}{(\varkappa - 1)\psi_*}, \quad s = 1, \dots, k,$$

и формул (2.26) вытекают тождества $\eta_{n_1}(t) \equiv \dots \equiv \eta_{n_k}(t)$. Тем самым, вектор-функция $\eta^{(1)}(t)$ принадлежит одномерному подпространству

$$\{\eta \in l : \eta_n = 0 \text{ при } n \in \mathbb{N} \setminus \{n_s\}, \eta_{n_1} = \dots = \eta_{n_k} = z, z \in \mathbb{R}\} \quad (2.56)$$

исходного фазового пространства l , а точнее говоря, ограниченной его части, которой в силу (2.50) соответствуют значения переменной z из отрезка

$$\frac{1}{k\varkappa} \leq z \leq \frac{1}{k}. \quad (2.57)$$

Из представления (2.54) следует, что α -предельное множество Λ траектории $\eta(t)$ заведомо не пусто. В самом деле, в силу (2.55) оно совпадает с множеством частичных пределов при $t \rightarrow -\infty$ конечномерной составляющей $\eta^{(1)}(t)$, которая, напомним, содержится в компактном подмножестве (2.56), (2.57) фазового пространства. Кроме того, уместно отметить, что подпространство (2.56) является инвариантным для системы (2.1), а движения на нем описываются скалярным уравнением

$$\dot{z} = [1 - (k + \varkappa - 1)z]z. \quad (2.58)$$

Суммируя все вышесказанное, приходим к выводу, что любая точка $\eta_* = (\eta_1^*, \dots, \eta_n^*, \dots) \in \Lambda$ имеет координаты: $\eta_{n_s}^* = z_0$, $s = 1, \dots, k$, $\eta_n^* = 0$ при $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_s\}$, где z_0 принадлежит отрезку (2.57). Далее, поскольку множество Λ инвариантно для потока φ^t при $t \in \mathbb{R}$, то решение $z = z(t)$ уравнения (2.58) с начальным условием $z(0) = z_0$ должно быть таким, что $1/(k\varkappa) \leq z(t) \leq 1/k$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Но этому условию удовлетворяет, очевидно, лишь одна точка $z_0 = 1/(k + \varkappa - 1)$. Следовательно, и само множество Λ состоит из одной точки $O_{n_1, \dots, n_k}$. Лемма 2.7 доказана.

Установленная лемма позволяет уже достаточно просто обосновать три оставшихся утверждения теоремы 1.3, которые удобно оформить в виде соответствующих следствий.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.1. Пусть A_* и A_{**} – подмножества A , состоящие из векторов с бесконечным и конечным числом ненулевых компонент соответственно. Тогда $\bar{A}_* = \bar{A}_{**} = A$.

Действительно, оба множества A_* и A_{**} плотны в $W_{\text{loc}}^u(O_{n_1, \dots, n_k})$ при любых $n_1 < \dots < n_k$, что очевидным образом следует из представлений (2.43). Поэтому они оказываются плотными в каждом многообразии $\widetilde{W}^u(O_{n_1, \dots, n_k})$, а значит, и в их объединении, которое в силу (2.48) совпадает с A .

СЛЕДСТВИЕ 2.7.2. Полупоток (2.14) на аттракторе (2.16) обладает свойством существенной зависимости от начальных условий.

Для проверки этого факта фиксируем произвольно траекторию $\tilde{\eta}(t) \in A$ и положительное число δ . Предположим сначала, что $\tilde{\eta}(t)$ имеет лишь конечное число ненулевых компонент $\tilde{\eta}_n(t)$ с номерами $n_1 < \dots < n_k$. В этом случае подберем вектор $\tilde{\eta} \in A$ с бесконечным числом ненулевых координат, удовлетворяющий неравенству $\|\tilde{\eta}(0) - \tilde{\eta}\| < \delta$ (в силу следствия 2.7.1 такой вектор заведомо существует). Далее, обозначим через $\tilde{\eta}(t) \in A$ решение уравнения (2.2) с начальным условием $\tilde{\eta}(0) = \tilde{\eta}$ и заметим, что вне зависимости от малости δ с ростом t траектории $\tilde{\eta}(t)$ и $\tilde{\eta}(t)$ расходятся на некоторое конечное расстояние. Точнее говоря, из леммы 2.6 следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{\eta}(t) - \tilde{\eta}(t)\| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sum_{j=1}^k |\tilde{\eta}_{n_j}(t) - \tilde{\eta}_{n_j}(t)| + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}} |\tilde{\eta}_n(t)| \right) \\ &= \frac{k}{k + \varkappa - 1} + 1 \geq 1 + \frac{1}{\varkappa}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

В случае, когда $\tilde{\eta}(t)$ имеет бесконечно много ненулевых компонент, рассуждения аналогичны. А именно, снова опираясь на следствие 2.7.1, в качестве $\tilde{\eta}$ возьмем вектор из A уже с конечным числом ненулевых координат, для которого по-прежнему $\|\tilde{\eta}(0) - \tilde{\eta}\| < \delta$. Нетрудно заметить, что, как и ранее, справедливо предельное соотношение $\|\tilde{\eta}(t) - \tilde{\eta}(t)\| \rightarrow k/(k + \varkappa - 1) + 1$, $t \rightarrow +\infty$, где k – количество ненулевых компонент у вектора $\tilde{\eta}$.

Объединяя рассмотренные случаи, приходим к выводу о справедливости для полупотока (2.14) на инвариантном множестве A требуемого свойства существенной зависимости от начальных условий. Что же касается постоянной неустойчивости Δ , то в силу (2.59) ее можно положить равной любому числу из интервала $(0, 1 + 1/\varkappa)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7.3. *Аттрактор (2.16) является связным.*

В силу замкнутости множества A для доказательства его связности следует убедиться, что оно не представимо в виде объединения $A_1 \cup A_2$ двух непересекающихся и непустых замкнутых подмножеств A_1, A_2 . Предположим, далее, что это не так и $A = A_1 \cup A_2$. Тогда каждое из множеств A_1, A_2 будет инвариантным для потока φ^t , $t \in \mathbb{R}$.

Действительно, пусть, к примеру, требуемое свойство инвариантности нарушается для A_1 . В этом случае найдутся такое решение $\eta(t) \in A$ уравнения (2.2) и такие два момента времени $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, что $\eta(t_1) \in A_1$, $\eta(t_2) \in A_2$. Далее, обозначим через Γ отрезок кривой $\{\eta = \eta(t) : t \in \mathbb{R}\}$, отвечающий значениям $t_1 \leq t \leq t_2$ (или $t_2 \leq t \leq t_1$, если $t_2 < t_1$), и заметим, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_j = A_j \cap \Gamma$, $j = 1, 2$. Тем самым, заведомо связное множество Γ удастся представить в виде объединения двух непересекающихся и непустых замкнутых множеств Γ_1, Γ_2 . Полученное противоречие доказывает инвариантность A_1 .

На следующем этапе доказательства зафиксируем произвольно элементы $\eta^{(j)} \in A_j$, $j = 1, 2$, и обозначим через $\eta^{(j)}(t)$, $j = 1, 2$, решения уравнения (2.2) с начальными условиями $\eta^{(j)}(0) = \eta^{(j)}$, $j = 1, 2$. Как уже было сказано выше, при всех $t \in \mathbb{R}$ справедливы включения $\eta^{(j)}(t) \in A_j$, $j = 1, 2$. Кроме того, в силу леммы 2.7 при $t \rightarrow -\infty$ имеем $\eta^{(j)}(t) \rightarrow O^{(j)}$, $j = 1, 2$, где $O^{(1)}, O^{(2)}$ –

некоторые состояния равновесия семейства (2.17). А отсюда, в свою очередь, выводим, что $O^{(j)} \in A_j$, $j = 1, 2$.

Покажем, далее, что не только сами состояния равновесия $O^{(1)}$, $O^{(2)}$ принадлежат соответствующим множествам A_1 , A_2 , но и

$$\widetilde{W}^u(O^{(j)}) \subset A_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.60)$$

Для этого убедимся сначала, что, например, $W_{\text{loc}}^u(O^{(1)}) \cap K \subset A_1$ при подходящем уменьшении фигурирующего в (2.43) радиуса r_0 . В предположении противного множество $W_{\text{loc}}^u(O^{(1)}) \cap K$ содержит точки из A_2 , сколь угодно близкие к состоянию равновесия $O^{(1)}$, но не совпадающие с ним. А это значит, что $O^{(1)}$ – предельная точка для A_2 и, следовательно, она лежит в $A_1 \cap A_2$. Последнее же противоречит условию $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Итак, мы доказали, что $W_{\text{loc}}^u(O^{(1)}) \cap K \subset A_1$. А отсюда в силу инвариантности множества A_1 автоматически вытекает нужное включение $\widetilde{W}^u(O^{(1)}) \subset A_1$. Что же касается второго свойства (2.60), то оно проверяется аналогично.

На завершающем этапе обоснования следствия 2.7.3 нам потребуется еще одно состояние равновесия из семейства (2.17), которое обозначим через $O^{(3)}$ и определим следующим образом. Пусть $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}$ – совокупности номеров, отвечающих ненулевым координатам точек $O^{(1)}$ и $O^{(2)}$, а $\mathbb{N}_3$ – аналогичное множество индексов для $O^{(3)}$. Тогда по определению $\mathbb{N}_3 = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$.

Состояние равновесия $O^{(3)}$, введенное описанным выше способом, обладает следующим интересным свойством: в каждом из множеств $\widetilde{W}^u(O^{(j)})$, $j = 1, 2$, найдется траектория уравнения (2.2), стремящаяся к $O^{(3)}$ при $t \rightarrow +\infty$.

Для проверки этого свойства рассмотрим точки

$$\eta_0^{(j)} = (\eta_1^{0,j}, \dots, \eta_n^{0,j}, \dots) \in W_{\text{loc}}^u(O^{(j)}) \cap K, \quad j = 1, 2,$$

у которых

$$\begin{aligned} \eta_n^{0,1} &= \varepsilon & \text{при } n \in \mathbb{N}_2 \setminus \mathbb{N}_1, \\ \eta_n^{0,2} &= \varepsilon & \text{при } n \in \mathbb{N}_1 \setminus \mathbb{N}_2, \\ \eta_n^{0,j} &= 0 & \text{при } n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_3, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Заметим, далее, что искомые траектории – это соответствующие решения $\eta(t, \eta_0^{(j)})$, $\eta(0, \eta_0^{(j)}) = \eta_0^{(j)}$, $j = 1, 2$, уравнения (2.2). Действительно, в силу леммы 2.6 для них выполняются требуемые предельные равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \eta(t, \eta_0^{(j)}) = O^{(3)}, \quad j = 1, 2. \quad (2.61)$$

Подведем итог. Из свойств (2.60), (2.61) и из замкнутости множеств A_1 , A_2 очевидным образом имеем $O^{(3)} \in A_1 \cap A_2$. А это противоречит исходному предположению о пустоте $A_1 \cap A_2$. Тем самым, установлено, что аттрактор A является связным.

В заключение остановимся на некоторых дополнительных свойствах инвариантного множества (2.16), не вошедших в теорему 1.3. Как оказывается,

в определенном смысле его можно рассматривать как некий аналог канторова множества. Точнее говоря, оно совершенно, нигде не плотно в конусе K и фрактально.

Первые два из упомянутых свойств достаточно просто вытекают из представления (2.48). В самом деле, из (2.48) автоматически следует, что множество A не может иметь изолированных точек, а значит, по определению совершенно. Далее, если предположить, что A не является нигде не плотным, то в силу своей замкнутости оно должно содержать некоторый замкнутый шар $\Omega \subset K$ положительного радиуса. Но тогда из (2.48) для этого шара получается представление

$$\Omega = \bigcup_{n_1 < \dots < n_k} \Omega_{n_1, \dots, n_k}, \quad \Omega_{n_1, \dots, n_k} = \Omega \cap \widetilde{W}^u(O_{n_1, \dots, n_k}),$$

противоречащее теореме Бэра. Действительно, полное метрическое пространство Ω (с метрикой, порожденной нормой (1.3)) оказалось представленным в виде счетного объединения компактных (а значит, нигде не плотных) подмножеств $\Omega_{n_1, \dots, n_k}$, что, очевидно, невозможно.

Последнее из свойств, а именно фрактальность, требует некоторых уточнений. Связано это с тем, что не существует универсального математического определения фрактальности. Мы же будем исходить из интуитивного представления об этом свойстве, которое можно сформулировать так: часть подобна целому.

Перейдем к аккуратным формулировкам. Через l_0 обозначим подпространство исходного пространства l , задаваемое равенством

$$l_0 = \{\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \in l : \eta_n = 0 \text{ при } n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0\}, \quad (2.62)$$

где $\mathbb{N}_0 = \{n_k : k \geq 1\}$, а $n_1 < \dots < n_k < \dots$ — произвольно фиксированная бесконечная последовательность натуральных чисел. Заметим, далее, что пространства l_0 и l изоморфны, а взаимно однозначное соответствие между их элементами осуществляет оператор $\Pi: l_0 \rightarrow l$, определяемый по правилу:

$$\Pi\eta = (\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_k}, \dots) \in l \quad \forall \eta \in l_0. \quad (2.63)$$

Как уже говорилось при доказательстве леммы 2.5, подпространство (2.62) инвариантно для решений системы (2.1). Более того, если учесть в (2.1) равенства $\eta_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$, то для оставшихся переменных η_{n_k} , $k \geq 1$, получится в точности исходная система. А отсюда автоматически следует, что аттрактор A самой системы (2.1) и аттрактор $A_0 = A \cap l_0$ ее сужения на l_0 связаны соотношением

$$\Pi(A_0) = A, \quad (2.64)$$

где Π — изоморфизм (2.63).

Итак, любое подмножество вида $A \cap l_0$ аттрактора A оказывается изоморфным исходному множеству. А это, собственно, и означает, что имеет место требуемое свойство фрактальности.

2.3. Регуляризация турбулентного хаоса. В этом пункте зададимся вопросом о том, каким образом можно подавить турбулентные движения в системе (2.1). Как будет показано ниже, добиться желаемого результата удастся по крайней мере двумя способами. Один из них – учет в правых частях из (2.1) дополнительных линейных слагаемых, которые в гидродинамической интерпретации соответствуют малой вязкости.

Зафиксируем произвольно последовательность чисел $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, обладающую свойствами

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lambda_n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (2.65)$$

и рассмотрим систему

$$\dot{\eta}_n = \left[1 - \nu \lambda_n - \varkappa \eta_n - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \eta_k \right] \eta_n, \quad n \geq 1, \quad (2.66)$$

где по-прежнему $\varkappa > 1$, а ν – положительная постоянная, которую назовем параметром регуляризации.

Остановимся на некоторых свойствах введенной системы (2.66). В связи с этим обратим внимание, что в силу (2.65) неограниченный оператор

$$L: (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) \rightarrow ((1 - \nu \lambda_1) \eta_1, \dots, (1 - \nu \lambda_n) \eta_n, \dots),$$

фигурирующий в ее линейной части, плотно определен в l , является генератором аналитической полугруппы $\exp(Lt)$, $t \geq 0$, класса C^0 и имеет компактную резольвенту. Таким образом, согласно [56], система (2.66) представляет собой абстрактное полулинейное параболическое уравнение в пространстве l , а значит, для нее заведомо справедливы утверждения общего характера, содержащиеся в леммах 2.1–2.3. Более того, остается в силе и лемма 2.4, так как здесь для функции (2.10) при $t > 0$ по-прежнему выполняются дифференциальное неравенство (2.11) и априорная оценка (2.12).

Из перечисленных свойств следует, что система (2.66) порождает в конусе K непрерывный полупоток φ^t , задающийся равенством (2.14), и более того, имеет в K аналогичный (2.16) глобальный аттрактор

$$A_\nu = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \left\{ \eta \in K : \|\eta\| < \frac{3}{2} \right\}. \quad (2.67)$$

Заметим, далее, что поскольку в рассматриваемом случае полупоток φ^t является компактным (при любом $t > 0$ отображение φ^t переводит произвольное ограниченное множество $B \subset K$ в предкомпактное), то компактным будет и аттрактор (2.67). Следовательно, он заведомо не может содержать турбулентных движений, т. е. траекторий с пустым ω -предельным множеством.

Итак, при $\nu > 0$ в системе (2.66) происходит требуемая регуляризация турбулентного хаоса. Однако, возникает естественный вопрос о структуре самого аттрактора (2.67) и о характере бифуркаций, происходящих в нем при стремлении параметра регуляризации к нулю. Для формулировки соответствующего

результата введем в рассмотрение монотонно убывающую последовательность

$$\bar{\nu}_N = (\kappa - 1) \left[(N + \kappa - 1) \lambda_N - \sum_{k=1}^N \lambda_k \right]^{-1}, \quad N \geq 1. \quad (2.68)$$

Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.8. *Предположим, что параметр ν удовлетворяет условиям*

$$\bar{\nu}_{N+1} < \nu < \bar{\nu}_N \quad (2.69)$$

при некотором $N \geq 1$. Тогда аттрактор (2.67) содержит экспоненциально устойчивое состояние равновесия O_N с координатами $\eta_n = \eta_n^*$, $n \geq 1$, где

$$\eta_n^* = \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{\kappa - 1}{N + \kappa - 1} + \frac{\nu}{N + \kappa - 1} \sum_{k=1}^N \lambda_k - \nu \lambda_n \right) \quad \text{при } n = 1, \dots, N; \quad (2.70)$$

$$\eta_n^* = 0 \quad \text{при } n \geq N + 1.$$

Все же остальные возможные состояния равновесия, входящие в A_ν , экспоненциально неустойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факт существования у системы (2.66) при $\nu \in [0, \bar{\nu}_N]$ состояния равновесия O_N проверяется непосредственно. Что же касается системы в вариациях на нем, то в переменных

$$u = \text{colon}(u_1, \dots, u_N), \quad u_j = \eta_j - \eta_j^*, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$v = \{\eta_n : n \geq N + 1\}$$

она имеет аналогичную (2.19) треугольную структуру. Поэтому в конечном итоге проблема устойчивости O_N сводится к анализу соответствующих подсистем для u и v . Первая из этих подсистем, получающаяся из полной системы в вариациях при $v = 0$, имеет вид

$$\dot{u} = Cu, \quad (2.71)$$

где элементы $c_{j,r}$ матрицы C таковы, что

$$c_{j,j} = -\kappa \eta_j^*, \quad c_{j,r} = -\eta_j^*, \quad j, r = 1, \dots, k, \quad j \neq r.$$

Вторая же распадается на серию скалярных уравнений

$$\dot{\eta}_m = \left(1 - \sum_{k=1}^N \eta_k^* - \nu \lambda_m \right) \eta_m, \quad m \geq N + 1. \quad (2.72)$$

Исследование устойчивости решений системы (2.71) связано, очевидно, с изучением расположения корней соответствующего характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - C) = 0, \quad (2.73)$$

где I – единичная матрица. Покажем, что все они вещественны и отрицательны.

Для того чтобы раскрыть определитель в уравнении (2.73), сначала вычтем его последний столбец из всех предыдущих. После этого добавим к последней строке получившегося определителя все остальные его строки, каждая из которых умножена соответственно на

$$\frac{(\varkappa - 1)\eta_N^* + \lambda}{(\varkappa - 1)\eta_j^* + \lambda}, \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

В итоге интересующее нас уравнение преобразуется к более удобному для последующего анализа виду

$$(\lambda + (\varkappa - 1)\eta_1^*) \cdots (\lambda + (\varkappa - 1)\eta_N^*) \left[1 + \sum_{j=1}^N \frac{\eta_j^*}{\lambda + (\varkappa - 1)\eta_j^*} \right] = 0. \quad (2.74)$$

Нетрудно заметить, что в силу вытекающих из (2.65), (2.70) неравенств $\eta_n^* > \eta_{n+1}^*$, $n = 1, \dots, N - 1$, числа $\lambda = -(\varkappa - 1)\eta_j^*$, $j = 1, \dots, N$, не являются решениями уравнения (2.74), а значит, оно эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^N \frac{\eta_j^*}{\lambda + (\varkappa - 1)\eta_j^*} = -1. \quad (2.75)$$

Последнее же имеет на полуоси $\lambda < 0$ ровно N различных корней, так как входящая в левую часть (2.75) функция на интервалах

$$(-(\varkappa - 1)\eta_j^*, -(\varkappa - 1)\eta_{j+1}^*), \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad \text{и} \quad (-\infty, -(\varkappa - 1)\eta_1^*)$$

монотонно меняется в пределах от $+\infty$ до $-\infty$ и от 0 до $-\infty$ соответственно.

Анализ свойств устойчивости уравнений (2.72) тривиален. Действительно, опираясь на формулы (2.68), (2.70), приходим к выводу, что

$$\max_{m \geq N+1} \left(1 - \sum_{k=1}^N \eta_k^* - \nu \lambda_m \right) = \frac{\varkappa - 1}{N + \varkappa - 1} \left(1 - \frac{\nu}{\bar{\nu}_{N+1}} \right).$$

А отсюда очевидным образом следует, что интересующее нас состояние равновесия O_N экспоненциально устойчиво (неустойчиво) при $\nu - \bar{\nu}_{N+1} > 0$ (< 0).

Убедимся теперь, что каждое состояние равновесия $O \in K$, $O \neq O_N$, при условиях (2.69) экспоненциально неустойчиво. Из структуры правых частей системы (2.66) вытекает, что любое такое состояние равновесия имеет лишь конечное число ненулевых координат η_{n_j} , $j = 1, \dots, k$, где $n_1 < \dots < n_k$ – некоторый фиксированный набор натуральных чисел. Как показывает непосредственная проверка, для этих координат справедливы равенства

$$\eta_{n_j} = \frac{1}{\varkappa - 1} (1 - S - \nu \lambda_{n_j}), \quad S = \frac{1}{k + \varkappa - 1} \left(k - \nu \sum_{m=1}^k \lambda_{n_m} \right), \quad (2.76)$$

$j = 1, \dots, k$, а требование $\min_j \eta_{n_j} > 0$ эквивалентно условиям

$$0 \leq \nu < \nu_* = (\varkappa - 1) \left[(k + \varkappa - 1) \lambda_{n_k} - \sum_{m=1}^k \lambda_{n_m} \right]^{-1}. \quad (2.77)$$

В случае $O = O_n$ при некотором $n \neq N$ факт неустойчивости состояния равновесия O вытекает из проделанного выше анализа. Если же $O \neq O_n$ при всех n , то обязательно найдется такой номер m_0 , что $m_0 < n_k$, $m_0 \neq n_j$, $j = 1, \dots, k$. Линеаризуем исходную систему (2.66) на этом состоянии равновесия и из получившейся системы в вариациях возьмем только одно уравнение для компоненты η_{m_0} с указанным выше номером m_0 . Нетрудно заметить, что данное уравнение имеет вид

$$\dot{\eta}_{m_0} = (1 - S - \nu \lambda_{m_0}) \eta_{m_0}, \quad (2.78)$$

а из формул (2.76), условий (2.77) и неравенства $m_0 < n_k$ вытекает строгая положительность фигурирующей в (2.78) величины $1 - S - \nu \lambda_{m_0}$. Лемма 2.8 доказана.

В дополнение к установленной лемме отметим, что при $\nu = \bar{\nu}_N$ состояние равновесия O_N “влипает” в аналогичную неподвижную точку O_{N-1} , так как в этом случае обращается в нуль компонента η_N^* из (2.70), а все остальные координаты η_n^* , $n = 1, \dots, N-1$, остаются положительными и совпадают с координатами точки O_{N-1} . Таким образом, при $\nu \rightarrow 0$ в аттракторе (2.67) наблюдается бесконечная цепочка бифуркаций устойчивых состояний равновесия

$$O_1 \rightarrow \dots \rightarrow O_N \rightarrow O_{N+1} \rightarrow \dots. \quad (2.79)$$

Второй способ регуляризации турбулентного хаоса заключается в переходе от случая $\varkappa > 1$ к значениям $\varkappa$ из интервала

$$0 < \varkappa < 1. \quad (2.80)$$

Убедимся, что при условиях (2.80) система (2.1) уже не допускает турбулентных движений.

Заметим прежде всего, что в случае (2.80) выполняются дифференциальные неравенства

$$S - S^2 \leq \dot{S} \leq S - \varkappa S^2, \quad (2.81)$$

где $S = S(t)$ – функция (2.10). Далее, опираясь на (2.81), нетрудно увидеть, что система (2.1) по-прежнему имеет в конусе K глобальный аттрактор

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \left\{ \eta \in K : \frac{1}{2} < \|\eta\| < \frac{2}{\varkappa} \right\}, \quad (2.82)$$

для которого справедливо аналогичное (2.50) включение

$$A \subset K \cap \left\{ \eta \in l : 1 \leq \|\eta\| \leq \frac{1}{\varkappa} \right\}. \quad (2.83)$$

Ясно также, что, как и ранее, аттрактор (2.82) заведомо содержит все состояния равновесия (2.17). Однако в отличие от случая $\varkappa > 1$ теперь неустойчивое многообразие каждого из них имеет размерность $k - 1$, а устойчивое – бесконечномерно. В частности, устойчивыми будут состояния равновесия из (2.17) вида

$$O_{n_0} = \left\{ (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots) : \eta_n = 0 \quad \forall n \neq n_0, \quad \eta_{n_0} = \frac{1}{\varkappa} \right\}, \quad n_0 = 1, 2, \dots \quad (2.84)$$

Итак, инвариантное множество (2.82) не является хаотическим уже по той причине, что включает счетное число устойчивых состояний равновесия (2.84). Более того, как показывает следующее утверждение, турбулентные движения в нем отсутствуют вообще.

ЛЕММА 2.9. *Любая траектория $\eta(t)$ уравнения (2.2), принадлежащая аттрактору (2.82), при $t \rightarrow +\infty$ стремится к одному из состояний равновесия семейства (2.17).*

Доказательство этой леммы практически дословно повторяет соответствующие места из обоснования леммы 2.7. Действительно, сначала, рассуждая как и выше, убеждаемся, что любая траектория $\eta(t) \in A$ определена при всех $t \in \mathbb{R}$. А отсюда и из (2.83) приходим к аналогичным (2.49) неравенствам

$$1 - S(t) \leq 0, \quad \frac{1}{(1 - \varkappa)\eta_n^0} - \psi(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.85)$$

где η_n^0 – произвольная ненулевая компонента начального вектора $\eta(0)$.

На следующем этапе, снова повторяя соответствующий фрагмент доказательства леммы 2.7, убеждаемся, что из свойств (2.85) и теоремы Вейерштрасса для функций $\phi(t)$, $\psi(t)$ (см. (2.26)) вытекают предельные соотношения

$$\phi(t) \searrow 0, \quad \psi(t) \nearrow \psi_*, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2.86)$$

где $\psi_* \in (0, +\infty)$.

Из второй оценки (2.85) и второго свойства (2.86) имеем

$$(1 - \varkappa)\psi_*\eta_n^0 \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

причем, как нетрудно заметить, соответствующие равенства могут выполняться только для конечного числа номеров n . Обозначим эти номера через $n_1 < \dots < n_k$, затем введем в рассмотрение представление (2.54) и повторим очередной фрагмент обоснования леммы 2.7. В результате убеждаемся, что $\eta(t) \rightarrow O_{n_1, \dots, n_k}$ при $t \rightarrow +\infty$. Лемма 2.9 доказана.

Для полноты изложения добавим, что при $t \rightarrow -\infty$ любая траектория $\eta(t)$ из аттрактора (2.82) ведет себя так, как описано в лемме 2.5. А именно, модифицируя надлежащим образом доказательство этой леммы, можно показать, что в случае, когда начальный вектор $\eta(0)$ имеет конечное число ненулевых координат, она стремится к одному из состояний равновесия (2.17). Если же количество ненулевых компонент у $\eta(0)$ бесконечно, то для $\eta(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ справедливы предельные равенства вида (2.23).

2.4. О некоторых приложениях. Интересно отметить, что изученная нами система (2.1) отнюдь не является чисто умозрительным примером, иллюстрирующим концепцию турбулентного хаоса. Как оказывается, она возникает при анализе автоколебаний в целом ряде математических моделей из различных областей естествознания. Например, конечномерный ее вариант, т. е. система

$$\dot{\eta}_n = \left[1 - \varkappa \eta_n - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \eta_k \right] \eta_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

используется в качестве феноменологической модели взаимодействия нейронов мозга (см. [57]). Что же касается исходной бесконечномерной системы, то она получается в результате применения процедуры формальной нормализации к некоторым краевым задачам гиперболического типа с нерезонансным спектром собственных частот. Две из таких задач приводятся ниже.

Наш первый прикладной пример – краевая задача

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + u = \sigma^2 \Delta u - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(u \int_{\Omega} u^2 dx \right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.87)$$

из математической экономики (см. [58], [59]). Здесь Δ – оператор Лапласа, Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$, с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ – вещественная скалярная функция, ε , σ , ν – положительные параметры, причем $\varepsilon \ll 1$, а σ , ν имеют порядок единицы. Точнее говоря, речь пойдет о динамической системе, порождаемой этой краевой задачей в фазовом пространстве $(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$.

Как показано в работах [58], [59], в результате применения к (2.87) бесконечномерного аналога асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского получается в точности система (2.66), в которой $\varkappa = 3/2$, а λ_n , $n \geq 1$, – занумерованные в порядке возрастания собственные значения оператора $-\Delta$. Заметим, далее, что согласно общим результатам из [60], каждому состоянию равновесия O_N этой системы с компонентами (2.70) в исходной задаче (2.87) соответствует устойчивый N -мерный инвариантный тор (при условии, что параметр ν и последовательность λ_n , $n \geq 1$, удовлетворяют требованиям (2.65) и (2.69)). А отсюда и из (2.79) вытекает, что при согласованном стремлении ε и ν к нулю в краевой задаче (2.87) реализуется цепочка бифуркаций устойчивых инвариантных торов неограниченно возрастающих размерностей или, иными словами, наблюдается сценарий развития турбулентности по Ландау [61].

Следующий наш пример в чисто математическом плане представляет собой некий упрощенный вариант предыдущего. А именно, на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = \sigma^2 \Delta u - \varepsilon u^2 u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (2.88)$$

где по-прежнему

$$0 < \varepsilon \ll 1, \quad \sigma = \text{const} > 0, \quad (u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, \pi) \times L_2(0, \pi).$$

Отметим, что эта задача моделирует автоколебательные процессы в непрерывной RCL -линии, составленной из туннельных диодов (см. [62], [63]).

Исследование задачи (2.88) содержится в монографии [60], где показано, что при некоторой общности положения, связанной с выбором параметра σ , ее укороченной нормальной формой является система (2.1) при $\varkappa = 3/4$. Таким образом, снова опираясь на содержащиеся в [60] общие результаты о соответствии, приходим к выводу, что любому конечному подсемейству устойчивых состояний равновесия (2.84) этой системы отвечает набор устойчивых периодических движений исходной краевой задачи (2.88). Последнее же означает, что в рамках данной задачи реализуется хорошо известное явление буферности [60], [64].

В заключение сформулируем одну нерешенную проблему. В связи с этим в пространстве l , состоящем из векторов вида

$$\eta = \{\eta_{n,k} : n, k \geq 1\}, \quad \|\eta\| = \sum_{n,k=1}^{\infty} |\eta_{n,k}| < \infty, \quad (2.89)$$

рассмотрим систему

$$\dot{\eta}_{n,k} = \left[1 - \frac{9}{4} \eta_{n,k} - 3 \sum_{m \neq k} \eta_{n,m} - 3 \sum_{m \neq n} \eta_{m,k} - 2 \sum_{m \neq n, r \neq k} \eta_{m,r} \right] \eta_{n,k}, \quad (2.90)$$

$$n, k = 1, 2, \dots$$

Подчеркнем, что эта система, впервые появившаяся в статье [65], получается в процессе применения алгоритма формальной нормализации к краевой задаче (2.88) в двумерной области $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq a_2\}$.

Нетрудно увидеть, что в инвариантном конусе K векторов (2.89) с неотрицательными координатами система (2.90) имеет глобальный аттрактор

$$A \subset \left\{ \eta \in K : \frac{1}{3} \leq \|\eta\| \leq \frac{1}{2} \right\} \quad (2.91)$$

(данный факт – следствие дифференциальных неравенств $S - 3S^2 \leq \dot{S}$ и $\dot{S} \leq S - 2S^2$, где $S = \sum_{n,k} \eta_{n,k}$). Далее, как установлено в [60], [64], любое состояние равновесия этой системы с конечным числом ненулевых координат является неустойчивым и, более того, имеет бесконечномерное неустойчивое многообразие. Ясно также, что упомянутых состояний равновесия счетное число и все они (вместе со своими неустойчивыми многообразиями) содержатся в аттракторе (2.91). Таким образом, как и в случае системы (2.1), инвариантное множество (2.91) заведомо некомпактно и имеет бесконечную хаусдорфову размерность. Однако вопрос о том, будет ли данный аттрактор хаотическим в смысле определения 1.4 и турбулентным, пока открыт.

Пользуясь случаем, выражаем искреннюю благодарность Д. В. Аносову за ряд конструктивных замечаний, касающихся связи определений 1.3, 1.4 с эргодическим, энтропийным и информационным подходами к понятию сложности.

Список литературы

- [1] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley Stud. Nonlinearity, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989.
- [2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, "On Devaney's definition of chaos", *Amer. Math. Monthly*, **99**:4 (1992), 332–334.
- [3] D. Assaf IV, S. Gadbois, "Definition of chaos", *Amer. Math. Monthly*, **99**:9 (1992), 865.
- [4] M. Vellekoop, R. Berglund, "On intervals, transitivity = chaos", *Amer. Math. Monthly*, **101**:4 (1994), 353–355.
- [5] P. Touhey, "Yet another definition of chaos", *Amer. Math. Monthly*, **104**:5 (1997), 411–414.
- [6] C. Knudsen, "Chaos without nonperiodicity", *Amer. Math. Monthly*, **101**:6 (1994), 563–565.
- [7] B. Hasselblatt, A. Katok, *A first course in dynamics. With a panorama of recent developments*, Cambridge Univ. Press, New York, 2003.
- [8] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, НИИ "РХД", М.–Ижевск, 2004; 1-е изд., ОГИЗ, М.–Л., 1947; англ. пер. 1-го изд.: V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Math. Ser., VIII, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1960.
- [9] D. Ruelle, F. Takens, "On the nature of turbulence", *Comm. Math. Phys.*, **20**:3 (1971), 167–192.
- [10] Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, С. В. Шлячков, "Странные аттракторы", *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. направления*, **66**, ВИНТИ, 1991, 100–148; англ. пер.: R. V. Plykin, E. A. Sataev, S. V. Shlyachkov, "Strange attractors", *Dynamical systems IX*, Encyclopaedia Math. Sci., **66**, Springer, Berlin, 1995, 93–139.
- [11] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J. A. Yorke, "Strange attractors that are not chaotic", *Phys. D*, **13**:1–2 (1984), 261–268.
- [12] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, "Ergodic theory of chaos and strange attractors", part 1, *Rev. Modern Phys.*, **57**:3 (1985), 617–656.
- [13] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Texts Appl. Math., **2**, Springer, New York, 1990.
- [14] H. G. Schuster, W. Just, *Deterministic chaos. An introduction*, Wiley–VCH Verlag, Weinheim, 2005.
- [15] P. Collet, J.-P. Eckmann, *Concepts and results in chaotic dynamics: a short course*, Theoret. Math. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [16] Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс, *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2002; пер. с англ.: J. Guckenheimer, Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Appl. Math. Sci., **42**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [17] Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда, *Стохастические и хаотические колебания*, Наука, М., 1987; англ. пер.: Yu. I. Neimark, P. S. Landa, *Stochastic and chaotic oscillations*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **77**, Kluwer, Dordrecht, 1992.
- [18] А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов, *Основы теории сложных систем*, Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2007.
- [19] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, М., 1988.
- [20] Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, Наука, М., 1984.

- [21] В. И. Оселедец, “Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем”, *Тр. ММО*, **19** (1968), 179–210; англ. пер.: V. I. Oseledets, “A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **19** (1968), 197–231.
- [22] J. Milnor, “On the concept of attractor”, *Comm. Math. Phys.*, **99**:2 (1985), 177–196.
- [23] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа”, *Докл. АН СССР*, **418**:1 (2008), 23–27; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “Pseudohyperbolicity and the problem of the periodic perturbation of Lorenz-type attractors”, *Dokl. Math.*, **77**:1 (2008), 17–21.
- [24] В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Тр. ММО*, **44** (1982), 150–212.
- [25] C. Robinson, “Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type”, *Nonlinearity*, **2**:4 (1989), 495–518.
- [26] W. Tucker, “A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem”, *Found. Comput. Math.*, **2**:1 (2002), 53–117.
- [27] Д. В. Аносов, В. В. Солодов, “Гиперболические множества”, *Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем. Фундам. напр.*, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 12–99; англ. пер.: D. V. Anosov, V. V. Solodov, “Hyperbolic sets”, *Dynamical systems IX*, Encyclopaedia Math. Sci., **66**, Springer, Berlin, 1995, 10–92.
- [28] Я. Б. Песин, *Лекции по теории частичной гиперболичности и устойчивой эргодичности*, МЦНМО, М., 2006; пер. с англ.: Ya. B. Pesin, *Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity*, Zur. Lect. Adv. Math., EMS, Zürich, 2004.
- [29] R. Bowen, D. Ruelle, “The ergodic theory of Axiom A flows”, *Invent. Math.*, **29** (1975), 181–202.
- [30] Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. АН СССР*, **342**:5 (1995), 596–599; англ. пер.: D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “Blue sky catastrophes”, *Dokl. Math.*, **51**:3 (1995), 404–407.
- [31] L. Shilnikov, “Bifurcations and strange attractors”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 3 (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 349–372; [arXiv: math/0304457](https://arxiv.org/abs/math/0304457), 2003.
- [32] С. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев, “Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов Ван-дер-Поля”, *Изв. вузов “Прикл. нелиней. динамика”*, **14**:5 (2006), 3–29.
- [33] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [34] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [35] Я. Г. Синай, *Современные проблемы эргодической теории*, Совр. проблемы матем., Физматлит, М., 1995; пер. с англ.: Ya. G. Sinai, *Topics in ergodic theory*, Princeton Math. Ser., **44**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1994.
- [36] В. И. Арнольд, А. Авец, *Эргодические проблемы классической механики*, Сер. РХД, **11**, НИЦ “РХД”, Ижевск, 1999; пер. с англ. и фр.: V. I. Arnol’d, A. Avez, *Ergodic problems of classical mechanics*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1968; *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, № 9, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [37] K. E. Petersen, “A topologically strongly mixing symbolic minimal set”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148**:2 (1970), 603–612.
- [38] В. А. Рохлин, “Точные эндоморфизмы пространств Лебега”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:4 (1961), 499–530.

- [39] Я. Г. Синай, “Стохастичность динамических систем”, *Нелинейные волны: Труды зимней школы* (Горький, 1977), Наука, М., 1979, 192–212; англ. пер.: Ya. G. Sinai, “The stochasticity of dynamical systems”, *Selecta Math. Soviet.*, **1**, № 1, Birkhäuser, Boston, MA, 1981, 100–119.
- [40] В. М. Алексеев, “Квазислучайные динамические системы. I. Квазислучайные диффеоморфизмы”, *Матем. сб.*, **76**:1 (1968), 72–134; англ. пер.: V. M. Alekseev, “Quasirandom dynamical systems. I. Quasirandom diffeomorphisms”, *Math. USSR-Sb.*, **5**:1 (1968), 73–128.
- [41] В. М. Алексеев, *Лекции по небесной механике*, НИЦ “РХД”, М.–Ижевск, 1999.
- [42] Н. Мартин, Дж. Инглэнд, *Математическая теория энтропии*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: N. F. G. Martin, J. W. England, *Mathematical theory of entropy*, Encyclopedia Math. Appl., **12**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [43] Е. И. Динабург, “Соотношение между топологической и метрической энтропией”, *Докл. АН СССР*, **190**:1 (1970), 19–22; англ. пер.: E. I. Dinaburg, “A correlation between topological entropy and metric entropy”, *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 13–16.
- [44] T. N. T. Goodman, “Relating topological entropy and measure entropy”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **3**:2 (1971), 176–180.
- [45] Н. Furstenberg, “Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation”, *Math. Systems Theory*, **1**:1 (1967), 1–49.
- [46] A. Katok, “Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **51** (1980), 137–173.
- [47] А. А. Брудно, “Топологическая энтропия и сложность по А. Н. Колмогорову”, *УМН*, **29**:6 (1974), 157–158.
- [48] А. А. Брудно, “О сложности траектории динамической системы”, *УМН*, **33**:1 (1978), 207–208; англ. пер.: A. A. Brudno, “The complexity of the trajectories of a dynamical system”, *Russian Math. Surveys*, **33**:1 (1978), 197–198.
- [49] А. Н. Колмогоров, “Три подхода к определению понятия «количество информации»”, *Проблемы передачи информации*, **1**:1 (1965), 3–11; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, “Three approaches to the definition of the notion of amount of information”, *Selected works of A. N. Kolmogorov. Volume III: Information theory and the theory of algorithms*, Mathematics and Its Applications. Soviet Series, **27**, ed. A. N. Shirayev, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [50] А. К. Звонкин, Л. А. Левин, “Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов”, *УМН*, **25**:6 (1970), 85–127; англ. пер.: A. K. Zvonkin, L. A. Levin, “The complexity of finite objects and the development of the concepts of information and randomness by means of the theory of algorithms”, *Russian Math. Surveys*, **25**:6 (1970), 83–124.
- [51] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970; англ. пер.: Ju. L. Daleckii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Transl. Math. Monogr., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [52] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney, 1964.
- [53] Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем: введение*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: J. Palis (Jr.), W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems: An introduction*, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982.
- [54] В. А. Плисс, “Принцип сведения в теории устойчивости движения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1297–1324.

- [55] J. Carr, *Application of centre manifold theory*, Appl. Math. Sci., **35**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1981.
- [56] D. Henry, “Geometric theory of semilinear parabolic equations”, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.
- [57] A. Scott, *Nonlinear science. Emergence and dynamics of coherent structures*, Oxf. Texts Appl. Eng. Math., **1**, Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- [58] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий, “Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау”, *УМН*, **63**:2 (2008), 21–84; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, V. A. Sadovnichii, “Mathematical aspects of the theory of development of turbulence in the sense of Landau”, *Russian Math. Surveys*, **63**:2 (2008), 221–282.
- [59] А. Ю. Колесов, А. Н. Куликов, Н. Х. Розов, “Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор-акселератор”, *Докл. РАН*, **420**:6 (2008), 739–743; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, A. N. Kulikov, N. Kh. Rozov, “Development of Landau turbulence in the multiplier-accelerator model”, *Dokl. Math.*, **77**:3 (2008), 463–466.
- [60] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
- [61] Л. Д. Ландау, “К проблеме турбулентности”, *Докл. АН СССР*, **44**:8 (1944), 339–342.
- [62] М. В. Капранов, В. Н. Кулешов, Г. М. Уткин, *Теория колебаний в радиотехнике*, Наука, М., 1984.
- [63] A. C. Scott, “Distributed multimode oscillators of one and two spatial dimensions”, *IEEE Trans. Circuit Theory*, **17**:1 (1970), 55–80.
- [64] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, М., 2005.
- [65] Ю. С. Колесов, “Проблема аттракторов нелинейных волновых уравнений в плоских областях”, *Матем. заметки*, **68**:2 (2000), 217–229; англ. пер.: Yu. S. Kolesov, “The attractor problem for nonlinear wave equations in plane domains”, *Math. Notes*, **68**:2 (2000), 191–200.

А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию

07.05.2009

Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: rozov@rozov.mccme.ru