Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Асимптотика решений при больших временах для нелинейных уравнений типа Соболева, *УМН*, 2009, том 64, выпуск 3, 3–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:29:42

УДК 517.9+535.5

Асимптотика решений при больших временах для нелинейных уравнений типа Соболева

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Исследовано асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Соболева с диссипацией. Используемый нами подход в случае малых начальных данных основан на детальном изучении функции Грина линейной задачи и применении метода сжимающих отображений. Значительное внимание уделено также случаю больших начальных данных. В суперкритическом случае асимптотика имеет квазилинейный характер. Асимптотическое поведение решений нелинейного уравнения типа Соболева с критической нелинейностью неконвективного типа отличается от поведения решений соответствующего линейного уравнения логарифмической поправкой. Для критической конвективной нелинейности, а также для субкритической неконвективной нелинейности доказано, что главный член асимптотики решения при больших временах дается автомоделным решением. Для уравнений Соболева с конвективной нелинейностью асимптотика решений в субкритическом случае представима в виде произведения волны разряжения и ударной волны.

Библиография: 84 названия.

Ключевые слова: нелинейное уравнение типа Соболева с диссипацией, задача Коши, асимптотическое поведение решения при больших временах, критический показатель нелинейности.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	4
2. Предварительные оценки для линейной задачи.....	11
3. Асимптотически слабая нелинейность.....	17
3.1. Малые начальные данные.....	17
3.2. Большие начальные данные.....	25
4. Критическая неконвективная нелинейность.....	33
4.1. Малые начальные данные.....	33
4.2. Большие начальные данные.....	40

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00-200-а).

© Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв, 2009

5. Критическая конвективная нелинейность	41
5.1. Малые начальные данные	41
5.2. Большие начальные данные	46
6. Субкритическая неконвективная нелинейность	48
6.1. Малые начальные данные	48
6.2. Большие начальные данные	57
7. Субкритическая конвективная нелинейность	58
Список литературы	67

1. Введение

В настоящей работе мы даем обзор известных результатов и развиваем единый систематический подход к изучению асимптотики при больших временах решений задачи Коши для уравнений типа Соболева

$$\begin{aligned}\partial_t(u + (-\Delta)^k u) - \alpha \Delta u &= \mathcal{N}(u), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $k = 1, 2$, с различными нелинейными членами $\mathcal{N} = \lambda|u|^\sigma u$, $\mathcal{N} = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\sigma > 0$.

Уравнения типа Соболева описывают различные физические процессы, и их исследованию посвящено большое количество работ, так что математическая теория этих уравнений занимает важное место в современной математической физике. В работе С. Л. Соболева [1] было выведено линейное уравнение $\partial_t^2 \Delta u + \alpha^2 \partial_{x_3}^2 u = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, описывающее малые колебания во вращающейся жидкости, и впервые была математически строго рассмотрена задача, отличная от задач типа Коши–Ковалевской. Эта работа вызвала большой интерес к исследованию неклассических уравнений – так называемых уравнений типа Соболева. Впоследствии исследования С. Л. Соболева были продолжены в [2]–[10] и др.

Никоим образом не претендуя на полноту, дадим все же некоторый обзор литературы, посвященной исследованию уравнений типа Соболева. В работе [11] получено линейное уравнение типа Соболева $\partial_t(\Delta u + \beta u) + \Delta u = 0$, где $\beta \neq 0$, описывающее нестационарный процесс фильтрации жидкости в пористой среде с трещинами. В работах [3], [12] доказана глобальная во времени разрешимость начально-краевых задач для уравнений в стратифицированных жидкостях. В работе [13] построено фундаментальное решение оператора внутренних гравитационных волн $\partial_t^2(\Delta u - \beta^2 u) + \omega_0^2(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)u = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, где β – параметр стратификации, ω_0 – частота Вейселя–Брента. Дисперсионные уравнения третьего и пятого порядка исследовались в работах [14]–[29], где, в частности, изучались вопросы глобального во времени существования и разрушения решений.

Приведем обзор результатов, посвященных исследованию диссипативных нелинейных уравнений типа Соболева. По поводу локальной разрешимости в классах $\mathbf{C}$ и $\mathbf{L}^2$ для уравнений типа Соболева в операторно-дифференциальной форме отметим книгу [30], где также рассмотрен вопрос обоснования методов конечномерной аппроксимации и метода Галёркина. В книге [31] установлены

условия разрешимости задач в весовых соболевских пространствах, доказаны теоремы единственности и получены априорные $\mathbf{L}^p$ -оценки решений задачи Коши и смешанных задач для дифференциальных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной, а также изучены асимптотические свойства решений некоторых задач гидродинамики. Уравнения типа Соболева со знакопеременным или необратимым оператором при старшей производной по времени в абстрактной постановке $\mathbf{B} \frac{d}{dt} u + \mathbf{L} u = f$, где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{B}$ – самосопряженные или диссипативные операторы в некотором гильбертовом пространстве, изучались в работе [32]. Применение полугрупп операторов с нетривиальными ядрами, а также ограниченных, секториальных и радиальных операторов к общей теории сингулярных уравнений типа Соболева получило развитие в [33]. Вырожденные уравнения типа Соболева исследовались с абстрактной точки зрения в книге [34], где сингулярные уравнения соболевского типа сведены к дифференциальному уравнению с многозначным линейным оператором. Уравнения типа Соболева с двумя нелинейностями рассматривались в работе [35], где развивается метод многозначных линейных операторов, предложенный в работе [34].

Иногда в литературе уравнения типа Соболева называются также псевдопараболическими уравнениями. В работе [36] исследован вопрос о единственности решения задачи Коши для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа $\partial_t(u - c\Delta u) = \varphi(u)$ в классе растущих функций $\varphi(u)$. В работе [37] получены результаты типа теорем существования-несуществования, в частности, доказано разрушение за конечное время положительного решения нелинейного уравнения типа Соболева с источником $\partial_t(u - \Delta u) - \Delta\psi(u) + q(u) = 0$. Оптимальное управление в линейных задачах для уравнений псевдопараболического типа исследовалось в работе [38]. В [39] доказано существование обобщенных решений для линейных уравнений соболевского типа более высокого порядка. Отметим также, что изучению задач для квазилинейных уравнений соболевского типа посвящены работы [40] и [41]. Исследованию псевдопараболических уравнений методами теории функций комплексного переменного посвящена работа [42]. Доказательству принципа максимума для уравнений псевдопараболического типа посвящена работа [43]. Псевдопараболические уравнения с монотонной нелинейностью изучались в работе [44], где в развернутом виде применялся классический метод монотонности в приложении к различным классам уравнений математической физики, в частности, к нелинейным уравнениям соболевского типа с монотонными нелинейностями.

Перейдем к обзору результатов о несуществовании и разрушении решений для уравнений соболевского типа. Прежде всего отметим классическую работу Х. Фуджиты [45] о несуществовании положительного решения для полулинейного уравнения параболического типа, где автор получил оптимальный результат о разрушении положительного решения задачи Коши для полулинейного параболического уравнения $u_t = \Delta u + u^{1+\sigma}$, $x \in \mathbb{R}^n$, пользуясь свойствами фундаментального решения оператора теплопроводности. Кроме того, были определены критические показатели нелинейности $\sigma_{\text{cr}} = 2/n$ (так называемые показатели Фуджиты) такие, что при $\sigma > \sigma_{\text{cr}}$ всегда существует классическое решение, а при $\sigma \leq \sigma_{\text{cr}}$ может не существовать глобального во времени клас-

сического решения (по крайней мере положительного). Метод доказательства несуществования решения для некоторых классов краевых задач, основанный на использовании принципа максимума, развит в работах [46], [47]. В монографии [48] развит оригинальный метод исследования вопросов разрушения решений дифференциальных неравенств. Благодаря обобщению понятия емкости авторам [48] удастся доказать разрушение решений для любого типа дифференциальных неравенств. Надеемся, что этот подход применим также к случаю дифференциальных уравнений соболевского типа. В классической работе [49] получены достаточные условия разрушения решений для классов квазилинейных уравнений параболического типа с помощью признаков сравнения, построения верхних и нижних решений, а также методом неограниченных коэффициентов Фурье. Эта же методика может быть применена и при исследовании вопросов разрушения для псевдопараболических уравнений.

В монографии [10] дано всестороннее освещение современного состояния теории линейных и нелинейных уравнений соболевского типа. Дан вывод модельных линейных уравнений соболевского типа высокого порядка, применимых в теории плазмы и для описания квазистационарных процессов в сплошных электромагнитных средах. Получены достаточные, близкие к необходимым, условия разрушения за конечное время и глобальной разрешимости. Обсуждаются методы численного решения уравнения типа Соболева.

В работе [50] была предложена новая задача, для которой удалось получить оптимальный результат Фуджиты. В работе [51] для исследования класса квазилинейных параболических уравнений был применен принцип максимума. В классической работе Г. Левина [52] энергетическим методом доказано разрушение сильного и слабого обобщенных решений задачи Коши для операторно-дифференциального уравнения вида $A \frac{du}{dt} + Lu = F(u)$ при достаточно больших начальных данных $u(0) = u_0$, где линейные операторы A и L — положительно определенные и самосопряженные, а нелинейность $F(u)$ имеет симметричную производную Фреше. Отметим, что в работах [53], [14] энергетический метод Левина развит в следующих направлениях: рассмотрен случай нелинейных операторов A и L и получены двусторонние оценки времени разрушения, далее в случае линейного оператора A найдены оптимальные двусторонние оценки не только для времени, но и для скорости разрушения, наконец, рассмотрен случай волновых уравнений псевдопараболического типа.

В случае глобальной во времени разрешимости исследовались вопросы асимптотического поведения решений рассматриваемых задач при больших временах, теория рассеяния и устойчивость решений типа уединенных волн как для одномерных, так и для многомерных уравнений типа Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса и Розенау–Бюргерса. Асимптотическое поведение при больших временах решения задачи Коши для уравнения типа Соболева с нелинейностью конвективного типа изучалось в работах [54]–[63], [29]. Асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Соболева с неконвективной нелинейностью степенного вида (1) изучалось в работах [64]–[67].

Как правило, уравнения типа Соболева не удается решить явно, поэтому различные аналитические методы их исследования играют важную роль. Од-

ним из наиболее эффективных способов качественного анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных являются асимптотические методы, позволяющие получать явные представления решений. Асимптотические формулы дают возможность выявить такие свойства решений, как скорость убывания или роста в различных областях, монотонный или осциллирующий характер их поведения, зависимость от начальных возмущений с течением времени и т. д. Также интересно исследовать влияние нелинейных членов уравнений типа Соболева на асимптотику их решений. Так, например, в отличие от соответствующих линейных уравнений решения нелинейных задач могут быстро осциллировать, они могут расти или убывать быстрее, чем решения соответствующих линейных уравнений, приближаться к автомодельному решению и т. п. Заметим, что очень трудно выявить эту информацию с помощью вычислительного эксперимента, так что асимптотические методы важны не только с теоретической точки зрения, но также широко используются на практике в дополнение к численным методам.

Асимптотические методы для нелинейных эволюционных уравнений являются относительно молодой областью математики, и общая теория еще далека от своего завершения. Описание асимптотики при больших временах решений нелинейных эволюционных уравнений требует принципиально новых подходов. Например, требования бесконечной дифференцируемости решения и компактности его носителя, обычно допустимые для линейных уравнений, являются слишком ограничительными в нелинейной теории. Асимптотические методы сложны даже в случае линейных эволюционных уравнений, поскольку требуют не только глобального во времени существования решений, но также ряда дополнительных априорных оценок (часто в весовых нормах) для того, чтобы можно было оценить разность между решением и его асимптотическим приближением. Обобщенные решения обычно непригодны для асимптотической теории, поэтому мы рассматриваем классические или полуклассические решения в пространствах Лебега или Соболева. Каждый тип нелинейности приходится рассматривать отдельно, в особенности при рассмотрении не малых начальных данных.

Опишем кратко основные утверждения работы. Мы делим нелинейные члены в уравнении типа Соболева (1) на три класса: асимптотически слабые, критические и сильные (или субкритические). Кроме того, критические и субкритические нелинейности подразделяются на конвективные и неконвективные. Асимптотика при больших временах решений задачи Коши для уравнения типа Соболева (1) оказывается различной во всех этих случаях. С эвристической точки зрения роль критичности показателя нелинейности нетрудно понять, если сравнить скорости убывания линейных и нелинейных членов уравнения на фундаментальном решении, так что критический показатель является критерием равновесия асимптотик линейных и нелинейных частей на фундаментальном решении соответствующего линейного оператора Соболева. Именно поэтому возникает асимптотическая подчиненность нелинейного оператора при $\sigma > \sigma_{\text{кр}}$ и в силу этого сохраняется в главном асимптотика фундаментального решения и для соответствующей нелинейной задачи Коши. Похожая ситуация имеет место для показателя Фуджиты, который ограничивает об-

ласть глобального во времени существования решений от области разрушения решений за конечное время. Следует, однако, подчеркнуть, что критический показатель с точки зрения асимптотики решений для различных нелинейных уравнений, вообще говоря, может отличаться от показателя Фуджиты.

В суперкритическом случае нелинейность является асимптотически слабой и не влияет существенно на асимптотическую форму решений. Так, для уравнения Соболева (1) при $k = 1$ со степенной нелинейностью $\mathcal{N} = \lambda|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в суперкритическом случае $\sigma > 2/n$ доказано существование единственного решения задачи Коши с достаточно малыми начальными возмущениями и для этого решения вычислен главный член асимптотики: $u \approx At^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\alpha t)}$ при больших временах $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где A – некоторая постоянная (см. теорему 3 ниже). Отметим, что с точностью до константы эта же асимптотика имеет место и для линейного уравнения Соболева. В теореме 4 мы покажем, что нелинейность $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, в уравнении Соболева (1) с $k = 2$ является слабой при $\sigma > 1/n$, а именно, для достаточно малых начальных возмущений будет доказано существование единственного решения задачи Коши и вычислена его асимптотика при $t \rightarrow \infty$, равномерная по $x \in \mathbb{R}^n$. Эта же асимптотика справедлива и для решения задачи Коши для уравнения Соболева (1) с $k = 2$ и нелинейностью $\mathcal{N} = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, при всех $\sigma > 0$ (см. теорему 5 ниже). Поскольку нелинейность зачастую приводит к разрушению решений за конечное время, нам приходится рассматривать малые начальные данные, чтобы иметь возможность изучать глобальные во времени решения. Однако в ряде случаев нам удастся получить асимптотику при больших временах также и для произвольных (т. е. не малых) начальных условий. Так, в теоремах 6, 7 и 8 соответственно для уравнения Соболева (1) при $k = 1$ со степенной нелинейностью $\mathcal{N} = \lambda|u|^\sigma u$, $\lambda < 0$, $\sigma > 2/n$, для уравнения Соболева (1) при $k = 2$ с нелинейностью $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \geq 1$, $n = 1, 2$, и для уравнения Соболева (1) при $k = 2$ с нелинейностью $\mathcal{N} = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u)$, $\lambda > 0$, $\sigma > 0$, $n = 1$, мы избавимся от требования малости начальных данных.

В критическом случае нелинейность неконвективного типа определяет логарифмическую поправку в главном члене асимптотики по сравнению с соответствующим линейным уравнением. Так, для уравнения Соболева (1) при $k = 1$ со степенной нелинейностью $\mathcal{N} = \lambda|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в критическом случае $\sigma = 2/n$ доказано существование единственного решения задачи Коши с достаточно малыми начальными возмущениями такими, что общая масса $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$ удовлетворяет условию $\lambda\theta < 0$, и для этого решения получена асимптотика $u \approx A(\log t)^{-n/2}t^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\alpha t)}$ (см. теорему 10). Если же $\lambda < 0$, то мы можем отказаться от требования малости начальных возмущений, однако при этом асимптотика в критическом случае $\sigma = 2/n$ имеет альтернативный характер, а именно, либо решение имеет главный член асимптотики $u \approx A(\log t)^{-n/2}t^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\alpha t)}$, либо оно убывает более быстро во времени: $u = O(t^{-n/2} \log^{-n/2-1} t)$ (см. теорему 12).

Для критической конвективной нелинейности доказываемся, что главный член асимптотики при больших временах дается автомодельным решением. Так, для уравнения Соболева (1) при $k = 2$ с критической конвективной нели-

нейностью $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\sigma = 1/n$, $n = 1, 2, 3$, в теореме 14 доказано, что при малых начальных возмущениях с ненулевой общей массой, $\theta \neq 0$, существует единственное решение задачи Коши и для этого решения справедлива асимптотика $u \approx t^{-n/2} V(xt^{-1/2})$, где $V(\xi)$ является решением интегрального уравнения

$$V(\xi) = \theta \tilde{G}_0(\xi) - \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0\left(\frac{\xi - y\sqrt{z}}{\sqrt{1-z}}\right) \mathcal{N}(V(y)) dy. \quad (2)$$

Здесь $\tilde{G}_0(\xi) = (4\pi\alpha)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/(4\alpha)}$. А в случае не малых начальных данных u_0 , имеющих ненулевую общую массу, $\theta \neq 0$, в теореме 14 доказано, что существует единственное решение задачи Коши для уравнения Соболева (1) при $k = 2$ с критической конвективной нелинейностью $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\sigma = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n = 1$. Более того, для этого решения справедлива асимптотика $u(t) \approx t^{-1/2} f_\theta(xt^{-1/2})$, где функция

$$f_\theta(\chi) = -2\sqrt{\mu} \frac{\partial}{\partial \chi} \log\left(\cosh \frac{\theta}{4} - \sinh\left(\frac{\theta}{4}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\mu}}\right)\right)$$

является автомодельным решением уравнения Бюргерса $u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0$, определяемым общей массой θ начальных данных, здесь $\operatorname{Erf}(x)$ – интеграл ошибок.

В случае субкритической неконвективной нелинейности главный член асимптотики решения при больших временах также дается автомодельным решением. В теореме 19 рассматривается уравнение типа Соболева (1) при $k = 1$ со степенной нелинейностью $\mathcal{N} = \lambda|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в субкритическом случае $0 < \sigma < 2/n$. В предположении, что начальные возмущения u_0 достаточно малы и $\lambda\theta < 0$, а также что величина σ достаточно близка к значению $2/n$, мы докажем, что задача Коши имеет единственное глобальное во времени решение. Более того, для этого решения справедлива асимптотика $u \approx At^{-1/\sigma} V(xt^{-1/2})$, где A – некоторая постоянная, а функция $V(\xi)$ является решением интегрального уравнения типа (2). Если $\lambda < 0$, $n = 1, 2$, то мы можем освободиться от условия малости начальных данных и установить (см. теорему 20) глобальное во времени существование решений задачи Коши с начальными данными u_0 , имеющими ненулевую общую массу $\theta \neq 0$. Это решение имеет ту же асимптотику при $t \rightarrow \infty$, что и в теореме 19.

Наконец, для уравнения типа Соболева (1) при $k = 1$ с конвективной нелинейностью $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n = 1$, в субкритическом случае $\sigma \in (0, 1)$ мы представим асимптотику решений в виде произведения волны разряжения и ударной волны (см. теорему 23).

Отметим, что подобное асимптотическое поведение решений было ранее обнаружено для нелинейного уравнения теплопроводности с неконвективной нелинейностью $u_t - \Delta u + u^{1+\sigma} = 0$ (см. работу [68] по поводу суперкритического случая $\sigma > 2/n$, работу [69] в критическом случае $\sigma = 2/n$ и работы [70]–[73] в субкритическом случае $\sigma \in (0, 2/n)$), а также для нелинейного уравнения теплопроводности с конвективной нелинейностью $u_t - \Delta u + (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u = 0$, где $\sigma > 0$ (см. [74], [75]).

Будем обозначать всюду

$$\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}, \quad \{x\} = \frac{|x|}{\langle x \rangle}, \quad |x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2},$$

так что имеет место представление $|x| = \{x\}\langle x \rangle$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $[\alpha]$ целую часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$; более подробно, $[\alpha] = \max_{k \leq \alpha} k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Через $\mathcal{F}\phi$ или $\hat{\phi}$ будем обозначать прямое преобразование Фурье функции ϕ , т. е.

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \phi(x) dx,$$

тогда обратное преобразование Фурье дается формулой

$$\mathcal{F}^{-1}\phi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \phi(x) dx,$$

где через $x\xi$, как обычно, обозначаем $\xi x = (\xi \cdot x)$ скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Пространство Лебега обозначаем, как обычно, через $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathcal{S}' : \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\}$, с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty$$

и $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty} = \text{ess. sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|$ при $p = \infty$. Определим также весовое пространство Лебега $\mathbf{L}^{p,a}$

$$\mathbf{L}^{p,a} = \{\phi \in \mathbf{L}^p : \|\phi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} < \infty\}$$

с нормой $\|\phi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \equiv \|\langle x \rangle^a \phi(x)\|_{\mathbf{L}^p}$. Пространство Соболева определим следующим образом: $\mathbf{W}_p^k(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathbf{L}^p : \|\langle i\partial_x \rangle^k \varphi(x)\|_{\mathbf{L}^p} < \infty\}$ при $1 \leq p \leq \infty$ и целом k . Также обозначим $\mathbf{H}^k(\mathbb{R}^n) = \mathbf{W}_2^k(\mathbb{R}^n)$, где $k \geq 0$ (см. [76]). Весовое пространство Соболева определим как $\mathbf{W}_p^{s,a}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in \mathbf{L}^p : \|\langle i\partial_x \rangle^s \varphi(x)\|_{\mathbf{L}^{p,a}} < \infty\}$ для любых $s, a \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. В частности, при $p = 2$ обозначим также $\mathbf{H}^{s,a}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{W}_2^{s,a}(\mathbb{R}^n)$. Очевидно равенство $\mathbf{W}_p^{s,0}(\mathbb{R}^n) = \mathbf{W}_p^s(\mathbb{R}^n)$. Норму обычного пространства Соболева $\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^{k,0}$ будем задавать также следующим образом:

$\|\phi\|_{\mathbf{H}^k}^2 = \sum_{j=0}^k \|\partial^j \phi\|_{\mathbf{L}^2}^2$. Мы будем также рассматривать $\mathbf{C}(\mathbf{I}; \mathbf{B})$ –

пространство непрерывных функций, отображающих интервал времени $\mathbf{I}$ в банахово пространство $\mathbf{B}$. Различные постоянные будем обозначать одной и той же буквой C . Введем дробную производную $\partial_{x_j}^\beta$ для всех $\beta \geq 0$ и $j = 1, \dots, n$ следующим образом (см. [77]):

$$\partial_{x_j}^\beta \phi = \mathcal{F}^{-1}((i\xi_j)^{\varrho-1} (i\xi_j)^{k+1} \hat{\phi}),$$

где $k = [\beta]$, $\varrho = \beta - k \in (0, 1)$ и $(i\xi_j)^{\varrho-1}$ обозначает главное значение аналитической функции $(i\xi_j)^{\varrho-1} = |\xi_j|^{\varrho-1} \exp\{i(\varrho-1) \arg(i\xi_j)\}$. Поскольку

$$\mathcal{F}^{-1}((i\xi_j)^{\varrho-1}) = \frac{\sqrt{\pi} y^{-\varrho}}{\sqrt{2} \Gamma(1-\varrho) \cos(\frac{\pi}{2}(\varrho-1))}$$

при $y > 0$, $\varrho \in (0, 1)$, где Γ – гамма-функция Эйлера, то интегрирование по частям дает следующее представление:

$$\partial_{x_j}^\beta \phi(x) = \frac{2\pi}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^\infty (\partial_{x_j}^k \phi(\check{x}(y)) - \partial_{x_j}^k \phi(x)) y^{-1-\varrho} dy,$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, а $\check{x}(y) = (x_1, \dots, x_j + y, \dots, x_n)$.

В следующем разделе мы получим предварительные оценки для оператора Грина линейной задачи Коши для уравнений типа Соболева. В последующих разделах мы изучим асимптотическое поведение при больших временах решений задачи Коши для нелинейного уравнения типа Соболева (1) в суперкритическом, критическом и субкритическом случаях.

2. Предварительные оценки для линейной задачи

Рассмотрим линейную задачу Коши

$$\begin{aligned} \partial_t(u + (-\Delta)^k u) - \alpha \Delta u &= f, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha > 0$, $k = 1, 2$. С помощью принципа Дюамеля запишем решение задачи (3) в виде

$$u(t) = \mathcal{G}_k(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}_k(t-\tau) \mathcal{B}_k f(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где оператор Грина $\mathcal{G}_k(t)$ задается через обратное преобразование Фурье следующим образом:

$$\mathcal{G}_k(t)\phi = \mathcal{F}^{-1} \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^{2k}} \right\} \hat{\phi} \right),$$

а оператор $\mathcal{B}_k \phi = \int_{\mathbb{R}^n} B_k(x-y)\phi(y) dy$ задан своим ядром

$$B_k(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} (1 + |\xi|^{2k})^{-1} d\xi.$$

Отметим, что справедлива оценка $|B_k(x)| \leq C|x|^{1-n}e^{-|x|}$ (см. [78], [79]), так что имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_k \phi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} B_k(x-y)\phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \\ &\leq \|B_k\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{a+1-n} e^{-|x|} dx \leq C \|\phi\|_{\mathbf{L}^{p,a}} \end{aligned}$$

для всех $1 \leq p \leq \infty$ и $a \geq 0$.

Рассмотрим оценки для оператора $\mathcal{G}_1(t)$ в нормах весовых пространств Лебега. Обозначим через $\tilde{G}_0(x) = (4\pi\alpha)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha)}$ ядро функции Грина для уравнения теплопроводности.

ЛЕММА 1. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \| |x|^b \partial^\beta \mathcal{G}_1(t) \phi \|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+\frac{b}{2}-\frac{|\beta|}{2}} (\| \phi \|_{\mathbf{L}^r} + \| \phi \|_{\mathbf{W}_p^{|\beta|,b}}) \\ &\quad + \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{|\beta|}{2}} \| \phi \|_{\mathbf{L}^{r,b}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \| |x|^b (\mathcal{G}_1(t) \phi - \theta \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}_0(x \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}})) \|_{\mathbf{L}^p} \\ \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{b-a}{2}} (\| |x|^a \phi \|_{\mathbf{L}^1} + \| |x|^b \phi \|_{\mathbf{L}^p}) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $0 \leq |\beta| \leq n+1$, $0 \leq b \leq a \leq 1$, $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор Грина $\mathcal{G}_1(t)$ в виде

$$\mathcal{G}_1(t) \phi = \mathcal{G}_0(t) \phi + e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}_1^k \phi + \mathcal{R}_1(t) \phi,$$

где

$$\mathcal{G}_0(t) \phi = \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((x-y) \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}}) \phi(y) dy,$$

а остаток $\mathcal{R}_1(t) \phi = \int_{\mathbb{R}^n} R_1(t, x-y) \phi(y) dy$ имеет ядро $R_1(t, x) = \mathcal{F}^{-1} \hat{R}_1(t, \xi)$, где

$$\hat{R}_1(t, \xi) = e^{-\alpha t |\xi|^2 \langle \xi \rangle^{-2}} - e^{-\alpha \langle t \rangle |\xi|^2} - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \langle \xi \rangle^{-2k}.$$

Благодаря оценкам леммы 1.28 из книги [67] найдем

$$\begin{aligned} \| |x|^b \partial^\beta \mathcal{G}_0(t) \phi \|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+\frac{b-|\beta|}{2}} (\| \phi \|_{\mathbf{L}^r} + \| \phi \|_{\mathbf{W}_p^{|\beta|}}) \\ &\quad + C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{|\beta|}{2}} \| \phi \|_{\mathbf{L}^{r,b}} \end{aligned} \quad (5)$$

и

$$\| |x|^b (\mathcal{G}_0(t) \phi - \theta \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \tilde{G}_0(x \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}})) \|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{b-a}{2}} \| |x|^a \phi \|_{\mathbf{L}^1} \quad (6)$$

для всех $t > 0$. Кроме того, при $t > 0$ и $1 \leq p \leq \infty$ выполнено неравенство

$$\left\| |x|^b \partial^\beta e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathcal{B}_1^k \phi \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^n e^{-\alpha t} \| \phi \|_{\mathbf{W}_p^{|\beta|,b}}. \quad (7)$$

Оценим теперь остаток $\mathcal{R}_1(t) \phi$. При всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $0 \leq j \leq n+2$ имеет место неравенство

$$| \partial_{\xi_i}^j \hat{R}_1(t, \xi) | \leq C \langle t \rangle^{\frac{j}{2}-1} e^{-\frac{\alpha}{2} t |\xi|^2} + C \langle t \rangle^{n+1} e^{-\alpha t} \langle \xi \rangle^{-2n-2},$$

из которого выводится следующая оценка для ядра $R_1(t, x)$: при $0 \leq |\beta| \leq n+1$

$$\begin{aligned} | \partial^\beta R_1(t, x) | &\leq C \| |\xi|^{|\beta|} \hat{R}_1(t, \xi) \|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^{-1} \| |\xi|^{|\beta|} e^{-\frac{\alpha}{2} t |\xi|^2} \|_{\mathbf{L}^1} \\ &\quad + C \langle t \rangle^{n+1} e^{-\alpha t} \| |\xi|^{|\beta|} \langle \xi \rangle^{-2n-2} \|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^{-1} t^{-\frac{n}{2}-\frac{|\beta|}{2}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, интегрируя по частям $n+2$ раза по переменной ξ_i , получаем

$$\begin{aligned} |\partial^\beta R_1(t, x)| &\leq C|x|^{-n-2} \sum_{l=1}^n \left| \partial^\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \partial_{\xi_l}^{n+2} \widehat{R}_1(t, \xi) d\xi \right| \\ &\leq C|x|^{-n-2} t^{\frac{n+2}{2}} \langle t \rangle^{-1} \|\xi\|^{|\beta|} e^{-\frac{\alpha}{2}t|\xi|^2} \| \cdot \|_{\mathbf{L}^1} + C|x|^{-n-2} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \|\xi\|^{|\beta|} \langle \xi \rangle^{-2n-2} \| \cdot \|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C(|x|t^{-\frac{1}{2}})^{-n-2} \langle t \rangle^{-1} t^{-\frac{n}{2}-\frac{|\beta|}{2}} + C|x|^{-n-2} e^{-\frac{\alpha}{2}t}. \end{aligned}$$

Комбинируя эти две оценки, имеем для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$$|\partial^\beta R_1(t, x)| \leq C \langle |x|t^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2} \langle t \rangle^{-1} t^{-\frac{n}{2}-\frac{|\beta|}{2}} + C \langle x \rangle^{-n-2} e^{-\frac{\alpha}{2}t}. \quad (8)$$

Ввиду (8), применяя неравенство Юнга для свертки с $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$, находим при $t \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta \mathcal{R}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} R_1(t, x-y) \partial^\beta \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \|R_1(t)\|_{\mathbf{L}^1} \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{|\beta|}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{|\beta|}} \end{aligned}$$

и при $t > 1$

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta \mathcal{R}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta R_1(t, x-y) \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\partial^\beta R_1(t)\|_{\mathbf{L}^q} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2}-1-\frac{|\beta|}{2}} \|\langle |x|t^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2}\|_{\mathbf{L}^q} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} + C e^{-\frac{\alpha}{2}t} \langle x \rangle^{-n-2} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-1-\frac{|\beta|}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $1 \leq r \leq p \leq \infty$. Из (5)–(9) следуют оценки леммы. Лемма 1 доказана.

Теперь оценим в весовых лебеговских нормах оператор $\mathcal{G}_2(t)$.

ЛЕММА 2. *При всех $t > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \||x|^b \partial^\beta \mathcal{G}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{|\beta|}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,b}} + C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+\frac{b-|\beta|}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\quad + C \langle t \rangle^{-\frac{m-|\beta-\alpha|}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{|\alpha|+m,b}}, \end{aligned}$$

где $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, $|\beta - \alpha| < m$, $0 \leq b < 1$, и

$$\begin{aligned} \||x|^b (\mathcal{G}_2(t)\phi - \theta \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}} \widetilde{G}_0(x \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}}))\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{b-a}{2}} \||x|^a \phi\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\quad + C \langle t \rangle^{-\frac{m}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{m,b}}, \end{aligned}$$

где $1 \leq p \leq \infty$, $m > 0$, $0 \leq b \leq a < 1$, $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор Грина $\mathcal{G}_2(t)$ следующим образом:

$$\mathcal{G}_2(t)\phi = \mathcal{F}^{-1} \exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G_2(t, x-y) \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy, \quad m > 0,$$

где ядро $G_2(t, x)$ имеет вид

$$G_2(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \right).$$

Рассмотрим сначала случай $0 < t \leq 1$. С помощью интегрирования по частям находим, что

$$\begin{aligned} |\partial^{\beta-\alpha} G_2(t, x)| &\leq C|x|^{-l} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \xi^{\beta-\alpha} \partial_{\xi_j}^l \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \right) d\xi \right| \\ &\leq C|x|^{-l} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{|\beta-\alpha|-m-l} d\xi \right| \leq C|x|^{-l} \end{aligned}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $0 < t \leq 1$ при $l > n + |\beta - \alpha| - m$. Комбинируя это неравенство с соотношениями $l = n + \gamma + |\beta - \alpha| - m$ и $l = n + \gamma + |\beta - \alpha| + b$, $\gamma \in (0, m - |\beta - \alpha|)$, получаем

$$|\partial^{\beta-\alpha} G_2(t, x)| \leq C|x|^{-n-\gamma-|\beta-\alpha|+m} \langle x \rangle^{|\beta-\alpha|-m-b}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $0 < t \leq 1$. Значит, справедлива оценка

$$\|\partial^{\beta-\alpha} G_2(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \| |x|^b \partial^{\beta-\alpha} G_2(t) \|_{\mathbf{L}^1} \leq C$$

при $0 \leq |\beta - \alpha| < m$. Тогда по неравенству Юнга приходим к первой оценке леммы:

$$\begin{aligned} \| |x|^b \partial^{\beta} \mathcal{G}_2(t) \phi \|_{\mathbf{L}^p} &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^b \partial^{\beta-\alpha} G_2(t, x - y) \partial^{\alpha} \langle i \nabla \rangle^m \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &+ \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\beta-\alpha} G_2(t, x - y) \langle y \rangle^b \partial^{\alpha} \langle i \nabla \rangle^m \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{|\alpha|+m,b}} \end{aligned}$$

для всех $0 < t \leq 1$, при $0 \leq |\alpha| \leq |\beta|$, $0 \leq |\beta - \alpha| < m$.

Теперь рассмотрим $t \geq 1$. Введем срезку $\varphi_1 \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\varphi_1(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq 1$ и $\varphi_1(\xi) = 0$ при $|\xi| \geq 2$, положим также $\varphi_2(\xi) = 1 - \varphi_1(\xi)$ и обозначим

$$K_j(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \varphi_j(\xi) \right), \quad j = 1, 2,$$

так что $G_2(t, x) = K_1(t, x) + K_2(t, x)$. Отметим, что функция $\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \times \langle \xi \rangle^{-m} \varphi_1(\xi) \in \mathbf{C}^N(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $N = n + 2$, удовлетворяет оценке

$$\left| \partial_{\xi_j}^l \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \varphi_1(\xi) \right) \right| \leq C t^{\frac{l}{2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{3} t |\xi|^2 \right\} \quad (10)$$

для всех $t \geq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $l = 0, 1, \dots, n + 2$, $j = 1, \dots, n$. Благодаря (10) ядро $K_1(t, x)$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} |\partial^{\beta} K_1(t, x)| &\leq C \left\| \exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \xi^{\beta} \varphi_1(\xi) \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \left\| |\xi|^{\beta} \exp \left\{ -\frac{\alpha}{3} t |\xi|^2 \right\} \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq C t^{-\frac{n+|\beta|}{2}}. \end{aligned}$$

С другой стороны, с помощью интегрирования $n + 2$ раза по частям по ξ_l получаем неравенство

$$\begin{aligned} |\partial^\beta K_1(t, x)| &\leq C|x|^{-n-2} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \xi^\beta \partial_{\xi_j}^{n+2} \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \varphi_1(\xi) \right) d\xi \right| \\ &\leq C|x|^{-n-2} t^{\frac{n+2}{2}} \left\| |\xi|^\beta \exp \left\{ -\frac{\alpha}{3} t |\xi|^2 \right\} \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq C(|x|t^{-\frac{1}{2}})^{-n-2} t^{-\frac{n+|\beta|}{2}}. \end{aligned}$$

Комбинируя последние два неравенства, имеем для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 1$

$$|\partial^\beta K_1(t, x)| \leq C \langle |x|t^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2} t^{-\frac{n+|\beta|}{2}} \quad (11)$$

при любых $|\beta| \geq 0$. Ввиду (11), для $\mathcal{K}_1(t)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \langle i\nabla \rangle^m K_1(t, x-y)\phi(y) dy$ с помощью неравенства Юнга с $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$ получаем

$$\begin{aligned} \||x|^b \partial^\beta \mathcal{K}_1(t)\phi\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\beta \langle i\nabla \rangle^m K_1(t, x-y) \langle y \rangle^b \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\quad + C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^b \partial^\beta \langle i\nabla \rangle^m K_1(t, x-y) \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \|K_1(t)\|_{\mathbf{L}^q} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,b}} + C \|K_1(t)\|_{\mathbf{L}^{q,b}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq C t^{-\frac{n+|\beta|}{2}} \|\langle |x|t^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2}\|_{\mathbf{L}^q} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,b}} + C t^{-\frac{n+|\beta|}{2}} \|\langle |x|t^{-\frac{1}{2}} \rangle^{-n-2}\|_{\mathbf{L}^{q,b}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \\ &\leq C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})-\frac{|\beta|}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,b}} + C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})+\frac{b-|\beta|}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $0 \leq b < 1$. Поскольку для всех $j > n$

$$\left| \int_{|\xi|>1} \exp \left\{ -\frac{\alpha t}{2|\xi|^4} \right\} |\xi|^{-j} d\xi \right| \leq C \int_1^\infty \exp \left\{ -\frac{\alpha t}{2y^2} \right\} y^{n-1-j} dy \leq C \langle t \rangle^{-\frac{j-n}{2}},$$

то интегрирование по частям дает при $l > n + |\beta - \alpha| - m$

$$\begin{aligned} |\partial^{\beta-\alpha} K_2(t, x)| &\leq C|x|^{-l} \sum_{j=1}^n \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \partial_{\xi_j}^l \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} \langle \xi \rangle^{-m} \xi^{\beta-\alpha} \varphi_2(\xi) \right) d\xi \right| \\ &\leq C|x|^{-l} \left| \int_{|\xi|>1} \exp \left\{ -\frac{\alpha t}{2|\xi|^4} \right\} |\xi|^{|\beta-\alpha|-m-l} d\xi \right| \\ &\leq C|x|^{-l} t^{-\frac{l+m-|\beta-\alpha|-n}{2}} \end{aligned}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t \geq 1$. Комбинируя это неравенство с соотношениями $l = n + \gamma + |\beta - \alpha| - m$ и $l = n + \gamma + |\beta - \alpha| + 1$, $\gamma \in (0, m - |\beta - \alpha|)$, находим

$$|\partial^{\beta-\alpha} K_2(t, x)| \leq C|x|^{-n-\gamma-|\beta-\alpha|+m} t^{-\frac{\gamma}{2}} \langle |x|\sqrt{t} \rangle^{-m-1}$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $t \geq 1$. Следовательно,

$$\||x|^b \partial^{\beta-\alpha} K_2(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C t^{\frac{|\beta-\alpha|}{2} - \frac{m+b}{2}}$$

для всех $t \geq 1$. Поэтому применение неравенства Юнга к оператору $\mathcal{K}_2(t)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} K_2(t, x-y) \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy$ дает оценку

$$\begin{aligned} \|\partial^\beta \mathcal{K}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{p,b}} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^b \partial^{\beta-\alpha} K_2(t, x-y) \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &+ C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\beta-\alpha} K_2(t, x-y) \langle y \rangle^b \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq Ct^{\frac{|\beta-\alpha|}{2} - \frac{m}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{|\alpha|+m,b}} \end{aligned}$$

для всех $t \geq 1$, где $0 \leq |\beta - \alpha| < m$. Таким образом, первая оценка леммы имеет место.

Для доказательства второй оценки леммы запишем $\mathcal{G}_2(t)\phi = \mathcal{G}_0(t)\phi + \mathcal{R}_2(t)\phi$, где остаток $\mathcal{R}_2(t)\phi$ имеет вид

$$\mathcal{R}_2(t)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} R_2(t, x-y) \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy$$

с ядром $R_2(t, x) = \tilde{K}_1(t, x) + \tilde{K}_2(t, x)$, где

$$\tilde{K}_j(t, x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}^{-1} \left(\left(\exp \left\{ -\frac{\alpha t |\xi|^2}{1 + |\xi|^4} \right\} - \exp \{ -\alpha \langle t \rangle |\xi|^2 \} \right) \langle \xi \rangle^{-m} \varphi_j(\xi) \right).$$

Как и выше, получаем оценку $|\langle i\nabla \rangle^m \tilde{K}_1(t, x)| \leq C \langle |x| \langle t \rangle^{-1/2} \rangle^{-n-2} \langle t \rangle^{-n/2-1}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, благодаря которой для оператора $\tilde{\mathcal{K}}_1(t)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \langle i\nabla \rangle^m \times \tilde{K}_1(t, x-y) \phi(y) dy$ с помощью неравенства Юнга при $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$ выводим оценку

$$\begin{aligned} \| |x|^b \tilde{\mathcal{K}}_1(t)\phi \|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \langle i\nabla \rangle^m \tilde{K}_1(t, x-y) \langle y \rangle^b \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &+ C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^b \langle i\nabla \rangle^m \tilde{K}_1(t, x-y) \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-1 - \frac{n}{2} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p})} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{r,b}} + C \langle t \rangle^{-1 - \frac{n}{2} (\frac{1}{r} - \frac{1}{p}) + \frac{b}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^r} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, где $1 \leq r \leq p \leq \infty$, $0 \leq b < 1$. Аналогично, имеем

$$\| |x|^b \tilde{K}_2(t) \|_{\mathbf{L}^1} \leq Ct^{-\frac{m+b}{2}}$$

для всех $t > 0$. Поэтому для $\tilde{\mathcal{K}}_2(t)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_2(t, x-y) \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy$ неравенство Юнга дает

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_2(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{p,b}} &\leq C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^b \tilde{K}_2(t, x-y) \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \\ &+ C \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{K}_2(t, x-y) \langle y \rangle^b \langle i\nabla \rangle^m \phi(y) dy \right\|_{\mathbf{L}^p} \leq Ct^{-\frac{m}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{W}_p^{m,b}} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Так что в силу (6) справедлива вторая оценка леммы. Лемма 2 доказана.

3. Асимптотически слабая нелинейность

3.1. Малые начальные данные. В этом разделе мы развиваем общий подход к изучению асимптотики при больших временах для решений эволюционных диссипативных уравнений с асимптотически слабой нелинейностью. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{N}(u) + \mathcal{L}u &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mathcal{L}$ – это линейный псевдодифференциальный оператор, $\mathcal{L}\phi = \mathcal{F}^{-1}L(\xi)\hat{\phi}(\xi)$ с $L(\xi) = \frac{\alpha|\xi|^2}{1+|\xi|^{2k}}$, $k = 1, 2$, $\alpha > 0$, а $\mathcal{N}(u)$ – нелинейный член такой, что $\mathcal{N}(0) = 0$. С помощью принципа Дюамеля перепишем задачу Коши (12) в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{G}(t)u_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau))d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-y)u_0(y)dy - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(t-\tau, x-y)\mathcal{N}(u)(\tau, y)dyd\tau, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathcal{G}$ – оператор Грина соответствующей линейной задачи,

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} e^{-tL(\xi)}\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x-y)\phi(y)dy.$$

Под решением задачи Коши (12) будем понимать решение соответствующего интегрального уравнения (13).

Пусть $\mathbf{Z}$ – некоторое метрическое пространство функций на $\mathbb{R}^n$, кроме того, зафиксируем некоторое полное метрическое пространство $\mathbf{X}$ функций на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Докажем сначала глобальное во времени существование решений задачи Коши (12).

ТЕОРЕМА 1. Пусть начальные возмущения $u_0 \in \mathbf{Z}$ достаточно малы. Предположим, что определен оператор Грина $\mathcal{G}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{X}$, удовлетворяющий оценке

$$\|\mathcal{G}\phi\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{Z}}. \quad (14)$$

Предположим также, что $\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v(\tau))d\tau \in \mathbf{X}$ для любой функции $v \in \mathbf{X}$ и справедлива оценка

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(\mathcal{N}(w(\tau)) - \mathcal{N}(v(\tau)))d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\|w-v\|_{\mathbf{X}}(\|w\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^\sigma \quad (15)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$, где $\sigma > 0$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (12), удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{\mathbf{X}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим принцип сжимающих отображений в шаре $\mathbf{X}_\rho = \{\phi \in \mathbf{X} : \|\phi\|_{\mathbf{X}} \leq \rho\}$ с радиусом $\rho = (2C)^{-1}\|u_0\|_{\mathbf{Z}} > 0$, где постоянная $C > 0$ взята из условий (14), (15). Для всех $v \in \mathbf{X}_\rho$ определим отображение $\mathcal{M}(v)$ формулой

$$\mathcal{M}(v) = \mathcal{G}(t)u_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v(\tau)) d\tau. \quad (17)$$

Докажем сначала неравенство $\|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}} \leq \rho$, где $\rho > 0$ достаточно мало. Из условий теоремы и интегральной формулы (17) получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}} &\leq \|\mathcal{G}u_0\|_{\mathbf{X}} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C\|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \leq \frac{\rho}{2} + C\rho^{\sigma+1} < \rho, \end{aligned}$$

поскольку $\rho > 0$ достаточно мало. Следовательно, отображение $\mathcal{M}$ преобразует шар $\mathbf{X}_\rho$ в себя. Подобным образом получим оценку $\|\mathcal{M}(w) - \mathcal{M}(v)\|_{\mathbf{X}} \leq (1/2)\|w - v\|_{\mathbf{X}}$, откуда видно, что $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением. Таким образом, существует единственное решение $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (12), удовлетворяющее неравенству (16). Теорема 1 доказана.

Будем называть функцию $G_0 \in \mathbf{X}$ асимптотическим ядром оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$, если для некоторого непрерывного функционала $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$\|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)\phi - G_0(t)f(\phi))\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{Z}} \quad (18)$$

для всех $\phi \in \mathbf{Z}$, где $\gamma > 0$. Ниже функционал $f(\phi)$ будем выбирать в виде $f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = (2\pi)^{n/2} \hat{\phi}(0)$, также функционал f может иметь форму моментов. Будем называть нелинейность $\mathcal{N}(u)$ в уравнении (12) асимптотически слабой в пространстве $\mathbf{X}$, если сходится интеграл $\int_0^\infty f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau$ для любой функции $u \in \mathbf{X}$.

В следующей теореме мы установим достаточные условия для нахождения асимптотики решений задачи Коши (12) с асимптотически слабой нелинейностью.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_0 \in \mathbf{Z}$. Предположим, что существует асимптотическое ядро G_0 для оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$. Пусть нелинейность $\mathcal{N}(u)$ в уравнении (12) является асимптотически слабой в пространстве $\mathbf{X}$. Предположим, что существует единственное глобальное решение $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (12), удовлетворяющее оценкам

$$\begin{aligned} &\left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^{\frac{t}{2}} \left(\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau)) - G_0(t-\tau)f(\mathcal{N}(u(\tau))) \right) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_{\frac{t}{2}}^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\|u\|_{\mathbf{X}}^\sigma \end{aligned} \quad (19)$$

u

$$\begin{aligned} & \left\| \langle t \rangle^\gamma G_0(t) \int_{\frac{t}{2}}^\infty f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ & + \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^{\frac{t}{2}} (G_0(t-\tau) - G_0(t)) f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|u\|_{\mathbf{X}}^\sigma \end{aligned} \quad (20)$$

где $\sigma > 0$, $\gamma > 0$. Тогда справедливо асимптотическое представление

$$u(t) = AG_0(t) + \langle t \rangle^{-\gamma} R(t), \quad (21)$$

где постоянная A вычисляется по формуле

$$A = f(u_0) - \int_0^\infty f(\mathcal{N}(u(\tau))) d\tau$$

и остаток R оценивается следующим образом: $\|R\|_{\mathbf{X}} \leq C \|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C \|u\|_{\mathbf{X}}^\sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы можем гарантировать, что коэффициент A в асимптотическом представлении (21) отличен от нуля, например, если $f(u_0) \neq 0$ и $\mathcal{N}(u)$ достаточно мало, что имеет место в случае малых решений, а также в случае уравнений конвективного типа, когда $f(\mathcal{N}(u)) \equiv 0$. Если же $A = 0$ (например, для уравнений конвективного типа в случае, когда начальные возмущения имеют нулевое среднее значение $f(u_0) = 0$), то формула (21) дает лишь оценку убывания решения при больших временах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегрального уравнения (13) получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \langle t \rangle^\gamma (u(t) - AG_0(t)) \right\|_{\mathbf{X}} \leq \left\| \langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)u_0 - G_0(t)f(u_0)) \right\|_{\mathbf{X}} \\ & + \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^{\frac{t}{2}} (\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau)) - G_0(t-\tau)\vartheta(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ & + \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_{\frac{t}{2}}^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} + \left\| \langle t \rangle^\gamma G_0(t) \int_{\frac{t}{2}}^\infty \vartheta(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ & + \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^{\frac{t}{2}} (G_0(t-\tau) - G_0(t)) \vartheta(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\vartheta(\tau) = f(\mathcal{N}(u(\tau)))$. В силу неравенств (18)–(20) правая часть (22) может быть оценена сверху величиной $C \|u_0\|_{\mathbf{Z}} + C \|u\|_{\mathbf{X}}^\sigma$. Таким образом, из (22) вытекает асимптотика (21). Теорема 2 доказана.

Применим теоремы 1 и 2 к уравнению Соболева со степенной нелинейностью

$$\begin{aligned} \partial_t(u - \Delta u) - \alpha \Delta u &= \lambda |u|^\sigma u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\alpha > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. уравнение (1) с $k = 1$, $\mathcal{N} = \lambda |u|^\sigma u$, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$). Оказывается, что нелинейность в (23) является слабой при $\sigma > 2/n$. Уравнение (23) можно рассматривать как многомерное обобщение уравнений Буссинеска; оно возникает в задачах фильтрации жидкостей в пористых средах [80], [37] и в

теории кристаллических полупроводников [81]. Чтобы иметь возможность доказать существование глобальных во времени решений уравнения (23) с коэффициентом нелинейности λ произвольного знака, приходится предполагать малость начальных возмущений, поскольку при $\lambda > 0$ возможно разрушение решений за конечное время (см. [49], [48], [81]). В работе [64] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\sigma > 2/n$. Предположим, что

$$u_0 \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad a \in (0, 1],$$

причем норма $\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}$ достаточно мала. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (23). Для этого решения при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ справедлива асимптотика $u(t, x) = At^{-n/2}e^{-|x|^2/(4t)} + O(t^{-n/2-\gamma})$, где A – некоторая постоянная, $0 < \gamma < \min(a/2, (n/2)\sigma - 1)$.

Теперь применим теоремы 1 и 2 к уравнению Соболева с конвективной нелинейностью

$$\begin{aligned} \partial_t(u + \Delta^2 u) - \alpha \Delta u &= (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$ (см. уравнение (1) с $k = 2$, $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$). В следующей теореме мы покажем, что нелинейность $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$ в уравнении (24) является слабой при $\sigma > 1/n$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\sigma > 1/n$, $n = 1, 2, 3, 4$. Предположим, что

$$u_0 \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n), \quad a \in (0, 1),$$

причем норма $\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u_0\|_{\mathbf{W}_\infty^1}$ достаточно мала. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (24). Для этого решения при больших временах $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ справедлива асимптотика $u(t, x) = \theta(4\pi\alpha t)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\alpha t)} + O(t^{-n/2-\gamma})$, где $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$, $0 < \gamma < \min(a/2, (n/2)\sigma - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем пространство

$$\mathbf{X} = \{v \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n)) : \|v\|_{\mathbf{X}} < \infty\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} (\langle t \rangle^{-a/2} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t \rangle^{n/2} \|v(t)\|_{\mathbf{W}_\infty^1}).$$

Заметим, что $\sup_{t>0} \|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|\phi\|_{\mathbf{X}}$. Также обозначим

$$\mathbf{Z} = \{\phi \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) : \|\phi\|_{\mathbf{Z}} < \infty\}$$

с нормой $\|\phi\|_{\mathbf{Z}} = \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|\phi\|_{\mathbf{W}_\infty^1}$. Определим отображение $\mathcal{M}(v)$ формулой (17), которая с учетом (4) принимает вид

$$\mathcal{M}(v) = \mathcal{G}_2(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau.$$

Применение леммы 2 дает неравенства

$$\|\mathcal{G}_2\phi\|_{\mathbf{W}_\infty^1} \leq C\langle t \rangle^{-2}\|\phi\|_{\mathbf{W}_\infty^1} + C\langle t \rangle^{-1/2}\|\phi\|_{\mathbf{L}^1}$$

и

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla)(|w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{W}_\infty^1} \\ & \leq C \left\| |\nabla| \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(|w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \quad + C \left\| |\nabla| \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla)(|w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-2} \left(\| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{W}_\infty^1} \right. \\ & \quad \left. + \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n+1}{2}} \| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} \right) d\tau \\ & \quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{2}} \| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{W}_\infty^1} d\tau. \end{aligned}$$

Используя оценки

$$\begin{aligned} \| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{W}_\infty^1} & \leq C\langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)} \|w-v\|_{\mathbf{X}} (\|w\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{X}}^\sigma), \\ \| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} & \leq C\langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \|w-v\|_{\mathbf{X}} (\|w\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{X}}^\sigma), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla)(|w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{W}_\infty^1} \\ & \leq C \|w-v\|_{\mathbf{X}} (\|w\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{X}}^\sigma) \left(\int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{2}} d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\frac{t}{2}} (\langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n+1}{2}} + \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)} \langle t-\tau \rangle^{-2}) d\tau \right) \\ & \leq \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{2}} \|w-v\|_{\mathbf{X}} (\|w\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{X}}^\sigma), \end{aligned}$$

поскольку $\sigma > 1/n$, $n = 1, 2, 3, 4$, где $0 < \gamma < \min(1, n\sigma - 1)$. Аналогично с помощью леммы 2 выводим неравенства

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}_2\phi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} & \leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1,a}}, \\ \|\mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t)(\lambda \cdot \nabla)\phi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} & \leq C\langle t \rangle^{-\frac{1}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C\langle t \rangle^{\frac{a-1}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{L}^1}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla)(|w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \leq C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{1}{2}} \| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \\ & \quad + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{\frac{a-1}{2}} \| |w|^\sigma w(\tau) - |v|^\sigma v(\tau) \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C\|w - v\|_{\mathbf{X}}(\|w\|_{\mathbf{X}}^{\sigma} + \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma}) \left(\int_0^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma + \frac{a}{2}} \langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{2}} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} \langle t - \tau \rangle^{\frac{a}{2} - \frac{1}{2}} d\tau \right) \leq C\langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \|w - v\|_{\mathbf{X}}(\|w\|_{\mathbf{X}}^{\sigma} + \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma}) \end{aligned}$$

при $\sigma > 1/n$, где мы воспользовались неравенством $\| |w|^{\sigma} w(\tau) - |v|^{\sigma} v(\tau) \|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq \|w - v\|_{\mathbf{X}}(\|w\|_{\mathbf{X}}^{\sigma} + \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma}) \langle \tau \rangle^{-n\sigma/2 + a/2}$. Таким образом, $\|\mathcal{G}_2 \phi\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{Z}}$ и

$$\left\| \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t - \tau) (\mathcal{N}(w(\tau)) - \mathcal{N}(v(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\|w - v\|_{\mathbf{X}}(\|w\|_{\mathbf{X}} + \|v\|_{\mathbf{X}})^{\sigma}.$$

Следовательно, применяя теорему 1, мы видим, что существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_{\infty}^1(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (24), удовлетворяющее оценкам

$$\|u(t)\|_{\mathbf{W}_{\infty}^1} \leq C\langle t \rangle^{-n/2} \quad \text{и} \quad \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C\langle t \rangle^{a/2}. \quad (25)$$

Для доказательства асимптотики решения воспользуемся теоремой 2. Благодаря оценкам леммы 2 имеем следующее представление для оператора Грина: $\mathcal{G}_2(t)u_0 = \theta t^{-n/2} \tilde{G}_0(xt^{-1/2}) + O(t^{-(n+a)/2} \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $\tilde{G}_0(\xi) = (4\pi\alpha)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/(4\alpha)}$, $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$ и $a \in (0, 1]$. Также ввиду леммы 2

$$\|\mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t - \tau) (\lambda \cdot \nabla) |u|^{\sigma} u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq C(t - \tau)^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} (\| |u|^{\sigma} u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{\infty}} + \| |u|^{\sigma} u(\tau) \|_{\mathbf{L}^{1,a}}),$$

поэтому в силу полученных выше оценок (25) для решения имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t (\lambda \cdot \nabla) \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t - \tau) |u|^{\sigma} u(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq C\|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{n}{2} - \frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}\sigma} d\tau \\ &\quad + C\|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(\sigma+1)} d\tau \leq C\|u\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \langle t \rangle^{-\frac{n}{2} - \gamma}, \end{aligned}$$

где $0 < \gamma < \min(a/2, n\sigma/2 - 1)$. Таким образом, условия теоремы 2 выполнены и мы приходим к асимптотике $u(t, x) = \theta(4\pi\alpha t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha t)} + O(t^{-n/2 - \gamma})$ для решения задачи Коши (24). Теорема 4 доказана.

Применим также теоремы 1 и 2 к уравнению Соболева с конвективной нелинейностью

$$\begin{aligned} \partial_t(u - \Delta u) - \alpha \Delta u &= \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma} \nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (см. уравнение (1) с $k = 2$, $\mathcal{N} = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma} \nabla u)$, $\sigma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$). Оказывается, что нелинейность $\mathcal{N} = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^{\sigma} \nabla u)$ в уравнении (26) является слабой при любых $\sigma > 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\sigma > 0$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_p^2(\mathbb{R}^n)$, $a \in (0, 1)$, $p > (1 + \sigma)/(2\sigma)$ при $n = 1$ и $p > n$ при $n \geq 2$, причем норма $\|u_0\|_{\mathbf{W}_p^2(\mathbb{R}^n)}$ достаточно мала. Тогда существует единственное решение

$u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (26). Для этого решения справедлива асимптотика $u(t, x) = \theta(4\pi\alpha t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha t)} + O(t^{-n/2-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$, $\gamma = \min(1, \sigma, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя методу доказательства теоремы 1, рассмотрим шар $\mathbf{X}_\rho = \{u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\mathbb{R}^n)) : \|u\|_{\mathbf{Y}} \leq \rho\}$, где $\rho > 0$ достаточно мало и

$$\|u\|_{\mathbf{Y}} = \sup_{t>0} \sup_{0 \leq |\beta| \leq 2} \sup_{1 \leq q \leq p} \langle t \rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q}) + \frac{|\beta|}{2}} \|\partial^\beta u(t)\|_{\mathbf{L}^q}.$$

Для всех $v \in \mathbf{X}_\rho$ определим отображение $\mathcal{M}(v)$ формулой (17), которая с учетом (4) принимает вид

$$\mathcal{M}(v) = \mathcal{G}_1(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{B}_1 \mathcal{G}_1(t-\tau) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau,$$

и докажем, что $\mathcal{M}(v) \in \mathbf{X}_\rho$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_1 \mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{W}_q^{|\beta|}} &\leq C \|\mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{L}^q} \leq C \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^q} \|\nabla v(\tau)\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma \\ &\leq C \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-1-\frac{\sigma}{2}-\frac{n\sigma}{2}(1-\frac{1}{p})} \|v\|_{\mathbf{Y}}^{1+\sigma}. \end{aligned}$$

Ввиду первой оценки леммы 1 имеем $\|\mathcal{G}_1 \phi\|_{\mathbf{Y}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{Z}}$ и

$$\begin{aligned} &\left\langle t \right\rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q}) + \frac{|\beta|}{2}} \left\| \partial^\beta \int_0^t \mathcal{G}_1(t-\tau) \mathcal{B}_1 \mathcal{N}(v) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^q} \\ &\leq C \langle t \rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q}) + \frac{|\beta|}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q}) - \frac{|\beta|}{2}} (\|\mathcal{B}_1 \mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{B}_1 \mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{W}_p^{|\beta|}}) d\tau \\ &\quad + C \langle t \rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q}) + \frac{|\beta|}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{|\beta|}{2}} \|\mathcal{B}_1 \mathcal{N}(v)\|_{\mathbf{W}_q^{|\beta|}} d\tau \\ &\leq C \|v\|_{\mathbf{Y}}^{1+\sigma} \int_0^{\frac{t}{2}} \langle \tau \rangle^{-1-\frac{\sigma}{2}-\frac{n\sigma}{2}(1-\frac{1}{p})} d\tau \\ &\quad + C \|v\|_{\mathbf{Y}}^{1+\sigma} \int_{\frac{t}{2}}^t \langle t-\tau \rangle^{-\frac{|\beta|}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{|\beta|}{2}-1-\frac{\sigma}{2}-\frac{n\sigma}{2}(1-\frac{1}{p})} d\tau \leq C \|v\|_{\mathbf{Y}}^{1+\sigma} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $0 \leq |\beta| \leq 2$, $1 \leq q \leq p$. Откуда следует, что $\mathcal{M}(v) \in \mathbf{X}_\rho$.

Покажем теперь, что $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением в норме

$$\|u\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} \sup_{|\beta|=0,1} \sup_{1 \leq q \leq p} \langle t \rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q}) + \frac{|\beta|}{2}} \|\partial^\beta u(t)\|_{\mathbf{L}^q}.$$

Из теоремы вложения Соболева (см. [76], [77]) имеем $\|v\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|v\|_{\mathbf{W}_p^1}$ для $p > (1+\sigma)/(2\sigma)$ при $n = 1$ и для $p > n$ при $n \geq 2$, поэтому

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{B}_1(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w))\|_{\mathbf{W}_q^1} \\ &\leq C \|\nabla v(\tau) - \nabla w(\tau)\|_{\mathbf{L}^q} (\|\nabla v(\tau)\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma + \|\nabla w(\tau)\|_{\mathbf{W}_p^1}^\sigma) \\ &\leq C \langle \tau \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-1-\frac{\sigma}{2}-\frac{n\sigma}{2}(1-\frac{1}{p})} \|v-w\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{Y}}^\sigma + \|w\|_{\mathbf{Y}}^\sigma). \end{aligned}$$

Отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned}
& \left\langle t \right\rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})+\frac{|\beta|}{2}} \left\| \partial^\beta \int_0^t \mathcal{G}_1(t-\tau) \mathcal{B}_1(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^q} \\
& \leq C \left\langle t \right\rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})+\frac{|\beta|}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{|\beta|}{2}} \\
& \quad \times \left(\|\mathcal{B}_1(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w))\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{B}_1(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w))\|_{\mathbf{W}_p^1} \right) d\tau \\
& \quad + C \left\langle t \right\rangle^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{q})+\frac{|\beta|}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{|\beta|}{2}} \|\mathcal{B}_1(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w))\|_{\mathbf{W}_q^1} d\tau \\
& \leq C \|v - w\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{Y}}^\sigma + \|w\|_{\mathbf{Y}}^\sigma) \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \left\langle \tau \right\rangle^{-\frac{n\sigma}{2}-1-\frac{\sigma}{2}+\frac{n\sigma}{2p}} d\tau \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{t}{2}}^t \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{|\beta|}{2}} \left\langle \tau \right\rangle^{\frac{|\beta|}{2}-1-\frac{\sigma}{2}-\frac{n\sigma}{2}(1-\frac{1}{p})} d\tau \right) \leq C \|v - w\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{Y}}^\sigma + \|w\|_{\mathbf{Y}}^\sigma)
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, $|\beta| = 0, 1$, $1 \leq q \leq p$. Таким образом, $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением в норме пространства $\mathbf{X}$; поэтому существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_p^2(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (26).

Докажем асимптотику для решения. Из второй оценки леммы 1 имеем $\mathcal{G}_1(t)u_0 = \theta G_0(t, x) + O(t^{-(n+a)/2}(\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty}))$, где $G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-n/2} \times e^{-|x|^2/(4\alpha t)}$. Для нелинейности $\mathcal{N}(u) = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u)$ в интегральном уравнении (17) найдем

$$\left\| \int_0^t \mathcal{B}_1 \mathcal{G}_1(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \int_0^t \|\mathcal{G}_1(t-\tau) \mathcal{B}_1 \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau.$$

Поэтому в силу первой оценки леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}
& \left\langle t \right\rangle^{\frac{n+\gamma}{2}} \left\| \int_0^t \mathcal{B}_1 \mathcal{G}_1(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \leq C \left\langle t \right\rangle^{\frac{n+\gamma}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \left(\|\mathcal{B}_1(|\nabla u|^\sigma \nabla u(\tau))\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\mathcal{B}_1(|\nabla u|^\sigma \nabla u(\tau))\|_{\mathbf{W}_\infty^1} \right) d\tau \\
& \quad + C \left\langle t \right\rangle^{\frac{n+\gamma}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{n+1}{2}} \left(\|\mathcal{B}_1(|\nabla u|^\sigma \nabla u(\tau))\|_{\mathbf{L}^1} + \|\mathcal{B}_1(|\nabla u|^\sigma \nabla u(\tau))\|_{\mathbf{W}_p^1} \right) d\tau \\
& \leq C \left\langle t \right\rangle^{\frac{n+\gamma}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1+\sigma} d\tau \\
& \quad + C \left\langle t \right\rangle^{\frac{n+\gamma}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{n+1}{2}} \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\
& \leq C \|u\|_{\mathbf{Y}}^{1+\sigma} \left\langle t \right\rangle^{\frac{n+\gamma}{2}} \left(\int_{\frac{t}{2}}^t \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{1}{2}} \left\langle \tau \right\rangle^{-\frac{n+1}{2}(1+\sigma)} d\tau + \int_0^{\frac{t}{2}} \left\langle t-\tau \right\rangle^{-\frac{n+1}{2}} \left\langle \tau \right\rangle^{-\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2}\sigma} d\tau \right) \\
& \leq C \|u\|_{\mathbf{Y}}^{1+\sigma},
\end{aligned}$$

где $\gamma = \min(1, \sigma)$, при $p > (1 + \sigma)/(2\sigma)$ для $n = 1$ и $p > n$ для $n \geq 2$. Откуда приходим к асимптотике для решения. Теорема 5 доказана.

3.2. Большие начальные данные. В случае $\lambda < 0$ в уравнении (23) можно избавиться от условия малости начальных возмущений. В работе [64] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\sigma > 2/n$, $\lambda < 0$, $n = 1, 2$. Предположим, что

$$u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n), \quad a \in (0, 1].$$

Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (23). Для этого решения справедлива асимптотика $u(t, x) = At^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\alpha t)} + O(t^{-n/2-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где A — некоторая постоянная, $0 < \gamma < \min(a/2, n\sigma/2 - 1)$.

Обратимся теперь к уравнению (24). Рассмотрим для простоты случай $\sigma \geq 1$. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\sigma \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$. Предположим, что

$$u_0 \in \mathbf{H}^4(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n), \quad a \geq 0.$$

Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^4(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (24). Для этого решения справедлива асимптотика $u(t, x) = \theta(4\pi\alpha t)^{-n/2}e^{-|x|^2/(4\alpha t)} + O(t^{-n/2-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$, $0 < \gamma < \min(a/2, n\sigma/2 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим нормы $\|\phi\|_{p,q} \equiv \|\|\phi(t, x)\|_{\mathbf{L}^q(\mathbb{R}_x)}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_t^+)}$. Сначала докажем глобальное во времени существование решений $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^4(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (24), удовлетворяющих априорной оценке

$$\|(1 + \Delta^2)u\|_{\infty,2} + \|\nabla(1 - \Delta)u\|_{2,2} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{H}^2}. \quad (27)$$

Локальное существование решений $u \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}^4(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (24) для некоторого $T > 0$ легко установить, например, с помощью принципа сжимающих отображений. Умножим уравнение (24) на $2u$ и проинтегрируем результат по всему пространству $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\frac{d}{dt}(\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\Delta u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) + 2\alpha\|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = 0.$$

Затем, интегрируя по времени, получаем

$$\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\Delta u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\alpha \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}^2}^2$$

для всех $t \in [0, T]$. Аналогично, умножив уравнение (24) на $2\Delta^2 u$ и проинтегрировав результат по всему пространству $x \in \mathbb{R}^n$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\Delta^2 u\|_{\mathbf{L}^2}^2) + 2\alpha\|\nabla \Delta u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ \leq C\|\nabla \Delta u\|_{\mathbf{L}^2}(\| |u|^\sigma \Delta u \|_{\mathbf{L}^2} + \| |u|^{\sigma-1} (\nabla u)^2 \|_{\mathbf{L}^2}). \end{aligned}$$

Интегрирование последнего неравенства по времени дает

$$\|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\Delta^2 u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha \int_0^t \|\nabla \Delta u\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C \|u_0\|_{\mathbf{H}^4}^2$$

для всех $t \in [0, T]$. Пользуясь оценками леммы 2 и представлением (4), получаем неравенства

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{W}_1^2} &\leq C \|u_0\|_{\mathbf{W}_1^2} + C \int_0^t \|\nabla \mathcal{B}_2 u^2(\tau)\|_{\mathbf{W}_1^2} d\tau \\ &\leq C + C \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C(1+t), \\ \|u\|_{\mathbf{L}^{1,a}} &\leq C \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + C \int_0^t \langle t \rangle^{\frac{a}{2}} \|\nabla \mathcal{B}_2 u^2(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\ &\quad + C \int_0^t \|\nabla \mathcal{B}_2 u^2(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \leq C \langle t \rangle^{\frac{a}{2}+1} + C \int_0^t \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t \in [0, T]$, откуда по лемме Гронуолла следует, что

$$e^{-Ct} (\|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u(t)\|_{\mathbf{W}_1^2}) \leq C$$

для всех $t \in [0, T]$ с не зависящей от T постоянной $C > 0$. Таким образом, стандартной процедурой мы можем продолжить решение для всех $T > 0$. При этом $\mathcal{B}_2 \phi = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^{2k})^{-1} \hat{\phi}(\xi)$ задан своим ядром.

Применив к уравнению (24) оператор

$$\mathcal{B}_2 \phi = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^4)^{-1} \hat{\phi}(\xi) = (1 + \Delta^2)^{-1} \phi,$$

получим

$$\partial_t u = \alpha \Delta u + (\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u - \alpha \Delta^3 \mathcal{B}_2 u + (\lambda \cdot \nabla) \Delta^2 \mathcal{B}_2 |u|^\sigma u. \quad (28)$$

Чтобы оценить $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ -норму решения, умножим уравнение (28) на функцию $S(t, x) = \text{sign}(u(t, x))$ и проинтегрируем результат по всему пространству $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) \partial_t u(t, x) dx &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) \Delta u dx + \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) (\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u dx \\ &\quad - \alpha \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) \Delta^3 \mathcal{B}_2 u dx + \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) (\lambda \cdot \nabla) \Delta^2 \mathcal{B}_2 |u|^\sigma u dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u_t(t, x) S(t, x) dx &= \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) (\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u dx &= 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} S(t, x) \Delta u dx \leq 0. \end{aligned}$$

Для оставшихся членов в уравнении (29) докажем оценки

$$\left| \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} S(t) \Delta^3 \mathcal{B}_2 u(t) dx \right| \leq C, \quad \|\Delta^2 \mathcal{B}_2 |u|^\sigma \nabla u\|_{1,1} \leq C. \quad (30)$$

Перепишем уравнение (24) в интегральном виде:

$$u(t) = \mathcal{G}_2(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u(\tau) d\tau, \quad (31)$$

откуда, умножив на $\Delta^3 \mathcal{B}_2$, получим

$$\begin{aligned} \Delta^3 \mathcal{B}_2 u(t) &= \Delta^3 \mathcal{B}_2 \mathcal{G}_2(t)u_0 + \int_0^{t-\nu(t)} \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{t-\nu(t)}^t \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u(\tau) d\tau \equiv J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\nu(t) = t^{2/3}$ при $t \geq 1$ и $\nu(t) = 0$ при $t \in (0, 1)$. Первое слагаемое в правой части (32) оценивается для всех $t > 0$ с помощью леммы 2 следующим образом:

$$\|J_1\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^{-2} \|u_0\|_{\mathbf{W}^1_1}. \quad (33)$$

Для второго слагаемого в правой части (32) имеем в силу первой оценки леммы 2

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} S(t) \Delta^3 \mathcal{B}_2 u(t) dx \right| &\leq \int_0^T dt \|J_2\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \int_0^T dt \int_0^{t-\nu(t)} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{3}{2}} \| |u|^{\sigma-1} (\nabla u)^2 \|_{\mathbf{L}^1} d\tau \\ &\quad + C \int_0^T dt \int_0^{t-\nu(t)} \langle t-\tau \rangle^{-2} (\| |u|^{\sigma-1} (\nabla u) \Delta u \|_{\mathbf{L}^1} + \| |u|^{\sigma-1} u \nabla \Delta u \|_{\mathbf{L}^1}) d\tau \\ &\leq C \int_0^T dt \int_0^{t-\nu(t)} \langle t-\tau \rangle^{-\frac{3}{2}} \|u\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma-1} \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \\ &\quad + C \int_0^T dt \int_0^{t-\nu(t)} \langle t-\tau \rangle^{-2} (\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma-1} \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \|\Delta u\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\quad + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma-1} \|u\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla \Delta u\|_{\mathbf{L}^2}) d\tau \end{aligned}$$

и в силу неравенств (27)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} S(t) \Delta^3 \mathcal{B}_2 u(t) dx \right| &\leq C \|(1 + \Delta^2)u\|_{\infty,2}^{\sigma-1} \int_0^T dt \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}} \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2} (\|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2} + \|\Delta u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}) d\tau \\ &\quad + C \|(1 + \Delta^2)u\|_{\infty,2}^\sigma \int_0^T dt \langle t \rangle^{-\frac{8}{15}} \int_{\nu(t)}^t d\tau \langle \tau \rangle^{-\frac{6}{5}} \|\nabla \Delta u(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C + C \int_0^T d\tau \langle \tau \rangle^{-\frac{6}{5}} \int_0^T \langle t \rangle^{-\frac{8}{15}} \|\nabla u(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^2} dt \leq C. \end{aligned} \quad (34)$$

Для оставшегося слагаемого J_3 в правой части (32) получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} dx S(t) J_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} dx |u(t)| \int_{t-\nu(t)}^t d\tau \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) S(\tau) |u|^{\sigma-1} (\lambda \cdot \nabla) u(\tau) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} dx S(t) \int_{t-\nu(t)}^t d\tau [\Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau), u(\tau)] S(\tau) |u|^{\sigma-1} (\lambda \cdot \nabla) u(\tau) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} dx S(t) \int_{t-\nu(t)}^t d\tau (u(\tau, x) - u(t, x)) \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) S(\tau) \\
&\times |u|^{\sigma-1} (\lambda \cdot \nabla) u(\tau) = I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$[\Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau), u(\tau)] \phi(\tau) \equiv \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) (u(\tau) \phi(\tau)) - u(\tau) \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) \phi(\tau).$$

В первом слагаемом I_1 интегрирование по частям дает

$$I_1 = - \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} dx \partial_{x_j} |u(t)| \int_{t-\nu(t)}^t d\tau \partial_{x_j} \Delta^2 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) S(\tau) |u|^{\sigma-1} (\lambda \cdot \nabla) u(\tau);$$

откуда по неравенству Юнга ввиду (27) получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^T |I_1(t)| dt &\leq C \int_0^T dt \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \int_{t-\nu(t)}^t \frac{d\tau}{\langle t-\tau \rangle^2} \|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\sigma-1} \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq C \int_0^T dt \|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \int_0^T \frac{d\tau}{\langle \tau \rangle^2} \|\nabla u(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|\nabla u\|_{2,2}^2 \leq C.
\end{aligned} \tag{36}$$

Для интеграла I_2 с помощью леммы 2 и неравенства Юнга найдем

$$\begin{aligned}
\int_0^T |I_2(t)| dt &\leq \int_0^T dt \int_0^t d\tau \|[\Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau), u(\tau)] S(\tau) |u|^{\sigma-1} (\lambda \cdot \nabla) u(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\
&\leq C \int_0^T dt \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-2} \|\nabla u(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C \|\nabla u\|_{2,2}^2 \leq C.
\end{aligned} \tag{37}$$

Чтобы оценить третье слагаемое I_3 , запишем $u(t) - u(t-\tau) = \int_0^\tau u_t(t-t') dt'$ и воспользуемся интегральным уравнением (31):

$$u_t = \partial_t \mathcal{G}_2(t) u_0 - \mathcal{B}_2((\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u) - \int_0^t d\tau' \partial_t \mathcal{G}_2(t-\tau') \mathcal{B}_2(\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u(\tau');$$

откуда благодаря лемме 2 имеем оценку

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \int_0^\tau dt' \langle t-t' \rangle^{-2} + C \int_0^\tau dt' \|u(t-t')\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla u(t-t')\|_{\mathbf{L}^2} \\
&+ C \int_0^\tau dt' \int_0^{t-t'} d\tau' \langle \tau' \rangle^{-2} \|u(t-t'-\tau')\|_{\mathbf{L}^\infty} \|\nabla u(t-t'-\tau')\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^T |I_3(t)| dt &\leq \int_0^T dt \int_0^{\nu(t)} d\tau \|u(t) - u(t - \tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\
&\quad \times \|\Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(\tau) S(t - \tau) |u|^{\sigma-1} (\lambda \cdot \nabla) u(t - \tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
&\leq C \int_0^T dt \int_0^{\nu(t)} d\tau \langle \tau \rangle^{-2} \|\nabla u(t - \tau)\|_{\mathbf{L}^2} \left(\int_0^\tau dt' \langle t - t' \rangle^{-2} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\tau dt' \|\nabla u(t - t')\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} + \int_0^\tau dt' \int_0^{t-t'} d\tau' \langle \tau' \rangle^{-2} \|\nabla u(t - t' - \tau')\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая (27), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
\int_0^T |I_3(t)| dt &\leq \int_0^T dt' \int_{t'}^T d\tau \langle \tau \rangle^{-2} \int_\tau^T dt \|\nabla u(t - \tau)\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\quad \times \left(\langle t - t' \rangle^{-2} + \|\nabla u(t - t')\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} + \int_0^{t-t'} d\tau' \langle \tau' \rangle^{-2} \|\nabla u(t - t' - \tau')\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} \right) \\
&\leq C \int_0^T d\tau \langle \tau \rangle^{-\frac{9}{8}} \int_\tau^T dt \|\nabla u(t - \tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \int_0^T dt' \langle t' \rangle^{-\frac{7}{8}} \|\nabla u(t - t')\|_{\mathbf{L}^2}^{1/2} \leq C. \quad (38)
\end{aligned}$$

Оценки (36)–(38) вместе (35) дают

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} dx S(t) \int_{t-\nu(t)}^t \Delta^3 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t - \tau) |u|^\sigma (\lambda \cdot \nabla) u(\tau) d\tau \right| \leq C. \quad (39)$$

Собирая вместе неравенства (33), (34) и (39), приходим к первой оценке в (30).

Чтобы доказать вторую оценку в (30), запишем неравенство

$$\|\Delta^2 \mathcal{B}_2 |u|^\sigma \nabla u\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u \mathcal{B}_2 \Delta^2 \nabla u\|_{\mathbf{L}^1} + \|[u, \mathcal{B}_2] \Delta^2 \nabla u\|_{\mathbf{L}^1},$$

где

$$[u, \mathcal{B}_2] \Delta u = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} K(x - y) (u(t, x) - u(t, y)) \Delta u(t, y) dy.$$

С помощью интегрирования по частям и неравенства Коши получаем

$$\begin{aligned}
\|[u, \mathcal{B}_2] \Delta^2 \nabla u\|_{\mathbf{L}^1} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y) (u(t, x) - u(t, y)) \Delta^2 \nabla u(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}^1} \\
&\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla K(x - y) (u(t, x) - u(t, y)) \Delta^2 u(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}^1} \\
&\quad + \left\| \int_{\mathbb{R}^n} K(x - y) \nabla u(t, y) \Delta^2 u(t, y) dy \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2.
\end{aligned}$$

Поэтому $\| [u, \mathcal{B}_2] \Delta^2 \nabla u \|_{1,1} \leq C$ для всех $t > 0$. Ввиду интегрального уравнения (31) найдем

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 \nabla u(t) \|_{\mathbf{L}^2} \\ & \leq \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 \nabla \mathcal{G}_2(t) u_0 \|_{\mathbf{L}^2} + \left\| \int_0^t \Delta^2 \nabla \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) (\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ & \leq C \langle t \rangle^{-2} \| u_0 \|_{\mathbf{H}^1} + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-2} \| \nabla u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \\ & \quad + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-2} \| \nabla u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2}^{1/2} \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2} d\tau, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 u(t) \|_{\mathbf{L}^2} \\ & \leq \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 \mathcal{G}_2(t) u_0 \|_{\mathbf{L}^2} + \left\| \int_0^t \Delta^2 \mathcal{B}_2^2 \mathcal{G}_2(t-\tau) (\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ & \leq C \langle t \rangle^{-2} \| u_0 \|_{\mathbf{L}^2} + C \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-2} (\| \nabla u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2}^2 + \| \nabla u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}}) d\tau. \end{aligned} \quad (41)$$

Поэтому $\| \mathcal{B}_2 \Delta^2 u \|_{\frac{4}{3},2} \leq C$. Используя неравенство Юнга, из последних трех неравенств получаем

$$\begin{aligned} \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 \nabla u \|_{1,2} & \leq C \| u_0 \|_{\mathbf{H}^1} + C \left\| \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-2} \| \nabla u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \right\|_{\mathbf{L}_t^1} \\ & \quad + C \left\| \int_0^t \langle t-\tau \rangle^{-2} \| \nabla u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2}^{1/2} \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 u(\tau) \|_{\mathbf{L}^2} d\tau \right\|_{\mathbf{L}_t^1} \\ & \leq C \| u_0 \|_{\mathbf{H}^1} + C \| \nabla u(\tau) \|_{2,2}^2 + C \| \nabla u(\tau) \|_{2,2}^{1/2} \| \mathcal{B}_2 \Delta^2 u \|_{\frac{4}{3},2} \leq C. \end{aligned}$$

Так что справедлива вторая оценка в (30).

Теперь установим оптимальную оценку убывания

$$\| u(t) \|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})} \quad (42)$$

при $1 \leq p \leq 2$. Из (29) найдем

$$\begin{aligned} \| u(t) \|_{\mathbf{L}^1} & \leq \| u_0 \|_{\mathbf{L}^1} + \left| \int_0^t dt \int_{\mathbb{R}^n} S(t) \Delta^3 \mathcal{B}_2 u dx \right| \\ & \quad + \left| \int_0^t dt \int_{\mathbb{R}^n} S(t) (\lambda \cdot \nabla) \Delta^2 \mathcal{B}_2 |u|^\sigma u dx \right| \leq C. \end{aligned}$$

Поэтому для всех $t > 0$ имеем

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{u}(t, \xi)| \leq C \| u(t) \|_{\mathbf{L}^1} \leq \| u_0 \|_{\mathbf{L}^1} + C \leq C,$$

что дает оценку (42) при $p = 1$.

Умножив уравнение (24) на $2u$ и проинтегрировав результат по всем $x \in \mathbb{R}^n$, получим

$$\frac{d}{dt} (\| u(t) \|_{\mathbf{L}^2}^2 + \| \Delta u(t) \|_{\mathbf{L}^2}^2) = -2 \| \nabla u(t) \|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (43)$$

Используя теорему Планшереля и метод расщепления Фурье из работы [82], находим

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \|\xi \hat{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \int_{|\xi| \leq \delta} |\hat{u}(t, \xi)|^2 |\xi|^2 d\xi + \int_{|\xi| \geq \delta} |\hat{u}(t, \xi)|^2 |\xi|^2 d\xi \\ &\geq \delta^2 \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\delta^{n+2} \sup_{|\xi| \leq \delta} |\hat{u}(t, \xi)|^2,\end{aligned}$$

где $\delta > 0$. Таким образом, из (43) получаем

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq -2\delta^2 \|u(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C\delta^{n+2} \sup_{|\xi| \leq \delta} |\hat{u}(t, \xi)|^2. \quad (44)$$

Выберем теперь $2\delta^2 = (n+1)(1+t)^{-1}$ и сделаем замену $\|u(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 = (1+t)^{-n-1} \times W(t)$. Тогда, ввиду оценок $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}^1}$ и $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C$, получим из (44) неравенство $\frac{d}{dt} W(t) \leq C(1+t)^{n/2}$. Откуда интегрированием по времени получаем

$$W(t) \leq \|u_0\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C((1+t)^{\frac{n}{2}+1} - 1),$$

что дает оптимальную оценку убывания $\mathbf{L}^2$ -нормы решения: $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(1+t)^{-n/4}$. Оценка (42) теперь следует из неравенства Гёльдера. Аналогично, пользуясь интегральным уравнением (31), устанавливаем оптимальные оценки убывания в $\mathbf{W}_{\infty}^1$ - и $\mathbf{L}^{1,a}$ -нормах:

$$\|u(t)\|_{\mathbf{W}_{\infty}^1} \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}}, \quad \|u(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C(1+t)^{\frac{a}{2}}.$$

Асимптотика $u(t, x) = \theta(4\pi\alpha t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha t)} + O(t^{-n/2-\gamma})$ для решения задачи Коши (24) доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 4. Теорема 7 доказана.

Для уравнения (26) в случае $\lambda > 0$ мы можем отказаться от требования малости начальных данных. Для простоты ограничимся случаем $n = 1$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, $n = 1$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$, $a \in (0, 1]$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2(\mathbb{R}))$ задачи Коши (26). Для этого решения справедлива асимптотика $u(t, x) = \theta(4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4\alpha t)} + O(t^{-1/2-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, где $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$, $\gamma = \min(1, \sigma, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим уравнение (26), в одномерном случае имеющее вид $\partial_t(u - \partial_x^2 u) - \alpha \partial_x^2 u = \lambda \partial_x(|u_x|^\sigma u_x)$, на $2u$ и проинтегрируем результат по $x \in \mathbb{R}$, тогда получим

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) = -2\alpha \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\lambda \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^{\sigma+2}}^{\sigma+2}.$$

Аналогично, умножив уравнение (26) на $2u_{xx}$ и проинтегрировав результат по $x \in \mathbb{R}$, найдем

$$\frac{d}{dt} (\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) = -2\alpha \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\lambda(\sigma+1) \| |u_x|^\sigma u_{xx}^2 \|_{\mathbf{L}^1}. \quad (45)$$

Наконец, умножив уравнение (26) на $2x^2u_{xx}$ и проинтегрировав результат по $x \in \mathbb{R}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|xu_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \|u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|xu_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2) \\ = -2\alpha\|x^2u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\lambda(\sigma+1)\| |u_x|^\sigma x^2u_{xx}^2 \|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

В частности, мы видим, что нормы $\|u(t)\|_{\mathbf{H}^2}$ и $\|xu_x(t)\|_{\mathbf{H}^1}$ ограничены для всех $t > 0$.

Теперь докажем грубую оценку убывания $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-1/4}$ при $t > 0$. Используя теорему Планшереля и метод расщепления Фурье из работы [82], имеем

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &= \|\xi^2 \hat{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \int_{|\xi| \leq \delta} |\hat{u}(t, \xi)|^2 \xi^4 d\xi + \int_{|\xi| \geq \delta} |\hat{u}(t, \xi)|^2 \xi^4 d\xi \\ &\geq \delta^2 \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 - 2\delta^3 \sup_{|\xi| \leq \delta} |\xi \hat{u}(t, \xi)|^2, \end{aligned}$$

где $\delta > 0$. Таким образом, из (45) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt} \|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq -\alpha\delta^2 \|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + 4\alpha\delta^3 \sup_{|\xi| \leq \delta} |\xi \hat{u}(t, \xi)|^2. \quad (46)$$

Выберем $\alpha\delta^2 = 2(t_0 + t)^{-1}$, $t_0 = \sqrt{2/\alpha}$ и сделаем замену $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 = (t_0 + t)^{-2} \times W(t)$. Заметим, что

$$\sup_{|\xi| \leq \delta} |\xi \hat{u}(t, \xi)| \leq C\|\xi \hat{u}(t, \xi)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\|xu_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} + C\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C. \quad (47)$$

В силу (47) из (46) получим

$$\frac{d}{dt} W(t) \leq C(t_0 + t)^{\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

Интегрирование (48) по времени дает $W(t) \leq \|\partial_x u_0\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C((t_0 + t)^{3/2} - 1)$. Таким образом, получаем оценку убывания $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-1/4}$ для всех $t > 0$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} &\leq C\langle t \rangle^{-3/4} (\|u_0\|_{\mathbf{H}^2} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) \\ &\quad + C \int_0^t \|\partial_x^2 \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B}(|u_x|^\sigma u_x)\|_{\mathbf{H}^1} d\tau, \end{aligned} \quad (49)$$

где, в силу первой оценки леммы 1,

$$\begin{aligned} \|\partial_x^2 \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{B}(|u_x|^\sigma u_x)\|_{\mathbf{H}^1} &\leq C\langle t - \tau \rangle^{-\frac{1}{2r} - \frac{3}{4}} (\|u_x\|_{\mathbf{L}^{r(\sigma+1)}}^{\sigma+1} + \| |u_x|^\sigma u_x \|_{\mathbf{H}^1}) \\ &\leq C\langle t - \tau \rangle^{-1 - \frac{\sigma}{4}} \|u_x(\tau)\|_{\mathbf{H}^1}^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-\frac{3}{4}} (\|u_0\|_{\mathbf{H}^2} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) + C \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-1 - \frac{\sigma}{4}} \|u_x(\tau)\|_{\mathbf{H}^1}^{\sigma+1} d\tau. \quad (50)$$

Подставляя в правую часть (50) оценку $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-1/4}$, находим, что

$$\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-\frac{3}{4}} (\|u_0\|_{\mathbf{H}^2} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) + C \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-1 - \frac{\sigma}{4}} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{4} - \frac{\sigma}{4}} d\tau \leq C\langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{4}},$$

где $\gamma = \min(3, 1 + \sigma)$. Подстановка в правую часть (50) полученного неравенства $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-1/4 - \sigma/4}$ дает

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} &\leq C\langle t \rangle^{-\frac{3}{4}} (\|u_0\|_{\mathbf{H}^2} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^1}) \\ &+ C \int_0^t \langle t - \tau \rangle^{-1 - \frac{\sigma}{4}} \langle \tau \rangle^{-\frac{\gamma}{4}(1 + \sigma)} d\tau \leq C\langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{4}}, \end{aligned}$$

где $\gamma = \min(3, (1 + \sigma)^2)$. Итерируя эти оценки, мы приходим к неравенству $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-\gamma/4}$ с $\gamma = \min(3, (1 + \sigma)^k)$. Так что мы можем гарантировать, что $\gamma = 3$ после конечного числа итераций. Таким образом, получаем оптимальную оценку убывания $\|u_x(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle t \rangle^{-3/4}$.

Асимптотика решения $u(t, x) = \theta(4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/(4\alpha t)} + O(t^{-1/2 - \gamma})$ задачи Коши (26) доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 5. Теорема 8 доказана.

4. Критическая неконвективная нелинейность

4.1. Малые начальные данные. В этом разделе мы разовьем общий подход к изучению асимптотики при больших временах для решений эволюционных диссипативных уравнений с критической неконвективной нелинейностью, т. е. когда скорость убывания по времени линейных и нелинейных членов в уравнении совпадает. Мы покажем, что характер асимптотического поведения решений эволюционных уравнений с критической неконвективной нелинейностью отличается от соответствующего линейного случая логарифмической коррекцией в скорости убывания по времени. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{N}(u) + \mathcal{L}u &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{51}$$

с критической неконвективной нелинейностью $\mathcal{N}(u)$ (см. определение (52) ниже). Пусть $\mathbf{Z}$ – некоторое метрическое пространство функций на $\mathbb{R}^n$, также фиксируем полное метрическое пространство $\mathbf{X}$ функций на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Как и выше, будем обозначать через $G_0 \in \mathbf{X}$ асимптотическое ядро оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ с соответствующим непрерывным линейным функционалом f (см. определение (18) выше). Будем называть нелинейность $\mathcal{N}$ в уравнении (51) критической неконвективной, если выполнена оценка

$$\int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \geq \eta \theta^{\sigma+1} \log(1 + t) \tag{52}$$

для всех $t > 0$, $\theta > 0$ с некоторыми положительными постоянными η и σ . Смысл неконвективности состоит в том, что функционал от нелинейности отличен от нуля. А критичность заключается в относительно медленном убывании по времени, так что интеграл логарифмически расходится. Поскольку часто функционал f задается интегралом по всему пространству: $f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx$, то в этом случае типичным примером неконвективной нелинейности является степенная нелинейность $\mathcal{N} = \lambda |u|^\sigma u$, в то время как нелинейности, имеющие вид полной производной, $\mathcal{N} = \lambda \operatorname{div}(|\nabla u|^\sigma \nabla u)$ и $\mathcal{N} = (\lambda \cdot \nabla) |u|^\sigma u$, относятся к конвективному типу.

Теперь мы установим глобальное существование и получим асимптотику при больших временах решений задачи Коши (51) с критической неконвективной нелинейностью $\mathcal{N}$. Определим функцию $g(t) = 1 + \eta\theta^\sigma \log(1+t)$ с некоторыми положительными постоянными η , θ и σ .

ТЕОРЕМА 9. *Предположим, что линейный оператор $\mathcal{L}$ в (51) имеет нулевое среднее значение: $f(\mathcal{L}u) = 0$ для всех $u \in \mathbf{X}$. Пусть нелинейность $\mathcal{N}(u)$ в (51) является критической неконвективной и такой, что*

$$e^z \mathcal{N}(ue^{-z}) = e^{-\sigma \operatorname{Re} z} \mathcal{N}(u) \quad (53)$$

для любых $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathbf{X}$, где $\sigma > 0$. Пусть начальные возмущения $u_0 \in \mathbf{Z}$ имеют малую норму $\|u_0\|_{\mathbf{Z}} \leq \varepsilon$ и $\theta \equiv \|f(u_0)\| \geq C\varepsilon > 0$ при некотором $C > 0$. Предположим, что при всех $t > 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & |\nu(t)f(\mathcal{N}(v(t)) - \mathcal{N}(w(t)))| \\ & \leq C\{t\}^{-\alpha}\langle t \rangle^{-1} \|\nu(t)(v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|w\|_{\mathbf{X}}^\sigma) \end{aligned} \quad (54)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$, $\nu(t) > 0$, где $\alpha < 1$, $\sigma > 0$, а также оценка

$$\begin{aligned} & \left\| g(t) \int_0^t g^{-1}(\tau) |\mathcal{G}(t-\tau)(\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ & \leq C\|v - w\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^\sigma \left(1 + \frac{\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}}}{\theta} \right) \end{aligned} \quad (55)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$ таких, что $f(v) = f(w) = \theta > 0$, где $\sigma > 0$ и $\mathcal{K}(v) = \mathcal{N}(v) - v\theta^{-1}f(\mathcal{N}(v))$. Тогда существует единственное глобальное решение $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (51). Это решение удовлетворяет оценке $\|g^{1/\sigma}u\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$. Более того, в предположении, что

$$1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau = g(t) + O(\log g(t)) \quad (56)$$

при $t \rightarrow \infty$, справедлива асимптотическая оценка

$$\left\| (u - \theta g^{-\frac{1}{\sigma}} e^{i\psi} G_0) \frac{g^{1+\frac{1}{\sigma}}}{\log \log(4+t)} \right\|_{\mathbf{X}} \leq C,$$

где $\psi(t) = \tilde{\eta} \log \log t + O(1)$ при $t \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в работе [83], сделаем замену переменной $u(t, x) = v(t, x)e^{-\varphi(t)+i\psi(t)}$ в уравнении (51). Тогда в силу условия (53) получаем следующее уравнение для новой функции $v(t, x)$:

$$v_t + \mathcal{L}v + e^{-\sigma\varphi} \mathcal{N}(v) - (\varphi' - i\psi')v = 0.$$

Выберем теперь вспомогательные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из следующего условия:

$$f(e^{-\sigma\varphi} \mathcal{N}(v) - (\varphi' - i\psi')v) = 0.$$

В силу предположения теоремы, $f(\mathcal{L}v) = 0$, поэтому имеем закон сохранения

$$\frac{d}{dt} f(v(t)) = f(v_t(t)) = 0.$$

Так что $f(v(t)) = f(v_0)$ для всех $t > 0$, где $v_0 = v(0, x)$. Выберем начальные значения $\varphi(0) = 0$ и $\psi(0) = \arg f(u_0)$, тогда $f(v(t)) = f(v_0) = |f(u_0)| = \theta > 0$ и

$$\varphi' = \frac{1}{\theta} e^{-\sigma\varphi} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v)), \quad \psi' = -\frac{1}{\theta} e^{-\sigma\varphi} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v)).$$

Таким образом, получаем следующую задачу для новой функции $v(t, x)$:

$$\begin{aligned} v_t + \mathcal{L}v &= -e^{-\sigma\varphi} \left(\mathcal{N}(v) - \frac{v}{\theta} f(\mathcal{N}(v)) \right), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ v(0, x) &\equiv v_0(x) \equiv u_0(x) e^{-i \arg f(u_0)}, & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (57)$$

Обозначим $h_v(t) = e^{\sigma\varphi(t)}$, тогда $\frac{d}{dt} h_v(t) = \frac{\sigma}{\theta} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v))$, $h_v(0) = 1$. Откуда, интегрируя по времени, находим

$$h_v(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v(\tau))) d\tau.$$

Перепишем задачу (57) в виде интегрального уравнения

$$v(t) = \mathcal{G}(t)v_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(v(\tau)) \frac{d\tau}{h_v(\tau)} \quad (58)$$

с нелинейностью

$$\mathcal{K}(v(\tau)) = \mathcal{N}(v(\tau)) - \frac{v(\tau)}{\theta} f(\mathcal{N}(v(\tau)))$$

и функционалом

$$h_v(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v(\tau))) d\tau.$$

Докажем существование решения $v(t, x)$ интегрального уравнения (58) с помощью принципа сжимающих отображений. Определим отображение $\mathcal{M}(w)$ формулой

$$\mathcal{M}(w) = \mathcal{G}(t)v_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)},$$

где

$$h_w(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(w(\tau))) d\tau$$

для любой функции w из множества

$$\mathbf{B} = \left\{ w \in \mathbf{X} : f(w) = \theta, \|w\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon, \right.$$

$$\left. \|\log(2+t)(w - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon, \sup_{t>0} \frac{g(t)}{h_w(t)} \leq 3 \right\}.$$

Проверим сначала, что отображение $\mathcal{M}$ преобразует множество $\mathbf{B}$ в себя. Поскольку $f(\mathcal{K}(w)) = f(\mathcal{N}(w)) - \theta^{-1} f(\mathcal{N}(w)) f(w) = 0$, видим, что $f(\mathcal{M}(w)) = f(\mathcal{G}(t)v_0) = f(v_0) = \theta$. По определению асимптотического ядра (см. (18)) имеем

$$\|\log(2+t)(\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C \|v_0\|_{\mathbf{Z}} \leq C\varepsilon.$$

Поэтому из условий теоремы получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \log(2+t) \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \right\|_{\mathbf{X}} \\ & \leq 3 \left\| \log(2+t) \int_0^t g^{-1}(\tau) |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ & \leq \frac{C}{\eta\theta^\sigma} \|w\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \left(1 + \frac{\|w\|_{\mathbf{X}}}{\theta} \right) \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

В частности, видим, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}} & \leq \|\mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} + \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \\ & \leq C\varepsilon + C \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon + C\varepsilon^{\sigma+1} \leq C\varepsilon, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \|\log(2+t)(\mathcal{M}(w) - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} & \leq \|\log(2+t)(\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \\ & + \left\| \log(2+t) \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

Остается установить оценку

$$h_{\mathcal{M}(w)}(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w))) d\tau \geq \frac{1}{3} g(t)$$

для всех $t > 0$. В силу условия (52) получаем

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w))) d\tau & = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \\ & + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w)) - \mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \end{aligned} \quad (59a)$$

$$\geq \frac{1}{2} g(t) + R(t), \quad (59b)$$

где

$$R(t) = \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w)) - \mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau.$$

Благодаря оценке (54) имеем

$$\begin{aligned} |R(t)| & \leq C \|\log(2+t)(\mathcal{M}(w) - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} (\|\mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|\theta G_0\|_{\mathbf{X}}^\sigma) \\ & \times \int_0^t \{\tau\}^{-\alpha} \langle \tau \rangle^{-1} \frac{d\tau}{\log(2+\tau)} \leq C\varepsilon^{\sigma+1} \log \log(4+t). \end{aligned}$$

Поэтому ввиду (59b) находим, что для всех $t > 0$

$$h_{\mathcal{M}(w)}(t) \geq \frac{1}{2} g(t) - C\varepsilon^{\sigma+1} \log \log(4+t) \geq \frac{1}{3} g(t).$$

Таким образом, отображение $\mathcal{M}$ преобразует $\mathbf{B}$ в себя. Теперь с помощью (55) оценим разность $\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(w)$:

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}} \\
&= \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \left(\mathcal{K}(v(\tau)) \frac{1}{h_v(\tau)} - \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{1}{h_w(\tau)} \right) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
&\leq C \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) |\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
&\quad + C \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau))| \frac{|h_v(\tau) - h_w(\tau)|}{g(\tau)} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
&\leq C \|v - w\|_{\mathbf{X}} \left(\varepsilon^\sigma + \frac{1}{\theta} \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \right) \\
&\leq C \varepsilon^\sigma \left(1 + \frac{\varepsilon}{\theta} \right) \|v - w\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{2} \|v - w\|_{\mathbf{X}},
\end{aligned}$$

где мы воспользовались следующей оценкой, вытекающей из (54) с $\nu(t) = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{|h_v(\tau) - h_w(\tau)|}{g(\tau)} &\leq \frac{C}{\theta g(\tau)} \left| \int_0^\tau f(\mathcal{N}(v(t)) - \mathcal{N}(w(t))) dt \right| \\
&\leq \frac{C \varepsilon^\sigma \log(1 + \tau)}{\theta g(\tau)} \|v - w\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{C}{\theta} \|v - w\|_{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\mathcal{M}$ является сжимающим в $\mathbf{B}$. Значит, существует единственное глобальное во времени решение $v \in \mathbf{B}$ задачи Коши (57), удовлетворяющее оценкам $\|v\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$, $\|\log(2+t)(v - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$ и $h_v(t) \geq g(t)/3$. В силу соотношения $u(t, x) = v(t, x)e^{i\psi(t)}h_v^{-1/\sigma}(t)$ получаем существование единственного глобального во времени решения задачи Коши (51), удовлетворяющего оценке убывания $\|g^{1/\sigma}u\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$. Установим асимптотику этого решения. Из условия (56) и представления (59a) имеем

$$\begin{aligned}
h_v(t) &= 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v)) d\tau \\
&= 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \\
&= g(t) + O(\log \log(4+t)).
\end{aligned} \tag{60}$$

Откуда по формулам $u(t, x) = e^{-\varphi(t)+i\psi(t)}v(t, x) = h_v^{-1/\sigma}(t)e^{i\psi(t)}v(t, x)$ находим оценку

$$\left\| \frac{g^{1+1/\sigma}}{\log \log(4+t)} (u - \theta G_0 e^{-i\psi} g^{-1/\sigma}) \right\|_{\mathbf{X}} \leq C,$$

так как

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{g^{1+1/\sigma}}{\log \log(4+t)} (\theta G_0 e^{-i\psi} (h_v^{-1/\sigma} - g^{-1/\sigma})) \right\|_{\mathbf{X}} \\
&\leq C \sup_{t>0} \left| \frac{g^{1+1/\sigma}}{\log \log(4+t)} (h_v^{-1/\sigma} - g^{-1/\sigma}) \right| \|G_0\|_{\mathbf{X}} \leq C.
\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение $\psi' = -\theta^{-1}e^{-\sigma\varphi} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v))$, имеем

$$\psi(t) = \arg f(u_0) - \frac{1}{\theta} \int_0^t h_v^{-1}(\tau) \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(\tau))) d\tau,$$

откуда, используя асимптотику для h_v и v , находим

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \arg f(u_0) - \frac{1}{\theta} \int_0^t g^{-1}(\tau) \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \\ &\quad + O\left(\int_0^t \{\tau\}^{-\alpha} \langle \tau \rangle^{-1} \frac{\log \log(4 + \tau) d\tau}{\log^2(2 + \tau)}\right) = \tilde{\eta} \log \log t + O(1) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ с некоторой постоянной $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}$. Теорема 9 доказана.

Следующий результат (см. работу [64]) получается применением теоремы 9 к уравнению Соболева со степенной нелинейностью (23). Обозначим

$$\begin{aligned} G_0(t, x) &= (4\pi\alpha t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha t)}, & \eta &= (2\pi\alpha)^{-1} (2/n + 1)^{-n/2}, \\ g(t) &= 1 + |\theta|^{2/n} \eta \log(1 + t), & \theta &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\lambda\theta < 0$, $\sigma = 2/n$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n)$, $a \in (0, 1)$, причем $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq \varepsilon$, $\lambda\theta \leq -C\varepsilon < 0$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (23). Для этого решения справедлива асимптотика

$$u(t, x) = \theta G_0(t, x) g^{-n/2}(t) + O(\langle t \rangle^{-n/2} g^{-n/2-1}(t) \log \log t)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$.

Применим также теорему 9 к уравнению Соболева (24) в случае, когда начальные данные имеют нулевое среднее значение: $\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx = 0$. Поскольку нелинейность в уравнении (24) имеет форму полной производной, то решение для всех времен также имеет нулевое среднее значение: $\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) dx = 0$. Мы покажем, что в этом случае нелинейность $(\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$ в уравнении Соболева (24) ведет себя как неконвективная, так что асимптотика решений определяется первыми моментами. Вращением в пространственной плоскости мы можем преобразовать уравнение Соболева (24) к виду, в котором $\lambda = (1, 0, \dots, 0)$, таким образом рассмотрим задачу (сохраняя прежние обозначения для новых пространственных переменных и искомой функции)

$$\begin{aligned} \partial_t(u + \Delta^2 u) - \alpha \Delta u &= \partial_{x_1}(|u|^\sigma u), & x &\in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{61}$$

где $\alpha > 0$.

Введем пространство

$$\mathbf{Z} = \left\{ \phi \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 0; \int_{\mathbb{R}^n} x_j u_0(x) dx = 0, j \neq 1 \right\}$$

и пространство

$$\mathbf{X} = \left\{ v \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n)) : \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) dx = 0; \|v\|_{\mathbf{X}} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t \geq 0} (\langle t \rangle^{-\frac{a-1}{2}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t \rangle^{\frac{n+1}{2}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{W}_\infty^1}),$$

где теперь $a \in (1, 2]$. В так выбранных пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ асимптотическое ядро оператора Грина $\mathcal{G}_2$ имеет вид

$$G_0(t, x) = \frac{x_1}{(4\pi\alpha)^{n/2}(t+1)^{1+n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha(t+1)}}$$

с функционалом $f(\phi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) x_1 dx$. Обозначим $g(t) = 1 + \theta^{\sigma+1} \eta \log(1+t)$,

$$\eta = |\lambda| (4\pi)^{-\frac{n}{2} - \frac{n}{2(n+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4}(1+\frac{1}{n+1})} |x_1|^{\frac{1}{n+1}+1} dx > 0$$

и $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) x_1 dx$. В следующей теореме покажем, что нелинейность является критической при $\sigma = (n+1)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\sigma = (n+1)^{-1}$, $n = 1, 2, 3$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in (1, 2]$, причем норма $\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u_0\|_{\mathbf{W}_\infty^1} = \varepsilon$ достаточно мала. Пусть $\int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx = 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} x_j u_0(x) dx = 0$, $j \neq 1$, $a\theta = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 u_0(x) dx \geq C\varepsilon > 0$ с некоторой постоянной $C > 0$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (61). Для этого решения справедлива асимптотика

$$u(t, x) = \theta G_0(t, x) g^{-\frac{n+1}{2}}(t) + O(t^{-\frac{n+1}{2}} (\log t)^{-\frac{n}{2}-1} \log \log t)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство

$$\mathbf{Y} = \left\{ v \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n)) : \int_{\mathbb{R}^n} v(t, x) dx = 0; \|v\|_{\mathbf{Y}} < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathbf{Y}} = \sup_{t > 0} (\langle t \rangle^{1-\frac{a-1}{2}} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \langle t \rangle^{1+\frac{n+1}{2}} \|v(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Будем говорить, что нормы пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ согласованы по отношению к оператору $\mathcal{G}_2$, если для любой функции $\phi \in \mathbf{Y}$ такой, что $f(\phi) = 0$, справедливо неравенство

$$\left\| \log(2+t) \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \phi(\tau) \frac{d\tau}{\log(2+\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{Y}}.$$

Покажем, что нормы пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ согласованы по отношению к оператору $\mathcal{G}_2$. Ввиду оценки $\langle t \rangle^{-(a-1)/4} \leq Cg^{-1}(t)$ получим

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \phi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq C \int_0^{\sqrt{t}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{a-1}{2}-1} d\tau \sup_{\tau>0} \langle \tau \rangle^{1-\frac{a-1}{2}} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \quad + Cg^{-1}(t) \int_{\sqrt{t}}^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}-\frac{a}{2}} \langle \tau \rangle^{\frac{a-1}{2}-1} d\tau \sup_{\tau>0} \langle \tau \rangle^{1-\frac{a-1}{2}} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \quad + Cg^{-1}(t) \int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{-\frac{n+1}{2}-1} d\tau \sup_{\tau>1} \tau^{1+\frac{n+1}{2}} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & \leq Ct^{-\frac{n+1}{2}} \left(t^{-\frac{a-1}{4}} + g^{-1}(t) \right) \|\phi\|_{\mathbf{Y}} \leq Cg^{-1}(t) t^{-\frac{n+1}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{G}(t-\tau) \phi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq C \int_0^{\sqrt{t}} \langle \tau \rangle^{\frac{a-1}{2}-1} d\tau \sup_{\tau>0} \langle \tau \rangle^{1-\frac{a-1}{2}} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \quad + Cg^{-1}(t) \int_{\sqrt{t}}^t \langle \tau \rangle^{\frac{a-1}{2}-1} d\tau \sup_{\tau>1} \tau^{1-\frac{a-1}{2}} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \\ & \leq C\varepsilon \left(t^{\frac{a-1}{4}} + g^{-1}(t) t^{\frac{a-1}{2}} \right) \|\phi\|_{\mathbf{Y}} \leq Cg^{-1}(t) t^{\frac{a-1}{2}} \|\phi\|_{\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Следовательно, нормы пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ согласованы по отношению к оператору $\mathcal{G}_2$, так что условие (55) имеет место. Далее, прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} & \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau = |\lambda| \theta^{\sigma+1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |G_0(\tau, x)|^{\sigma+1} dx d\tau \\ & = |\lambda| \theta^{\sigma+1} (4\pi)^{-\frac{n}{2}(1+\sigma)} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4(\tau+1)}(1+\sigma)} |x_1|^{\sigma+1} dx (\tau+1)^{-(1+\sigma)(1+\frac{n}{2})} d\tau \\ & = |\lambda| \theta^{\sigma+1} (4\pi)^{-\frac{n}{2}-\frac{n}{2(n+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4}(1+\frac{1}{n+1})} |x_1|^{\frac{1}{n+1}+1} dx \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau} \\ & = \theta^{\sigma+1} \eta \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau} = \eta \theta^{\sigma+1} \log(1+t), \end{aligned}$$

поэтому условия (54) и (56) выполнены (условие (56) выполнено в силу оценок леммы 2). Применение теоремы 9 приводит нас к результату теоремы 11.

4.2. Большие начальные данные. Рассмотрим уравнение типа Соболева со степенной нелинейностью (23). Если $\lambda < 0$, то мы можем ослабить требование малости начальных возмущений $u_0(x)$ в критическом случае $\sigma = 2/n$, однако в этом случае асимптотический результат имеет альтернативный характер. Обозначим

$$G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha t)}, \quad \eta = (4\pi)^{-1} (1 + 2/n)^{-n/2}.$$

В работе [65] доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\sigma = 2/n$, $\lambda < 0$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2 \cap \mathbf{W}_1^{2,1} \cap \mathbf{H}^{2,k}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ при $k > 6 + 3n$. Тогда задача Коши (23) имеет единственное глобальное во времени решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{W}_\infty^2 \cap \mathbf{H}^{2,k}(\mathbb{R}^n))$. Более того, это решение u может иметь только одну из следующих асимптотик при $t \rightarrow \infty$: либо равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(t, x) = \left(\frac{n}{2\eta}\right)^{\frac{n}{2}} G_0(t, x) \log^{-\frac{n}{2}} t + O(t^{-\frac{n}{2}} \log^{-\frac{n}{2}-\gamma} t), \quad \text{где } 0 < \gamma < \frac{1}{n},$$

либо $u(t) = O(t^{-n/2} \log^{-n/2-1} t)$.

5. Критическая конвективная нелинейность

5.1. Малые начальные данные. В этом разделе мы изучим асимптотику при больших временах решений уравнений типа Соболева с критической нелинейностью конвективного типа. Мы покажем, что в этом случае характер асимптотики определяется автомодельными решениями. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{N}(u) + \mathcal{L}u &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (62)$$

с критической нелинейностью $\mathcal{N}(u)$ конвективного типа (см. определение (64) ниже). Пусть $\mathbf{Z}$ – некоторое метрическое пространство функций на $\mathbb{R}^n$, также фиксируем полное метрическое пространство $\mathbf{X}$ функций на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Как и ранее, будем обозначать через $G_0 \in \mathbf{X}$ асимптотическое ядро оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$ с соответствующим непрерывным линейным функционалом f (см. определение (18) выше).

Назовем оператор

$$\mathcal{G}_0(t)\phi = t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((x-y)t^{-\frac{1}{2}})\phi(y) dy$$

автомодельным асимптотическим оператором для оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$, если выполнена оценка

$$\|\mathcal{G}_0(t)\phi\|_{\mathbf{X}} + \|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t))\phi\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{Z}}$$

для всех $\phi \in \mathbf{Z}$ с некоторым $\gamma > 0$. Будем предполагать также, что асимптотическое ядро имеет автомодельный вид $G_0(t, x) = t^{-n/2} \tilde{G}_0(xt^{-1/2})$, а линейный непрерывный функционал f имеет свойство автомодельности

$$f\left(t^{-\frac{n}{2}} \phi(xt^{-\frac{1}{2}})\right) = f(\phi) \quad (63)$$

для всех $t > 0$ и $\phi \in \mathbf{Z}$. Введем теперь банахово пространство $\mathbf{Q}$ функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, такое, что норма $\mathbf{Q}$ индуцируется нормой пространства $\mathbf{X}$, а именно, имеет место соотношение

$$\|\phi\|_{\mathbf{Q}} = \|t^{-\frac{n}{2}} \phi(xt^{-\frac{1}{2}})\|_{\mathbf{X}}.$$

Будем называть нелинейность $\mathcal{N}$ в уравнении (62) критической конвективной, если $f(\mathcal{N}(u)) = 0$ для всех $u \in \mathbf{X}$ и

$$t^{-\frac{n}{2}} \int_0^1 \mathcal{G}_0(1-z, xt^{-\frac{1}{2}}) \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} \phi(xz^{-\frac{1}{2}})) dz = \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau, x) \mathcal{N}(\tau^{-\frac{n}{2}} \phi(x\tau^{-\frac{1}{2}})) d\tau \quad (64)$$

для любой $\phi \in \mathbf{Q}$.

Сначала установим существование автомодельных решений уравнения (62).

ЛЕММА 3. Пусть оператор $\mathcal{G}_0(t)$ является автомодельным асимптотическим оператором для оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ и выполнено условие (63). Пусть нелинейность $\mathcal{N}$ в уравнении (62) является критической конвективной. Предположим также, что выполнено неравенство

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) (\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|v - w\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^\sigma \quad (65)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$. Тогда для достаточно малого θ ($|\theta| > 0$) существует единственное решение $V \in \mathbf{Q}$ интегрального уравнения

$$V = \theta \tilde{G}_0 - \int_0^1 \mathcal{G}_0(1-z) \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} V(xz^{-\frac{1}{2}})) dz \quad (66)$$

такое, что $\|V\|_{\mathbf{Q}} \leq C|\theta|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим принцип сжимающих отображений. Определим отображение

$$\mathcal{R}(V) = \theta \tilde{G}_0 - \int_0^1 \mathcal{G}_0(1-z) \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} V(xz^{-\frac{1}{2}})) dz$$

для любой $V \in \mathbf{Q}_\rho$, где $\mathbf{Q}_\rho = \{V \in \mathbf{Q} : \|V\|_{\mathbf{Q}} \leq \rho\}$ и $C|\theta| \leq \rho$, а $\rho > 0$ достаточно мало. Проверим, что $\mathcal{R}$ преобразует $\mathbf{Q}_\rho$ в себя. Обозначим $v(t, x) = t^{-n/2} V(xt^{-1/2})$. В силу свойства (64) и связи норм пространств $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{X}$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(V)\|_{\mathbf{Q}} &\leq \|\theta \tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}} + \left\| \int_0^1 \mathcal{G}_0(1-z, \xi) \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} V(\xi z^{-\frac{1}{2}})) dz \right\|_{\mathbf{Q}} \\ &\leq C|\theta| + \left\| t^{\frac{n}{2}} \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau, \xi t^{1/2}) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{Q}} \\ &= C|\theta| + \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Из (65) получаем

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} = C \|V\|_{\mathbf{Q}}^{\sigma+1} \leq C \rho^{\sigma+1}.$$

Поэтому $\|\mathcal{R}(V)\|_{\mathbf{Q}} \leq C|\theta| + C \rho^{\sigma+1} \leq C \rho$, так как $\rho > 0$ мало. Точно так же оценивается разность $\mathcal{R}(V) - \mathcal{R}(W)$: ввиду связи норм пространств $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{X}$

находим

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(V) - \mathcal{R}(W)\|_{\mathbf{Q}} &\leq \left\| \int_0^1 \mathcal{G}_0(1-z, \xi) (\mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} V(\xi z^{-\frac{1}{2}})) - \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} W(\xi z^{-\frac{1}{2}}))) dz \right\|_{\mathbf{Q}} \\ &= \left\| \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) (\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}},\end{aligned}$$

где $w(t, x) = t^{-n/2} W(xt^{-1/2})$, откуда в силу (65)

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(V) - \mathcal{R}(W)\|_{\mathbf{Q}} &\leq C \|V - W\|_{\mathbf{Q}} (\|V\|_{\mathbf{Q}}^{\sigma} + \|W\|_{\mathbf{Q}}^{\sigma}) \\ &\leq C \rho^{\sigma} \|V - W\|_{\mathbf{Q}} \leq \frac{1}{2} \|V - W\|_{\mathbf{Q}}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{R}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{Q}_{\rho}$ и, значит, существует единственное решение $V \in \mathbf{Q}_{\rho}$ интегрального уравнения (66). Лемма 3 доказана.

Теперь покажем, что автомодельное решение $V(\xi)$ дает асимптотику решений задачи Коши (62). Обозначим $\theta = f(u_0)$.

ТЕОРЕМА 13. Пусть начальные возмущения $u_0 \in \mathbf{Z}$ имеют малую норму $\|u_0\|_{\mathbf{Z}} \leq \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Предположим, что нелинейность $\mathcal{N}$ в уравнении (62) является критической конвективной. Пусть выполнены оценки

$$\begin{aligned}\left\| \langle t \rangle^{\gamma} \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ \leq C \left\| \langle t \rangle^{\gamma} (v(t) - w(t)) \right\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^{\sigma}\end{aligned}\quad (67)$$

и

$$\left\| \langle t \rangle^{\gamma} \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}_0(t-\tau)) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^{1+\sigma} \quad (68)$$

для всех $v, w \in \mathbf{X}$, где $\sigma > 0$, $\gamma > 0$, а $\mathcal{G}_0$ является автомодельным асимптотическим оператором для оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}, \mathbf{Z}$. Предположим, что существует единственное глобальное во времени решение $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (62) с малой нормой $\|u\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$. Тогда для этого решения имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\left\| \langle t \rangle^{\gamma} (u(t) - t^{-\frac{n}{2}} V(xt^{-\frac{1}{2}})) \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \quad (69)$$

при $t \rightarrow \infty$, где V является решением интегрального уравнения (66) с $\theta = f(u_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $v(t, x) = t^{-n/2} \theta V(xt^{-1/2})$, где V удовлетворяет интегральному уравнению (66) с $\theta = f(u_0)$. Тогда

$$v(t) = \theta G_0(t) - \int_0^t \mathcal{G}_0(t-\tau) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau,$$

где G_0 имеет автомодельный вид: $G_0(t, x) = t^{-n/2} \tilde{G}_0(xt^{-1/2})$. Поскольку $u(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t) = \mathcal{G}(t) u_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{N}(u(\tau)) d\tau,$$

то выполнена оценка

$$\begin{aligned} \|\langle t \rangle^\gamma (u(t) - v(t))\|_{\mathbf{X}} &\leq \|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)u_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{N}(u(\tau)) - \mathcal{N}(v(\tau))) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t (\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}_0(t-\tau)) \mathcal{N}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (70)$$

Отметим, что ввиду связи норм пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Q}$ справедливо неравенство $\|v\|_{\mathbf{X}} = |\theta| \|V\|_{\mathbf{Q}} \leq C|\theta| \leq C\varepsilon$. Тогда по определению асимптотического ядра (см. (18)) получим $I_1 \leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}} \leq C\varepsilon$. В силу условия (67) имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \|\langle t \rangle^\gamma (u(t) - v(t))\|_{\mathbf{X}} (\|u\|_{\mathbf{X}}^\sigma + \|v\|_{\mathbf{X}}^\sigma) \\ &\leq C\varepsilon^\sigma \|\langle t \rangle^\gamma (u(t) - v(t))\|_{\mathbf{X}}, \end{aligned}$$

и благодаря условию (68) найдем

$$I_3 \leq C\|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \leq C\|V\|_{\mathbf{Q}}^{\sigma+1} \leq C|\theta|^{\sigma+1} \leq C\varepsilon^{\sigma+1}.$$

Теперь (70) влечет $\|\langle t \rangle^\gamma (u(t) - v(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon + C\varepsilon^\sigma \|\langle t \rangle^\gamma (u(t) - v(t))\|_{\mathbf{X}}$, так что справедлива оценка (69), поскольку $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Теорема 13 доказана.

Применим теорему 13 к уравнению Соболева (24) с критическим показателем $\sigma = 1/n$. Определим пространство $\mathbf{Z} = \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n)$ при $a \in (0, 1)$ и введем пространство

$$\mathbf{X} = \{\phi \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_\infty^1(\mathbb{R}^n)) : \|\phi\|_{\mathbf{X}} < \infty\}$$

с нормой

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}} = \sup_{t>0} (\|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \langle t \rangle^{\frac{n}{2}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \langle t \rangle^{\frac{n+1}{2}} \|\nabla \phi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}).$$

Также зададим норму $\|\phi\|_{\mathbf{Q}} = \|\phi\|_{\mathbf{L}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\nabla \phi\|_{\mathbf{L}^\infty}$, так что имеет место соотношение $\|t^{-n/2} \phi(xt^{-1/2})\|_{\mathbf{X}} = \|\phi\|_{\mathbf{Q}}$. Заметим, что оператор

$$\mathcal{G}_0(t)\phi = \int_{\mathbb{R}^n} G_0(t, x-y)\phi(y) dy$$

с ядром $G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha t)}$ является автомодельным асимптотическим в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ для оператора $\mathcal{G}_2(t)$ при выборе функционала f в виде интеграла $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx$.

Нелинейность $\mathcal{N}(u) = (\lambda \cdot \nabla)|u|^\sigma u$ в уравнении (24) имеет форму полной производной, так что выполнено свойство конвективности $f(\mathcal{N}(u)) = 0$. Проверим, что при $\sigma = 1/n$ нелинейность является критической. Сделав замену

переменных $x = \xi t^{1/2}$, $\tau = zt$, $y = y' t^{1/2}$, найдем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau, x) \mathcal{N}(\tau^{-\frac{n}{2}} V(x\tau^{-\frac{1}{2}})) d\tau \\
 &= \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((x - y)(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}) \mathcal{N}(\tau^{-\frac{n}{2}} V(y\tau^{-\frac{1}{2}})) dy d\tau \\
 &= t^{-\frac{n}{2}} \int_0^1 dz (1 - z)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((\xi - y')(1 - z)^{-\frac{1}{2}}) \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} V(y' z^{-\frac{1}{2}})) dy' \\
 &= t^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \mathcal{G}_0(1 - z, \xi) \mathcal{N}(z^{-\frac{n}{2}} V(xz^{-\frac{1}{2}})) dz.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что условие (64) выполнено. Значит, нелинейность $\mathcal{N}$ является критической конвективной.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\sigma = 1/n$, $n = 1, 2, 3$. Предположим, что

$$u_0 \in \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_{\infty}^1(\mathbb{R}^n), \quad a \in (0, 1),$$

причем норма $\|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} + \|u_0\|_{\mathbf{W}_{\infty}^1}$ достаточно мала. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_{\infty}^1(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (24). Для этого решения справедлива асимптотика $u(t, x) = t^{-n/2} V(xt^{-1/2}) + O(t^{-n/2-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $0 < \gamma < \min(a/2, n\sigma/2 - 1)$ и $V \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ является решением интегрального уравнения

$$V(\xi) = \theta \tilde{G}_0(\xi) - \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0\left(\frac{\xi - yz^{1/2}}{\sqrt{1-z}}\right) \mathcal{N}(V(y)) dy.$$

$$\text{Здесь } \tilde{G}_0(\xi) = (4\pi\alpha)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/(4\alpha)} \text{ и } \theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала оценку

$$\left\| \langle t \rangle^{\gamma} \int_0^t \mathcal{G}_2(t - \tau) (\lambda \cdot \nabla) \phi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\sqrt{t} \langle t \rangle^{\gamma} \phi(t)\|_{\mathbf{X}}, \quad (71)$$

где $0 \leq \gamma < 1/2$. Поскольку $f(\phi) = 0$, в силу леммы 2 получаем оценки

$$\begin{aligned}
 & \left\| \int_0^t \mathcal{G}_2(t - \tau) (\lambda \cdot \nabla) \phi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \langle \tau \rangle^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau > 0} \sqrt{\tau} \langle \tau \rangle^{\gamma} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\
 & \quad + \int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{-1} \langle \tau \rangle^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau > 0} \tau \langle \tau \rangle^{\gamma} \|\nabla \phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C \langle t \rangle^{-\gamma} \|\sqrt{t} \langle t \rangle^{\gamma} \phi(t)\|_{\mathbf{X}}, \\
 & \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) (\lambda \cdot \nabla) \phi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{n+1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \langle \tau \rangle^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau > 0} \sqrt{\tau} \langle \tau \rangle^{\gamma} \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\
 & \quad + \int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{-1-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau > 0} \tau^{1+\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{\gamma} \|\nabla \phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^{\infty}} \leq C t^{-\frac{n}{2}} \langle t \rangle^{-\gamma} \|\sqrt{t} \langle t \rangle^{\gamma} \phi(t)\|_{\mathbf{X}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(\lambda \cdot \nabla) \phi(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{n+2}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \langle \tau \rangle^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau>0} \sqrt{\tau} \langle \tau \rangle^\gamma \|\phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\
& \quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-1-\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^{-\gamma} d\tau \sup_{\tau>0} \tau^{1+\frac{n}{2}} \langle \tau \rangle^\gamma \|\nabla \phi(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\
& \leq C t^{-\frac{n+1}{2}} \langle t \rangle^{-\gamma} \|\sqrt{t} \langle t \rangle^\gamma \phi(t)\|_{\mathbf{X}}
\end{aligned}$$

для всех $t > 0$, откуда следует (71).

По определению нормы пространства $\mathbf{X}$ получим при $\sigma = 1/n$

$$\|\sqrt{t} \langle t \rangle^\gamma (|v|^\sigma v(t) - |w|^\sigma w(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^\sigma.$$

Поэтому, взяв в оценке (71) $\phi = |v|^\sigma v - |w|^\sigma w$, получим неравенства (67) и (68). Существование глобального решения $u \in \mathbf{X}$ устанавливается так же, как и выше в доказательстве теоремы 4. Таким образом, все условия теоремы 13 выполнены. Применяя теорему 13, приходим к результату теоремы 14.

5.2. Большие начальные данные. Рассмотрим уравнение (24) в случае не малых начальных данных. Рассмотрим для простоты случай $\sigma = 1$, $n = 1$. Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 15. Пусть $\sigma = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n = 1$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R})$, $a \geq 0$, и $\theta = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx \neq 0$. Тогда существует единственное решение $u \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{H}^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{W}_1^2(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}))$ задачи Коши (24). Для этого решения справедлива асимптотика $u(t) = t^{-1/2} f_\theta(x t^{-1/2}) + o(t^{-1/2})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Если дополнительно $u_0 \in \mathbf{L}^{1,1}(\mathbb{R})$, то имеет место асимптотика

$$u(t) = t^{-1/2} f_\theta(x t^{-1/2}) + O(t^{-1/2-\gamma})$$

при $t \rightarrow \infty$, где $\gamma \in (0, 1/2)$ и функция

$$f_\theta(\chi) = -2\sqrt{\mu} \frac{\partial}{\partial \chi} \log \left(\cosh \frac{\theta}{4} - \sinh \left(\frac{\theta}{4} \right) \operatorname{Erf} \left(\frac{\chi}{2\sqrt{\mu}} \right) \right)$$

является автомодельным решением уравнения Бюргерса $u_t + u u_x - \mu u_{xx} = 0$, определяемым общей массой $\theta = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$ начальных данных, здесь $\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ — интеграл ошибок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем достаточно большое время $T > 0$ и определим $v(t, x)$ как решение уравнения Бюргерса с начальным возмущением $u(T, x)$

$$\begin{aligned}
v_t + v v_x - \alpha v_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > T, \\
v(T, x) &= u(T, x), & x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

С помощью замены Хопфа–Коула $v(t, x) = -2\alpha \frac{\partial}{\partial x} \log Z(t, x)$ преобразуем это уравнение к уравнению теплопроводности $Z_t = \alpha Z_{xx}$, которое допускает решение в явном виде:

$$Z(t, x) = \int_{\mathbb{R}} dy G_0(t, x - y) \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^y u(T, \xi) d\xi \right\},$$

где $G_0(t, x) = (4\pi\alpha t)^{-1/2} e^{-x^2/(4\alpha t)}$. Имеет место оценка

$$\|v(t)\|_{\mathbf{L}^p} + \langle t \rangle \|\partial_x^2 \mathcal{B}_2 v(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$$

для всех $t > T$, $1 \leq p \leq \infty$. Для разности $w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$ получим задачу

$$\begin{aligned} w_t + \partial_x(vw) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} w^2 - \alpha w_{xx} + h_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > T, \\ w(T, x) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $h = (\beta \partial_x^2 + \alpha \partial_x^3) \mathcal{B}_2 u - \partial_x \mathcal{B}_2(uu_x)$. В случае не малых начальных возмущений необходимо устранить слагаемое $\frac{\partial}{\partial x}(vw)$. Для этого сделаем замену $\partial_x^{-1} w = \int_{-\infty}^x w(t, y) dy = \alpha g/Z$, тогда

$$\begin{aligned} g_t - \alpha g_{xx} + F &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > T, \\ g(T, x) &= 0, & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где

$$F = \frac{\mu}{2Z} \left(g_x + \frac{1}{2\alpha} g v \right)^2 + Zh.$$

Имеем $\|Z(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|Z^{-1}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C$ при всех $t \geq T$, а также грубую оценку убывания

$$\|w(t)\|_{\mathbf{L}^p} + \langle t \rangle \|\partial_x^2 \mathcal{B}_2 w(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-(1-1/p)/2}$$

при всех $t \geq T$, $1 \leq p \leq \infty$. Докажем неравенство

$$\|g(t)\|_{\mathbf{L}^p} + \langle t \rangle^{1/2} \|g_x(t)\|_{\mathbf{L}^p} < C \langle t \rangle^{-\gamma + \frac{1}{2p}} \quad (72)$$

при всех $t \geq T$, $2 \leq p \leq \infty$ с некоторым $\gamma \in (0, 1/2)$. От противного, пусть в некоторый момент времени $t = T_1$ оценка (72) нарушается, так что по непрерывности имеем

$$\|g(t)\|_{\mathbf{L}^p} + \langle t \rangle^{1/2} \|g_x(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq C \langle t \rangle^{-\gamma + \frac{1}{2p}} \quad (73)$$

для всех $t \in [T, T_1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Ввиду (73) найдем

$$\begin{aligned} \|F(t)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq C \|g_x\|_{\mathbf{L}^\infty} \|g_x\|_{\mathbf{L}^p} + C \|g\|_{\mathbf{L}^\infty}^2 \|v^2\|_{\mathbf{L}^p} + C \|Zh\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C (\langle t \rangle^{-1-2\gamma+\frac{1}{2p}} + \langle t \rangle^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}}) \leq C \max(T^{\gamma-\frac{1}{2}}, T^{-\gamma}) \langle t \rangle^{-\gamma-1+\frac{1}{2p}} \end{aligned}$$

для всех $t \in [T, T_1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда из соответствующего интегрального уравнения получаем

$$\begin{aligned} \|g(t)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq \int_T^t d\tau \|G_0(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \|F(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq C \max(T^{\gamma-\frac{1}{2}}, T^{-\gamma}) \int_T^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{2}-\gamma} d\tau \\ &\leq C \max(T^{\gamma-\frac{1}{2}}, T^{-\gamma}) \langle t \rangle^{-\gamma+\frac{1}{2p}} < C \langle t \rangle^{-\gamma+\frac{1}{2p}} \end{aligned}$$

для всех $t \in [T, T_1]$, $1 \leq p \leq \infty$, поскольку T достаточно велико. Аналогично,

$$\begin{aligned} \|g_x(t)\|_{\mathbf{L}^p} &\leq \int_T^{\frac{t+T}{2}} d\tau \|\partial_x G_0(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \|F(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\quad + \int_{\frac{t+T}{2}}^t d\tau \|\partial_x G_0(t-\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \|F(\tau)\|_{\mathbf{L}^p} \\ &\leq C \max(T^{\gamma-\frac{1}{2}}, T^{-\gamma}) \int_T^{\frac{t+T}{2}} (t-\tau)^{-1+\frac{1}{2p}} \langle \tau \rangle^{-\frac{1}{2}-\gamma} d\tau \\ &\quad + C \max(T^{\gamma-\frac{1}{2}}, T^{-\gamma}) \int_{\frac{t+T}{2}}^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \langle \tau \rangle^{-1-\gamma+\frac{1}{2p}} d\tau \\ &\leq C \max(T^{\gamma-\frac{1}{2}}, T^{-\gamma}) \langle t \rangle^{-\gamma-\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}} < C \langle t \rangle^{-\gamma-\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}} \end{aligned}$$

для всех $t \in [T, T_1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Полученное противоречие доказывает (72) для всех $t \geq T$. Так как $w = Z^{-1}(\mu g_x + gv/2)$, то оценка (72) дает $\|u(t) - v(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\gamma-1/2}$ для всех $t > T$. Если дополнительно известно, что $xu_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, то имеем $\|v(t) - t^{-1/2} f_\theta(xt^{-1/2})\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\gamma-1/2}$. Откуда приходим к асимптотике теоремы. Теорема 15 доказана.

6. Субкритическая неконвективная нелинейность

6.1. Малые начальные данные. В этом разделе мы изучим асимптотику при больших временах решений уравнений типа Соболева с субкритической нелинейностью неконвективного типа. Мы покажем, что нелинейность существенно влияет на асимптотику решения и характер асимптотики определяется автомодельными решениями. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{N}(u) + \mathcal{L}u &= 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{74}$$

с субкритической нелинейностью $\mathcal{N}(u)$ неконвективного типа (см. (75)). Пусть $\mathbf{Z}$ – некоторое метрическое пространство функций на $\mathbb{R}^n$, также фиксируем полное метрическое пространство $\mathbf{X}$ функций на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Как и выше, будем обозначать через $G_0 \in \mathbf{X}$ асимптотическое ядро оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$ с соответствующим непрерывным линейным функционалом f (см. определение (18) выше). Будем называть нелинейность $\mathcal{N}$ субкритической неконвективной, если выполнена оценка

$$\frac{\sigma}{\theta} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(t))) \geq \frac{\eta}{2} \theta^\sigma t^{\mu-1} \tag{75}$$

для всех $t > 0$, $\theta > 0$ с некоторыми положительными постоянными η , σ и $\mu \in (0, 1)$. Смысл субкритичности заключается в достаточно медленном убывании по времени.

Докажем сначала существование глобальных решений задачи Коши (74).

ТЕОРЕМА 16. *Предположим, что линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию $f(\mathcal{L}u) = 0$ для любой $u \in \mathbf{X}$. Пусть нелинейность $\mathcal{N}(u)$ в уравнении (74) является субкритической неконвективной. Предположим, что*

$$e^z \mathcal{N}(ue^{-z}) = e^{-\sigma \operatorname{Re} z} \mathcal{N}(u) \quad (76)$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathbf{X}$ с некоторым $\sigma > 0$. Пусть для всех $t > 0$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \nu(t) |f(\mathcal{N}(v(t)) - \mathcal{N}(w(t)))| \\ \leq C \{t\}^{-\alpha} \langle t \rangle^{\mu-1} \|\nu(t)(v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma} + \|w\|_{\mathbf{X}}^{\sigma}) \end{aligned} \quad (77)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$, где $\nu(t) > 0$, $\alpha < 1$, $\sigma > 0$, $\mu \in (0, 1)$, а также оценка

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t |\mathcal{G}(t-\tau)(\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| \tau^{-\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ \leq C \|v - w\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^{\sigma} \left(1 + \frac{1}{\theta} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}}) \right) \end{aligned} \quad (78)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$, удовлетворяющих условию $f(v) = f(w) = \theta > 0$, где $\sigma > 0$, $\mathcal{K}(v) = \mathcal{N}(v) - (v/\theta)f(\mathcal{N}(v))$. Пусть начальные возмущения $u_0 \in \mathbf{Z}$ малы: $\|u_0\|_{\mathbf{Z}} \leq \varepsilon$, а $\theta \equiv |f(u_0)| \geq C\varepsilon > 0$ с некоторым $C > 0$. Также пусть $\mu \in (0, 1)$ в (75) и (77) достаточно мало. Тогда существует единственное глобальное во времени решение $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (74). Для этого решения справедлива оценка $\|t^{\mu/\sigma} u(t)\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 9, сделаем замену $u(t, x) = v(t, x)e^{-\varphi(t)+i\psi(t)}$ в уравнении (74), тогда получим интегральное уравнение

$$v(t) = \mathcal{G}(t)v_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(v(\tau)) \frac{d\tau}{h_v(\tau)} \quad (79)$$

с новой нелинейностью

$$\mathcal{K}(v(\tau)) = \mathcal{N}(v(\tau)) - \frac{v(\tau)}{\theta} f(\mathcal{N}(v(\tau)))$$

и функционалом

$$h_v(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(v(\tau))) d\tau.$$

Заметим, что функция $\psi(t)$ является решением задачи Коши

$$\psi'(t) = -\frac{1}{\theta h_v(t)} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(t))), \quad \psi(0) = \arg f(u_0). \quad (80)$$

Для того чтобы применить принцип сжимающих отображений, зададим преобразование

$$\mathcal{M}(w) = \mathcal{G}(t)v_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)}$$

для любой функции w из множества

$$\mathbf{B} = \left\{ w \in \mathbf{X} : f(w) = \theta, \|w\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon, \right. \\ \left. \|w - \mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} \leq C\mu\varepsilon, \sup_{t>0} t^{-\mu} h_w(t) \geq \frac{\eta}{3\mu} \theta^\sigma \right\},$$

где

$$h_w(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(w(\tau))) d\tau.$$

Проверим сначала, что $\mathcal{M}$ отображает $\mathbf{B}$ в себя. Поскольку $f(w) = \theta$, имеем $f(\mathcal{K}(w)) = f(\mathcal{N}(w)) - \theta^{-1} f(\mathcal{N}(w))f(w) = 0$; откуда ввиду определения $\mathcal{M}(w)$ получим равенства

$$f(\mathcal{M}(w)) = f(\mathcal{G}(t)v_0) = f(v_0) = \theta.$$

По определению асимптотического ядра $\|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\|v_0\|_{\mathbf{Z}} \leq C\varepsilon$, и поскольку $w \in \mathbf{B}$, то по условию (78)

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{3\mu}{\eta} \theta^{-\sigma} \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} |\mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{K}(w(\tau))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ \leq \frac{C\mu}{\theta^\sigma} \|w\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \left(1 + \frac{\|w\|_{\mathbf{X}}}{\theta} \right) \leq C\mu\varepsilon.$$

Поэтому

$$\|\mathcal{M}(w) - \mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} \leq \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{h_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \leq C\mu\varepsilon$$

и

$$\|\mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} + \|\mathcal{M}(w) - \mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon + C\mu\varepsilon \leq C\varepsilon.$$

Остается проверить оценку

$$h_{\mathcal{M}(w)}(t) = 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w))) d\tau \geq \frac{\eta}{3\mu} \theta^\sigma t^\mu$$

для всех $t > 0$. В силу условия (75) имеем

$$\frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w))) d\tau = \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \\ + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w)) - \mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau \geq \frac{\eta}{2\mu} \theta^\sigma t^\mu + R(t), \quad (81)$$

где $R(t) = \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\mathcal{M}(w)) - \mathcal{N}(\theta G_0(\tau))) d\tau$. Из оценки (77) получаем

$$\begin{aligned} |R(t)| &\leq \frac{C}{\theta} \|\mathcal{M}(w) - \mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} (\|\mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}}^{\sigma} + \|\mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}}^{\sigma}) \int_0^t \{\tau\}^{-\alpha} \langle \tau \rangle^{\mu-1} d\tau \\ &\quad + \frac{C}{\theta} \|\langle t \rangle^{\gamma} (\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} (\|\mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}}^{\sigma} + \|\theta G_0\|_{\mathbf{X}}^{\sigma}) \\ &\quad \times \int_0^t \{\tau\}^{-\alpha} \langle \tau \rangle^{\mu-\gamma-1} d\tau \leq C\varepsilon^{\sigma} \langle \tau \rangle^{\mu}. \end{aligned}$$

В итоге в силу (81) находим

$$h_{\mathcal{M}(w)}(t) \geq 1 + \frac{\eta}{2\mu} \theta^{\sigma} t^{\mu} - C\varepsilon^{\sigma} \langle \tau \rangle^{\mu} \geq \frac{\eta}{3\mu} \theta^{\sigma} t^{\mu}$$

для всех $t > 0$, поскольку $\mu \in (0, 1)$ мало. Итак, мы видим, что $\mathcal{M}$ отображает $\mathbf{B}$ в себя.

Теперь оценим разность $\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(w)$:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}} &= \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau) \left(\mathcal{K}(v(\tau)) \frac{1}{h_v(\tau)} - \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{1}{h_w(\tau)} \right) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \frac{C\mu}{\theta^{\sigma}} \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} |\mathcal{G}(t-\tau) (\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\quad + \frac{C\mu^2}{\theta^{2\sigma}} \left\| \int_0^t \tau^{-2\mu} |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau))| |h_v(\tau) - h_w(\tau)| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

откуда, пользуясь оценкой

$$\begin{aligned} |h_v(t) - h_w(t)| &\leq \frac{C}{\theta} \left| \int_0^t f(\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \frac{C}{\theta} \|v - w\|_{\mathbf{X}} \int_0^t \{\tau\}^{-\alpha} \langle \tau \rangle^{\mu-1} d\tau \leq \frac{C\varepsilon^{\sigma} t^{\mu}}{\mu\theta} \|v - w\|_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

(справедливой ввиду (77)), а также оценкой (78), получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(v) - \mathcal{M}(w)\|_{\mathbf{X}} &\leq C \frac{\mu}{\theta^{\sigma}} \|v - w\|_{\mathbf{X}} \left(\varepsilon^{\sigma} + \theta^{-1} \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(w(\tau))| d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \right) \\ &\leq C\mu \|v - w\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{1}{2} \|v - w\|_{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

для любых $v, w \in \mathbf{B}$. Таким образом, $\mathcal{M}$ является сжимающим отображением в $\mathbf{B}$.

Поэтому существует единственное решение $v \in \mathbf{B}$ задачи Коши (74), удовлетворяющее оценкам

$$\|v\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon, \quad \|v - \mathcal{G}(t)v_0\|_{\mathbf{X}} \leq C\mu\varepsilon, \quad h_v(t) \geq \frac{\eta}{3\mu} \theta^{\sigma} t^{\mu}.$$

В силу равенства $u(t, x) = v(t, x)e^{i\psi(t)}h_v^{-1/\sigma}(t)$ приходим к существованию решения интегрального уравнения (79), удовлетворяющего оценке $\|t^{\mu/\sigma}u\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon$. Теорема 16 доказана.

Теперь найдем асимптотику при больших временах для решений задачи Коши (74) с субкритической нелинейностью $\mathcal{N}(u)$ неконвективного типа. Назовем оператор

$$\mathcal{G}_0(t)\phi = t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((x-y)t^{-\frac{1}{2}})\phi(y) dy$$

автомодельным асимптотическим оператором, отвечающим оператору Грина $\mathcal{G}(t)$ в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$, если при некотором $\gamma > 0$ выполнена оценка

$$\|\mathcal{G}_0(t)\phi\|_{\mathbf{X}} + \|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_0(t))\phi\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{Z}}$$

для любых $\phi \in \mathbf{Z}$. Также предположим, что асимптотическое ядро $G_0(t, x)$ имеет автомодельный вид $G_0(t, x) = t^{-n/2} \tilde{G}_0(xt^{-1/2})$ и

$$f(\phi(xt^{-\frac{1}{2}})) = t^{\frac{n}{2}} f(\phi x) \quad (82)$$

для всех $t > 0$, $\phi \in \mathbf{Z}$.

Фиксируем нормированное пространство $\mathbf{Q}$ функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, и нормированное пространство $\tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{X}$ функций, заданных на $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, так что норма в $\mathbf{Q}$ индуцирована нормой в $\tilde{\mathbf{X}}$, т. е. $\|\phi\|_{\mathbf{Q}} = \|t^{-\alpha} \phi(xt^{-1/\delta})\|_{\tilde{\mathbf{X}}}$ и $\|\phi\|_{\mathbf{X}} \leq C\|\phi\|_{\tilde{\mathbf{X}}}$.

В следующей теореме устанавливается существование автомодельных решений для уравнения (74).

ТЕОРЕМА 17. Пусть выполнены условия (76), (77) и (82), и пусть $\mu \in (0, 1)$ в оценках (75) и (77) достаточно мало. Также предположим, что имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t |\mathcal{G}_0(t-\tau)(\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| \tau^{-\mu} d\tau \right\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \\ & \leq C\|v-w\|_{\tilde{\mathbf{X}}} (\|v\|_{\tilde{\mathbf{X}}} + \|w\|_{\tilde{\mathbf{X}}})^\sigma \left(1 + \frac{\|v\|_{\tilde{\mathbf{X}}} + \|w\|_{\tilde{\mathbf{X}}}}{\theta} \right) \end{aligned} \quad (83)$$

для любых $v, w \in \tilde{\mathbf{X}}$, удовлетворяющих условию $f(v) = f(w) = 1$, где $\sigma > 0$ и $\mathcal{K}(v) = \mathcal{N}(v) - (v/f(v))f(\mathcal{N}(v))$. Тогда существует единственное решение $V \in \mathbf{Q}$ интегрального уравнения

$$V = \tilde{G}_0 - \frac{\mu}{\sigma \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V))} \int_0^1 z^{-\mu} \mathcal{G}_0(1-z) \mathcal{K}(z^{-\alpha} V(xz^{-\frac{1}{\delta}})) dz. \quad (84)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим преобразование

$$\mathcal{R}(V) = \tilde{G}_0 - \frac{\mu}{\sigma f(\mathcal{N}(V))} \int_0^1 z^{-\mu} \mathcal{G}_0(1-z) \mathcal{K}(z^{-\alpha} V(xz^{-\frac{1}{\delta}})) dz,$$

для любой функции $V \in \mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \left\{ V \in \mathbf{Q} : f(V) = 1, \|V\|_{\mathbf{Q}} \leq C, \|V - \tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}} \leq C\mu, \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V)) \geq \frac{\eta}{3\sigma} \right\}.$$

Поскольку $f(V) = 1$ по определению нелинейности $\mathcal{K}(V)$, то $f(\mathcal{K}(V)) = 0$. Откуда следует, что $f(\mathcal{R}(V)) = f(\tilde{G}_0) + f(\mathcal{K}(V)) = 1$.

Заметим, что из условий (76) и (82) вытекает

$$f(\mathcal{N}(V)) = f(t^{-\alpha} \mathcal{N}(V(xt^{-\frac{1}{\delta}}))) = t^{\alpha\sigma} f(\mathcal{N}(t^{-\alpha} V(xt^{-\frac{1}{\delta}}))),$$

а из (75) с $\mu = 1 - \alpha\sigma$ следует, что $\operatorname{Re} f(\mathcal{N}(\tilde{G}_0)) \geq \eta/(2\sigma) > 0$. Используя свойство автомодельности, обозначая $\xi = xt^{-1/\delta}$ и делая замену переменных интегрирования $\tau = zt$, $y = y't^{1/\delta}$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tau^{-\mu} \mathcal{G}_0(t - \tau, x) \mathcal{K}(\tau^{-\alpha} V(x\tau^{-\frac{1}{\delta}})) d\tau \\ &= \int_0^t \tau^{-\mu} (t - \tau)^{-\frac{\eta}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((x - y)(t - \tau)^{-\frac{1}{\delta}}) \mathcal{K}(\tau^{-\alpha} V(y\tau^{-\frac{1}{\delta}})) dy d\tau \\ &= t^{1-\mu-\sigma\alpha-\alpha} \int_0^1 \frac{dz}{z^\mu} (1 - z)^{-\frac{\eta}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0((\xi - y')(1 - z)^{-\frac{1}{\delta}}) \mathcal{K}(z^{-\alpha} V(y'z^{-\frac{1}{\delta}})) dy' \\ &= t^{-\alpha} \int_0^1 z^{-\mu} \mathcal{G}_0(1 - z, xt^{-\frac{1}{\delta}}) \mathcal{K}(z^{-\alpha} V(xz^{-\frac{1}{\delta}})) dz, \end{aligned}$$

поскольку $\mu = 1 - \alpha\sigma$. Учитывая оценку (83) и следующее соотношение между нормами: $\|t^{-\alpha} \phi(xt^{-1/\delta})\|_{\tilde{\mathbf{X}}} = \|\phi(\xi)\|_{\mathbf{Q}}$, найдем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(V) - \tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}} &= \frac{\mu}{\sigma|f(\mathcal{N}(V))|} \left\| \int_0^1 z^{-\mu} \mathcal{G}_0(1 - z) \mathcal{K}(z^{-\alpha} V(xz^{-\frac{1}{\delta}})) dz \right\|_{\mathbf{Q}} \\ &= C\mu \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} \mathcal{G}_0(t - \tau) \mathcal{K}(\tau^{-\alpha} V(x\tau^{-\frac{1}{\delta}})) d\tau \right\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \\ &\leq C\mu \|t^{-\alpha} V(xt^{-\frac{1}{\delta}})\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^{\sigma+1} = C\mu \|V\|_{\mathbf{Q}}^{\sigma+1} \leq C\mu \end{aligned}$$

и, в частности, имеем $\|\mathcal{R}(V)\|_{\mathbf{Q}} \leq \|\tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}} + \|\mathcal{R}(V) - \tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}} \leq C + C\mu \leq C$. Применяя условия (75), (77) и (82), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V)) &= t^{1-\mu} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(t^{-\alpha} \tilde{G}_0(xt^{-\frac{1}{\delta}}))) \\ &\quad + t^{1-\mu} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(t^{-\alpha} V(xt^{-\frac{1}{\delta}})) - \mathcal{N}(t^{-\alpha} \tilde{G}_0(xt^{-\frac{1}{\delta}}))) \\ &\geq \frac{\eta}{2\sigma} - \|V - \tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}} (\|V\|_{\mathbf{Q}}^\sigma + \|\tilde{G}_0\|_{\mathbf{Q}}^\sigma) \geq \frac{\eta}{2\sigma} - C\mu \geq \frac{\eta}{3\sigma}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{R}(V) \in \mathbf{A}$.

Теперь, обозначив $v(t, x) = t^{-\alpha} V(xt^{-1/\delta})$ и $w(t, x) = t^{-\alpha} W(xt^{-1/\delta})$, оценим разность $\mathcal{R}(V) - \mathcal{R}(W)$:

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{R}(V) - \mathcal{R}(W)\|_{\mathbf{Q}} \\ &= \frac{\mu}{\sigma} \left\| \int_0^1 \mathcal{G}_0(1 - z) \left(\frac{\mathcal{K}(z^{-\alpha} V(xz^{-\frac{1}{\delta}}))}{\operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V))} - \frac{\mathcal{K}(z^{-\alpha} W(xz^{-\frac{1}{\delta}}))}{\operatorname{Re} f(\mathcal{N}(W))} \right) \frac{dz}{z^\mu} \right\|_{\mathbf{Q}} \\ &= \frac{\mu}{\sigma} \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} |\mathcal{G}_0(t - \tau) (\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| d\tau \right\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \\ &\quad + \frac{\mu}{\sigma} \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} |\mathcal{G}_0(t - \tau) \mathcal{K}(w(\tau))| |f(\mathcal{N}(v)) - f(\mathcal{N}(w))| d\tau \right\|_{\tilde{\mathbf{X}}}, \end{aligned}$$

откуда ввиду (77), (82) и (86), используя оценку $|f(\mathcal{N}(V)) - f(\mathcal{N}(W))| \leq C\|v - w\|_{\mathbf{Q}}$, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(V) - \mathcal{R}(W)\|_{\mathbf{Q}} &\leq C\mu\|v - w\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \left(1 + \left\| \int_0^t \tau^{-\mu} |\mathcal{G}_0(t - \tau) \mathcal{K}(w(\tau))| d\tau \right\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \right) \\ &\leq C\mu\|V - W\|_{\mathbf{Q}} \leq \frac{1}{2} \|V - W\|_{\mathbf{Q}}. \end{aligned}$$

Итак, отображение $\mathcal{R}(V)$ является сжимающим в $\mathbf{A}$. Следовательно, существует единственное решение $V \in \mathbf{A}$ интегрального уравнения (84). Теорема 17 доказана.

В следующей теореме мы найдем асимптотику при больших временах решений задачи Коши (74) с субкритической неконвективной нелинейностью.

ТЕОРЕМА 18. Пусть линейный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию $f(\mathcal{L}u) = 0$ для любой $u \in \mathbf{X}$. Пусть нелинейность $\mathcal{N}(u)$ в уравнении (74) является субкритической неконвективной и удовлетворяет (75) с достаточно малым $\mu \in (0, 1)$. Предположим, что выполнены условия (76) и (77). Также предположим, что имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t |\mathcal{G}(t - \tau)(\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| \tau^{-\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^\sigma \left(1 + \frac{\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}}}{\theta}\right), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t |\mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{K}(v(\tau))| \tau^{-\mu - \gamma} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1}, \quad (86)$$

$$\left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}_0(t - \tau)) \mathcal{K}(v(\tau)) \tau^{-\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \quad (87)$$

для любых $v, w \in \mathbf{X}$, удовлетворяющих условию $f(v) = f(w) = \theta > 0$, где $\sigma > 0$, $\mathcal{K}(v) = \mathcal{N}(v) - (v/\theta)f(\mathcal{N}(v))$, а $\mathcal{G}_0$ – асимптотический автомодельный оператор для оператора Грина $\mathcal{G}$ в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Z}$. Пусть начальные возмущения $u_0 \in \mathbf{Z}$ достаточно малы: $\|u_0\|_{\mathbf{Z}} \leq \varepsilon$, и имеют среднее значение $\theta \equiv |f(u_0)| \geq C\varepsilon > 0$ для некоторого $C > 0$. Тогда существуют числа A, ω и функция $V \in \mathbf{Q}$ (которая является единственным решением интегрального уравнения (84)) такие, что для решения $u \in \mathbf{X}$ задачи Коши (74) справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\left\| \langle t \rangle^{\gamma + \frac{\mu}{\sigma}} (u - At^{-1/\sigma} e^{i\omega \log t} V(xt^{-1/\delta})) \right\|_{\mathbf{X}} \leq C \quad (88)$$

с некоторым $\gamma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим оценку

$$\|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C \quad (89)$$

с некоторым $\gamma \in (0, \mu)$, где функция v удовлетворяет интегральному уравнению (79), а функция w имеет вид $w(t) = t^{-\alpha\theta} V(xt^{-1/\delta})$, где V является

единственным решением интегрального уравнения (84), так что

$$w(t) = \theta G_0(t) - \int_0^t \mathcal{G}_0(t - \tau) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{\tilde{h}_w(\tau)}, \quad (90)$$

где $G_0(t) = t^{-\alpha} \tilde{G}_0(xt^{-1/\delta})$ и $\tilde{h}_w(t) = \sigma(\mu\theta)^{-1} t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(w(t)))$. Заметим, что ввиду связи норм справедливо неравенство $\|w\|_{\mathbf{X}} \leq C\|w\|_{\tilde{\mathbf{X}}} = C\theta\|V\|_{\mathbf{Q}} \leq C\theta$. Откуда в силу (78) и (90) получаем

$$\begin{aligned} \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} &\leq \|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t \left(\mathcal{G}_0(t - \tau) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{1}{\tilde{h}_w(\tau)} - \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{K}(v(\tau)) \frac{1}{h_v(\tau)} \right) d\tau \right\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned} \quad (91)$$

Воспользовавшись определением асимптотического ядра, оценим первое слагаемое в правой части (91): $\|\langle t \rangle^\gamma (\mathcal{G}(t)v_0 - \theta G_0(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\|v_0\|_{\mathbf{Z}} \leq C\varepsilon$. Затем перепишем (91) в виде

$$\begin{aligned} \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} &\leq C\varepsilon + \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}_0(t - \tau)) \mathcal{K}(w(\tau)) \frac{d\tau}{\tilde{h}_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t \mathcal{G}(t - \tau) (\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau))) \frac{d\tau}{\tilde{h}_w(\tau)} \right\|_{\mathbf{X}} \\ &+ \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t \left(\frac{1}{h_v(\tau)} - \frac{1}{\tilde{h}_w(\tau)} \right) \mathcal{G}(t - \tau) \mathcal{K}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \equiv C\varepsilon + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (92)$$

Ввиду (87) получим

$$I_1 \leq \frac{C\mu}{\theta^\sigma} \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t (\mathcal{G}(t - \tau) - \mathcal{G}_0(t - \tau)) \mathcal{K}(v(\tau)) \tau^{-\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \leq \frac{C\mu}{\theta^\sigma} \|v\|_{\mathbf{X}}^{\sigma+1} \leq C\mu\varepsilon.$$

Величину I_2 в (92) оценим с помощью (85):

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{C\mu}{\theta^\sigma} \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t |\mathcal{G}(t - \tau) (\mathcal{K}(v(\tau)) - \mathcal{K}(w(\tau)))| \tau^{-\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq \frac{C\mu}{\theta^\sigma} \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} (\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}})^\sigma \left(1 + \frac{\|v\|_{\mathbf{X}} + \|w\|_{\mathbf{X}}}{\theta} \right) \\ &\leq C\mu \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Теперь оценим разность $h_v(t) - \tilde{h}_w(t)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \tilde{h}_w(t) &= \frac{\sigma}{\mu\theta} t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(w(t))) = \frac{\sigma}{\mu\theta} t^\mu \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V)) \\ &= \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t t^{\mu-1} \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V)) d\tau = \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(w(\tau))) d\tau, \end{aligned}$$

то в силу условия (77) найдем

$$\begin{aligned}
 |h_v(t) - \tilde{h}_w(t)| &\leq 1 + \frac{\sigma}{\theta} \int_0^t |f(\mathcal{N}(v(\tau)) - \mathcal{N}(w(\tau)))| d\tau \\
 &\leq 1 + \frac{C}{\theta} \varepsilon^\sigma \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} \int_0^t \{\tau\}^{-\alpha} \langle \tau \rangle^{\mu-\gamma-1} d\tau \\
 &\leq 1 + \frac{C}{\theta(\mu-\gamma)} \varepsilon^\sigma t^{\mu-\gamma} \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}}, \tag{93}
 \end{aligned}$$

так как $\gamma < \mu$. Таким образом, благодаря (86) получим

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t \left(\frac{1}{h_v(\tau)} - \frac{1}{\tilde{h}_w(\tau)} \right) \mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(v(\tau)) d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
 &\leq C \mu^2 \theta^{-2\sigma} \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t |h_v(\tau) - \tilde{h}_w(\tau)| |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(v(\tau))| \tau^{-2\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
 &\leq C \mu^2 \theta^{-2\sigma} \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(v(\tau))| \tau^{-2\mu} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
 &\quad + \frac{C\mu}{\theta^{1+\sigma}} \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} \left\| \langle t \rangle^\gamma \int_0^t |\mathcal{G}(t-\tau) \mathcal{K}(v(\tau))| \tau^{-\mu-\gamma} d\tau \right\|_{\mathbf{X}} \\
 &\leq C \mu^2 \theta^{1-\sigma} + C \mu \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}}.
 \end{aligned}$$

Подставляя оценки для I_1 , I_2 , I_3 в (92), находим

$$\|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}} \leq C\varepsilon + C\mu^2 \theta^{1-\sigma} + C\mu \|\langle t \rangle^\gamma (v(t) - w(t))\|_{\mathbf{X}}.$$

Следовательно, используя тот факт, что μ достаточно мало, приходим к оценке (89). В силу (80) имеем

$$\psi(t) = \arg f(u_0) - \frac{1}{\theta} \int_0^t \frac{1}{h_v(\tau)} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(\tau))) d\tau. \tag{94}$$

Благодаря оценке (93) получаем

$$|h_v(t) - \beta \theta^\sigma \langle t \rangle^\mu| \leq C \langle t \rangle^{\mu-\gamma} \quad \text{для любых } t > 0, \tag{95}$$

где $\beta = (\sigma/\mu) \operatorname{Re} f(\mathcal{N}(V)) > \eta/(2\mu) > 0$. Кроме того, ввиду (77) справедливо неравенство $|\operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(\tau))) - \chi \theta^{\sigma+1} \langle t \rangle^{\mu-1}| \leq C\varepsilon^{\sigma+1} \langle t \rangle^{\mu-\gamma}$ для всех $t > 0$, где $\chi = \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(V))$. Подстановка последних оценок в (94) дает

$$\begin{aligned}
 \psi(t) &= -\frac{\chi}{\beta} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1} d\tau + \arg f(u_0) - \frac{1}{\theta} \int_0^\infty \left(\frac{1}{h_v(\tau)} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(\tau))) - \frac{\chi}{\beta} \langle \tau \rangle^{-1} \right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\theta} \int_t^\infty \left(\frac{1}{h_v(\tau)} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(\tau))) - \frac{\chi}{\beta} \langle \tau \rangle^{-1} \right) d\tau \\
 &= \omega \log t + \Psi + O\left(\int_t^\infty \langle \tau \rangle^{-1-\gamma} d\tau\right) = \omega \log t + \Psi + O(t^{-\gamma}), \tag{96}
 \end{aligned}$$

где $\omega = -\chi/\beta$ и

$$\Psi \equiv \arg f(u_0) - \frac{1}{\theta} \int_0^\infty \left(\frac{1}{h_v(\tau)} \operatorname{Im} f(\mathcal{N}(v(\tau))) - \frac{\chi}{\beta} \langle \tau \rangle^{-1} \right) d\tau.$$

Поэтому, учитывая формулу $u(t, x) = e^{i\psi(t)} h_v^{-1/\sigma}(t) v(t, x)$ и асимптотические оценки (89), (95) и (96), приходим к асимптотике (88), в которой $A = \beta^{-1/\sigma} e^{i\Psi}$. Теорема 18 доказана.

Применение теорем 16–18 к доказательству существования глобального во времени решения задачи Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью (23) в субкритическом случае $0 < \sigma < 2/n$ дает следующий результат (см. [64]). Обозначим $\tilde{G}_0(x) = (4\pi\alpha)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\alpha)}$.

ТЕОРЕМА 19. Пусть $0 < \sigma < 2/n$. Предположим, что начальные возмущения $u_0 \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^{1,a}$, $a \in (0, 1)$, достаточно малы: $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_0\|_{\mathbf{L}^{1,a}} \leq \varepsilon$, и $\lambda\theta \leq -C\varepsilon < 0$, где $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx$. Предположим также, что величина σ достаточно близка к значению $2/n$, так что $2/n - \sigma \leq C\varepsilon^\sigma$. Тогда задача Коши (23) имеет единственное глобальное во времени решение $u(t) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^{1,a})$. Это решение удовлетворяет оценке $\|u(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\langle t \rangle^{-1/\sigma}$ при всех $t > 0$. Более того, существуют число A и функция $V \in \mathbf{L}^{1,a} \cap \mathbf{L}^\infty$ такие, что справедлива асимптотическая формула $u(t, x) = At^{-1/\sigma} V(xt^{-1/2}) + O(t^{-1/\sigma-\gamma})$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $\gamma = (1/2) \min(a, 1 - n\sigma/2)$, а $V(\xi)$ является решением интегрального уравнения

$$V(\xi) = \tilde{G}_0(\xi) - \frac{1}{\beta} \int_0^1 \frac{dz}{z(1-z)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{G}_0\left(\frac{\xi - yz^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-z}}\right) F(y) dy,$$

где

$$\beta = \sigma \left(1 - \frac{n}{2} \sigma\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} V^{1+\sigma}(y) dy,$$

$$F(y) = V^{1+\sigma}(y) - V(y) \int_{\mathbb{R}^n} V^{1+\sigma}(\xi) d\xi.$$

6.2. Большие начальные данные. В этом пункте мы освободимся от условия малости начальных данных и установим глобальное во времени существование решений задачи Коши (23) с субкритической степенью нелинейности $\sigma \in (0, 2/n)$. По-прежнему будем предполагать, что $\sigma \in (0, 2/n)$ достаточно близко к $2/n$. Следующий результат доказан в работе [64].

ТЕОРЕМА 20. Пусть $\lambda < 0$, $n = 1, 2$. Предположим, что $u_0 \in \mathbf{W}_\infty^2(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_1^{2,a}(\mathbb{R}^n)$, $0 < a \leq 1$, и $\theta = \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x) dx \neq 0$. Предположим также, что $2/n - \varepsilon < \sigma < 2/n$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, так что заведомо имеют место неравенства $\sigma > 1$ для $n = 1$ и $\sigma > 3/4$ для $n = 2$. Тогда существует единственное глобальное во времени решение $u(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^{1,a}(\mathbb{R}^n))$ задачи Коши (23). Это решение имеет асимптотику

$$u(t, x) = At^{-1/\sigma} V(xt^{-1/2}) + O(t^{-1/\sigma-\gamma})$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где A, V те же, что и в теореме 19.

7. Субкритическая конвективная нелинейность

В этом разделе мы изучим асимптотическое поведение при больших временах решений $u(t, x)$ задачи Коши для уравнения типа Соболева с конвективной нелинейностью:

$$\begin{aligned}\partial_t(u - u_{xx}) - u_{xx} + |u|^\sigma u_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ u(1, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{97}$$

в субкритическом случае $\sigma \in (0, 1)$. Мы представим асимптотику решений задачи (97) как произведение волны разряжения и ударной волны.

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу построения волны разряжения для уравнения Хопфа:

$$\begin{aligned}\varphi_t + \varphi^\sigma \varphi_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \varphi(0, x) &= \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{98}$$

где начальное возмущение $\varphi_0(x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ монотонно возрастает ($0 < \varphi'_0(x) < C$ для всех $x \in \mathbb{R}$), $\varphi_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, $\varphi_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Решение задачи (98) можно записать в виде $\varphi(t, \chi(t, \xi)) = \varphi_0(\xi)$, где характеристики $\chi(t, \xi)$ равны $\xi + t\varphi_0^\sigma(\xi)$ при $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\varphi_x(t, \chi(t, \xi)) &= \frac{\varphi'_0(\xi)}{1 + t\sigma\varphi_0^{\sigma-1}(\xi)\varphi'_0(\xi)} > 0, \\ \varphi_{xx}(t, \chi(t, \xi)) &= \frac{\varphi''_0(\xi)}{(1 + t\sigma\varphi_0^{\sigma-1}(\xi)\varphi'_0(\xi))^2} - \frac{\varphi'_0(\xi)t\sigma(\varphi_0^{\sigma-1}(\xi)\varphi'_0(\xi))'}{(1 + t\sigma\varphi_0^{\sigma-1}(\xi)\varphi'_0(\xi))^3}\end{aligned}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Предположим также, что начальное возмущение $\varphi_0(x)$ таково, что при $t \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические оценки

$$\|\varphi_x(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C\langle t \rangle^{-1}, \quad \|\varphi_{xx}(t) + \varphi_{xxt}(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\langle t \rangle^{-1-\gamma}\tag{99}$$

с некоторым $\gamma > 0$. Условия (99) выполнены, например, если взять начальное возмущение $\varphi_0(x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$, имеющее следующее асимптотическое поведение:

$\varphi_0(\xi) = \vartheta(\xi) + O(|\xi|^{-\beta})$, $\frac{d^k}{d\xi^k}\varphi_0(\xi) = O(|\xi|^{-\beta-k})$, $k = 1, 2$, при $\xi \rightarrow \pm\infty$, где $\beta > 0$ и $\vartheta(\xi) = 1$ для $\xi \geq 0$ и $\vartheta(\xi) = 0$ для $\xi < 0$.

Приведем сначала достаточно общий результат о сходимости при $t \rightarrow \infty$ решений $u(t, x)$ задачи (97) к волне разряжения $\varphi(t, x)$.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $u_0 - \varphi_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Предположим, что начальное возмущение $\varphi_0(x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (99). Тогда $u(t, x) = \varphi(t, x) + o(1)$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разности $w = u - \varphi$ получим задачу Коши

$$\begin{aligned}\partial_t(w - w_{xx}) - w_{xx} + \frac{1}{\sigma+1} \partial_x(|w + \varphi|^{\sigma+1}) - \varphi^\sigma \varphi_x - (\varphi_{xx} + \varphi_{xxt}) &= 0, \\ w(0, x) &= w_0(x),\end{aligned}\tag{100}$$

где $w_0(x) = u_0(x) - \varphi_0(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Нетрудно доказать существование единственного решения

$$w(t, x) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{L}^2(\mathbb{R})) \cap \mathbf{C}((0, \infty); \mathbf{H}^2(\mathbb{R})) \cap \mathbf{C}^1((0, \infty); \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}))$$

задачи (100). Умножив уравнение (100) на w и проинтегрировав по всему пространству $\mathbb{R}$, получим априорную оценку энергетического типа

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{w}{\sigma+1} \partial_x (|w + \varphi|^{\sigma+1}) - w \varphi^\sigma \varphi_x \right) dx \\ = -\|w_x\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} w(\varphi_{xx} + \varphi_{xxt}) dx. \end{aligned}$$

Заметим, что (см. [84])

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{w}{\sigma+1} \partial_x (|w + \varphi|^{\sigma+1}) - w \varphi^\sigma \varphi_x \right) dx \\ = \frac{1}{1+\sigma} \int_{\mathbb{R}} (|w + \varphi|^{\sigma+1} - \varphi^{\sigma+1} - (1+\sigma)\varphi^\sigma w) \varphi_x dx \\ = \sigma \int_{\mathbb{R}} dx w^2 \varphi_x \int_0^1 |\varphi + \lambda w|^{\sigma-1} (1-\lambda) d\lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Откуда в силу неравенства Коши и оценок (99) имеем $\frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^1}^2 + 2\|w_x\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C\langle t \rangle^{-1-\gamma} \|w\|_{\mathbf{L}^2}$. Интегрируя это неравенство по времени, получим

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \|w_x(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau \leq C,$$

значит, существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что $\|w_x(t_k)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0$. Для того чтобы получить априорную оценку энергетического типа, умножим уравнение (100) на w_{xx} и проинтегрируем по всему пространству $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_x\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \int_{\mathbb{R}} \frac{|w + \varphi|^{\sigma+1}}{w + \varphi} w_x w_{xx} dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|w + \varphi|^{\sigma+1}}{w + \varphi} - \varphi^\sigma \right) w_{xx} \varphi_x dx \\ = -\|w_{xx}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \int_{\mathbb{R}} w_{xx}(\varphi_{xx} + \varphi_{xxt}) dx. \end{aligned}$$

Используя для интегралов в левой части оценки

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|w + \varphi|^{\sigma+1}}{w + \varphi} w_x w_{xx} dx &\leq C(\|w\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma + 1) \|w_x\|_{\mathbf{L}^2} \|w_{xx}\|_{\mathbf{L}^2}, \\ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{|w + \varphi|^{\sigma+1}}{w + \varphi} - \varphi^\sigma \right) w_{xx} \varphi_x dx &\leq C\|w\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma \|w_{xx}\|_{\mathbf{L}^2} \|\varphi_x\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C\|w_x\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{\sigma}{2}} \|w_{xx}\|_{\mathbf{L}^2} \|\varphi_x\|_{\mathbf{L}^2} \end{aligned}$$

и учитывая, что $\|\varphi_x\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|\varphi_x\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1/2} \|\varphi_x\|_{\mathbf{L}^1}^{1/2} = \|\varphi_x\|_{\mathbf{L}^\infty}^{1/2} \leq C\langle t \rangle^{-1/2}$ (так как $\int \varphi_x dx = 1$), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w_x\|_{\mathbf{H}^1}^2 &\leq -\|w_{xx}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C(\langle t \rangle^{-1-\gamma} + \|w_x\|_{\mathbf{L}^2} + \langle t \rangle^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{L}^\infty}^\sigma) \|w_{xx}\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C\langle t \rangle^{-1-\gamma} + C\|w_x\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Интегрируя по времени, находим

$$\|w_x(t)\|_{\mathbf{H}^1}^2 \leq \|w_x(T)\|_{\mathbf{H}^1}^2 + C \int_T^\infty \langle \tau \rangle^{-1-\gamma} d\tau + C \int_T^\infty \|w_x(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau.$$

Откуда следует, что $\|w_x(t)\|_{\mathbf{L}^2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому $\|w(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|w(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{1/2} \times \|w_x(t)\|_{\mathbf{L}^2}^{1/2} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема 21 доказана.

Теперь мы наложим более сильные ограничения на начальные возмущения $u_0(x)$ и вычислим более точно асимптотику при больших временах решения $u(t, x)$ задачи Коши (97) с граничными условиями типа волны разряжения. Предположим, что начальные возмущения $u_0(x)$ монотонно возрастают от нуля до единицы и медленно меняются так, что старшие производные малы по сравнению с младшими. Более точно, предположим, что начальные данные $u_0(x) \in \mathbf{C}^3(\mathbb{R})$ удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u_0^\sigma(x) &\leq \varepsilon^{\frac{1}{1-\gamma}} (u_0^\sigma(x))^{\frac{2}{1-\gamma}}, \\ \frac{d^2}{dx^2} u_0^\sigma(x) &\leq \varepsilon \left(\frac{d}{dx} u_0^\sigma(x) \right)^{\frac{3+\gamma}{2}}, \\ \frac{d^3}{dx^3} u_0^\sigma(x) &\leq \varepsilon \left(\frac{d}{dx} u_0^\sigma(x) \right)^{2+\gamma} \end{aligned} \quad (101)$$

для всех $x \in \mathbb{R}$, где $\gamma \in (0, 1/2)$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Например, мы можем взять начальные возмущения вида $u_0(x) = C \left(\int_{-\infty}^x \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^4 \xi^2)^{\gamma-1} d\xi \right)^{1/\sigma}$, где $C > 0$ таково, что $u_0(+\infty) = 1$. Отметим, что такие начальные данные $u_0(x)$ убывают со скоростью $O(|x|^{(2\gamma-1)/\sigma})$ при $x \rightarrow -\infty$.

Из теоремы 21 нам известно, что решения задачи (97) приближаются с течением времени к решениям уравнения Хопфа (98). Значит, нелинейность в уравнении (97) доминирует над линейными членами, и асимптотика решений уравнения (97) в основном определяется членами u_t и $(\sigma + 1)^{-1} \partial_x(|u|^{\sigma+1})$. Исходя из этого, будем решать уравнение (97) методом характеристик. Определим характеристики $\chi(t, \xi)$ как решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \partial_t \chi &= |u|^{\sigma-1} u(t, \chi) - \frac{u_{\chi\chi}}{u_\chi} - \frac{u_{\chi\chi t}}{u_\chi}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \chi(0, \xi) &= \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Тогда в силу уравнения (97) получаем для новой функции $w(t, \xi) = u(t, \chi(t, \xi))$ уравнение

$$\begin{aligned} w_t(t, \xi) &= u_t + u_\chi \chi_t = u_t + u_\chi \left(|u|^{\sigma-1} u - \frac{u_{\chi\chi}}{u_\chi} - \frac{u_{\chi\chi t}}{u_\chi} \right) \\ &= \partial_t(u - u_{\chi\chi}) - u_{\chi\chi} + \frac{1}{\sigma+1} \partial_\chi(|u|^{\sigma+1}) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $w(t, \xi) = u_0(\xi)$ для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$. Прямое вычисление дает

$$\partial_\chi u = \frac{u'_0(\xi)}{\chi_\xi(t, \xi)}, \quad \partial_\chi^2 u = \frac{u''_0(\xi)}{\chi_\xi^2(t, \xi)} - \frac{u'_0(\xi) \chi_{\xi\xi}(t, \xi)}{\chi_\xi^3(t, \xi)},$$

поэтому уравнение для характеристики $\chi(t, \xi)$ принимает вид

$$\partial_t \chi = u_0^\sigma(\xi) - \frac{1}{u_0'(\xi)} \partial_\xi \left(\frac{u_0'(\xi)}{\chi_\xi(t, \xi)} \right) - \frac{\chi_\xi(t, \xi)}{u_0'(\xi)} \partial_t \left(\frac{1}{\chi_\xi(t, \xi)} \partial_\xi \left(\frac{u_0'(\xi)}{\chi_\xi(t, \xi)} \right) \right).$$

Сделаем замену независимой переменной $\eta = u_0^\sigma(\xi)$, тогда (в силу предположения $u_0'(\xi) > 0$) числовая ось $\xi \in \mathbb{R}$ взаимно однозначно отображается на отрезок $(0, 1)$. Обозначим $m(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \sigma u_0^{\sigma-1}(\xi) u_0'(\xi)$ и $Z(t, \eta) = \frac{m(\eta)}{\chi_\xi(t, \xi)}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \partial_t \chi &= \eta - \eta^{1-\frac{1}{\sigma}} \partial_\eta (\eta^{\frac{1}{\sigma}-1} Z) - \frac{1}{Z} \partial_t (Z \eta^{1-\frac{1}{\sigma}} \partial_\eta (\eta^{\frac{1}{\sigma}-1} Z)) \\ &= \eta - \partial_\eta Z - \kappa \frac{Z}{\eta} - \frac{1}{Z} \partial_t \left(Z \partial_\eta Z + \frac{2\kappa}{\eta} Z \right), \end{aligned}$$

где $\kappa = 1/\sigma - 1$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \partial_t \chi_\xi(t, \xi) &= m(\eta) - m(\eta) \partial_\eta \left(\partial_\eta Z + \kappa \frac{Z}{\eta} + \frac{1}{Z} \partial_t \left(Z \partial_\eta Z + \frac{2\kappa}{\eta} Z \right) \right) \\ &= m(\eta) \left(1 - \partial_\eta^2 Z - \kappa \partial_\eta \left(\frac{Z}{\eta} \right) - \partial_\eta \left(\frac{1}{Z} \partial_t \left(Z \partial_\eta Z + \frac{2\kappa}{\eta} Z \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для $Z(t, \eta)$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t Z &= -Z^2 \frac{1}{m(\eta)} \partial_t \chi_\xi(t, \xi) = -Z^2 + Z^2 Z_{\eta\eta} + \frac{\kappa}{\eta} Z^2 Z_\eta - \frac{\kappa}{\eta^2} Z^3 \\ &\quad - Z_t \left(\frac{3}{2} Z_\eta^2 + Z Z_{\eta\eta} + \frac{4\kappa}{\eta} Z_\eta + \frac{2\kappa}{\eta^2} Z \right) + \partial_t \left(\frac{1}{2} Z Z_\eta^2 + Z^2 Z_{\eta\eta} + \frac{2\kappa}{\eta} Z Z_\eta \right) \\ &= -Z^2(1 - A), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A &= Z_{\eta\eta} + \frac{\kappa}{\eta} Z_\eta - \frac{\kappa}{\eta^2} Z + \frac{1}{Z} Z_\eta Z_{\eta t} - \frac{1}{Z^2} Z_t Z_\eta^2 \\ &\quad + \frac{1}{Z} Z_t Z_{\eta\eta} + Z_{\eta\eta t} + \frac{2\kappa}{Z\eta} Z_{\eta t} - \frac{2\kappa}{Z\eta^2} Z_t - \frac{2\kappa}{\eta Z^2} Z_t Z_\eta. \end{aligned}$$

Итак, функция $Z(t, \eta)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} Z_t &= -Z^2(1 - A), \quad \eta \in (0, 1), \quad t > 0, \\ Z(0, \eta) &= m(\eta), \quad \eta \in (0, 1), \\ Z^{k-\frac{3}{2}} \partial_\eta^k Z|_{\eta=0,1} &= 0, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \tag{102}$$

поскольку ввиду (101) мы предполагаем, что $u_0(\xi)$ такова, что $\partial_\eta^k m(\eta) = o(\eta^{2-k})$ при $\eta \rightarrow 0$ для $k = 1, 2$.

Ввиду существования единственного решения $u(t, x)$ задачи (97) существует единственное глобальное во времени решение $Z(\tau, \eta) \in \mathbf{C}([0, \infty); \mathbf{C}^2(0, 1)) \cap \mathbf{C}^1((0, \infty); \mathbf{C}(0, 1))$ начально-краевой задачи (102). Интегрирование уравнения (102) по времени $t > 0$ дает следующее представление:

$$Z(t, \eta) = m(\eta) \left(1 + m(\eta) \left(t + \int_0^t A(\tau, \eta) d\tau \right) \right)^{-1}. \tag{103}$$

Следуя работе [67], получаем такой результат:

ТЕОРЕМА 22. Пусть для начального возмущения $u_0(x)$ выполнены условия (101) с достаточно малым $\varepsilon > 0$. Тогда имеет место оценка

$$\sup_{\eta \in (0,1)} \left| \int_1^t A(\tau, \eta) d\tau \right| \leq C\varepsilon t^{1-\gamma}$$

для всех $t \geq 1$, где $\gamma \in (0, 1/2)$ взято из условия (101).

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу построения волны разрежения для уравнения (97)

$$\begin{aligned} \partial_t(\varphi - \varphi_{xx}) - \varphi_{xx} + |\varphi|^\sigma \varphi_x &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ \varphi(1, x) &= \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (104)$$

где начальное возмущение $\varphi_0(x) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R})$ монотонно возрастает ($0 < \varphi'_0(x) < C$ для всех $x \in \mathbb{R}$), $\varphi_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\varphi_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Определим теперь решение $r(t, x)$ типа ударной волны:

$$\begin{aligned} r_t + \varphi^\sigma |r|^\sigma r_x - r_{xx} - \frac{1}{\varphi} \varphi_{xx} r_t + \frac{2}{\varphi} ((\varphi^\sigma \varphi_x)_x - \varphi_x) r_x - \frac{2}{\varphi} \varphi_x r_{tx} \\ + \varphi^{\sigma-1} \varphi_x r_{xx} - r_{txx} + \varphi^{\sigma-1} \varphi_x (|r|^\sigma - 1) r &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ r(1, x) &= r_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (105)$$

где начальное возмущение $r_0(x) = u_0(x)/\varphi_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям типа ударной волны $r_0(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$ и $r_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е. $\varphi_0(x) \approx u_0(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ и $r_0(x) \approx u_0(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда в силу (104) и (105) функция $u = \varphi r$ удовлетворяет исходной задаче Коши (97).

Сделав замену переменных

$$r(t, x) = w(t, y), \quad x = yt^{\frac{1}{2}-\alpha} + \frac{2a_0}{1+2\alpha} t^{\frac{1}{2}+\alpha} + \int_1^t a_1(\tau) \tau^{-\frac{1}{2}-\alpha} d\tau$$

(a_0 , $a_1(t)$ и α выберем позже), получим

$$\begin{aligned} w_t + \sum_{k=1}^5 J_k &= 0, & y \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ w(1, y) &= r_0(y), & y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (106)$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= t^{2\alpha-1} \partial_y \left(\frac{B}{1+\sigma} |w|^\sigma w - a_0 w - w_y \right), \\ J_2 &= -t^{-1} (\nu y + a_1(t)) w_y, \\ J_3 &= -\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} w_t - 2t^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_x}{\varphi} w_{ty} - t^{2\alpha-1} w_{tyy}, \\ J_4 &= q_1 w_y + q_2 w_{yy} + q_3 w_{yyy}, \\ J_5 &= \varphi^\sigma \frac{\varphi_x}{\varphi} (|w|^\sigma - 1) w + t^{2\alpha-1} (\varphi^\sigma t^{\frac{1}{2}-\alpha} - B) |w|^\sigma w_y, \end{aligned}$$

где $\nu = 1/2 - \alpha$, $a(t) = a_0 + a_1(t)t^{-2\alpha}$,

$$\begin{aligned} q_1 &= (\nu y + at^{2\alpha})t^{-1} \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} + \frac{2}{\varphi} t^{\alpha-\frac{1}{2}} (\varphi^\sigma \varphi_x)_x + 2(\nu t^{\alpha-\frac{3}{2}} - t^{\alpha-\frac{1}{2}}) \frac{\varphi_x}{\varphi}, \\ q_2 &= 2(\nu y + at^{2\alpha})t^{\alpha-\frac{3}{2}} \frac{\varphi_x}{\varphi} + t^{2\alpha-1} \varphi^\sigma \frac{\varphi_x}{\varphi} + (1-2\alpha)t^{2\alpha-2}, \\ q_3 &= t^{2\alpha-2}(\nu y + t^{2\alpha}a(t)). \end{aligned}$$

Чтобы сократить расходящееся слагаемое J_1 в левой части уравнения (106), будем искать первое приближение $\Phi(y)$ как решение уравнения $\partial_y \left(\frac{B}{1+\sigma} |\Phi|^\sigma \Phi - a_0 \Phi - \Phi' \right) = 0$ с граничными условиями $\Phi(y) \rightarrow 1$ при $y \rightarrow -\infty$ и $\Phi(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$. Решая это уравнение с заданными граничными условиями, находим $a_0 = B(1+\sigma)^{-1}$ и единственное с точностью до сдвига решение $\Phi(y) = (1 + e^{hy})^{-1/\sigma}$, где $h = a_0\sigma$. Рассмотрим кривую $y = 0$, т.е. $x_f(t) = \int_1^t a(\tau)\tau^{\alpha-1/2} d\tau$, будем называть ее фронтом волны. Имеем

$$x_f(t) = \frac{2a_0}{1+2\alpha} t^{\alpha+\frac{1}{2}} + O(t^{\frac{1}{2}-\alpha}) \quad (107)$$

при $t \rightarrow \infty$. Определим $\xi_0(t)$ из условия $\chi(t, \xi_0(t)) = x_f(t)$, тогда $\varphi(t, x_f(t)) = \varphi_0(\xi_0(t))$, и в силу (107), для функции $\xi_0(t)$ получим из уравнения $\chi(t, \xi) = \xi + t\varphi_0^\sigma(\xi) + O(t^{1/2-\alpha})$ соотношение

$$\xi_0 + \varphi_0^\sigma(\xi_0)t = \frac{2a_0}{1+2\alpha} t^{\alpha+\frac{1}{2}} + O(t^{\frac{1}{2}-\alpha}) \quad (108)$$

при $t \rightarrow \infty$, поэтому

$$t^{\frac{1}{2}-\alpha} \varphi^\sigma(t, x_f(t)) - \frac{2a_0}{1+2\alpha} = O(t^{-2\alpha}) + O(t^{-\frac{1}{2}-\alpha} \xi_0)$$

при $t \rightarrow \infty$. Обозначим $B = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{1/2-\alpha} \varphi^\sigma(t, x_f(t))$, тогда имеем $B = 2a_0/(1+2\alpha)$, откуда ввиду полученного ранее соотношения $a_0 = B/(1+\sigma)$ находим $\alpha = 1/2 - \sigma/(1+\sigma)$.

Предположим, что начальное возмущение $\varphi_0(\xi)$ имеет асимптотику

$$\frac{d^k}{d\xi^k} \varphi_0(\xi) = b_1 |\xi|^{-\frac{1}{\sigma}-k} + O(|\xi|^{-\frac{1}{\sigma}-1-k}) \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

тогда ввиду (108) имеем уравнение

$$b_1^\sigma |\xi_0(t)|^{-1} = Bt^{\alpha-\frac{1}{2}} + O(t^{-\frac{1}{2}-\alpha}) - \xi_0 t^{-1} + O(|\xi_0|^{-1-\sigma}),$$

откуда сначала находим оценку $\xi_0(t) = O(t^{1/2-\alpha})$, а затем асимптотику $\xi_0(t) = -t^{1/2-\alpha} b_1^\sigma / B + O(t^{1/2-3\alpha})$. Таким образом, $\varphi^\sigma(t, x_f(t)) = Bt^{\alpha-1/2} + O(t^{-1/2-\alpha})$, $\varphi(t, x_f(t)) = B^{1/\sigma} t^{-1/(1+\sigma)} + O(t^{-1/(1+\sigma)-2\alpha})$.

При $t \rightarrow \infty$ справедливы соотношения

$$\varphi_x(t, x_f(t)) = \frac{\varphi'_0(\xi_0)}{1 + t\sigma\varphi_0^{\sigma-1}(\xi_0)\varphi'_0(\xi_0)} = O\left(\frac{b_2|\xi_0|^{-\frac{1}{\sigma}-1}}{1 + t\sigma b_1^{\sigma-1} b_2 \xi_0^{-2}}\right) = O(t^{-1-2\alpha})$$

и $\varphi_x(t, x) = O(t^{-1})$. Поскольку $x - x_f(t) = yt^{1/2-\alpha}$, по формуле Тейлора имеем $\varphi(t, x) = \varphi(t, x_f(t)) + (x - x_f(t))\varphi_x(t, \tilde{x}) = B^{\frac{1}{\sigma}}t^{-\frac{1}{1+\sigma}} + O(t^{-\frac{1}{1+\sigma}-2\alpha}) + O(yt^{-\frac{1}{2}-\alpha})$. Таким образом, получаем

$$t^{\frac{1}{2}-\alpha}\varphi^\sigma(t, x) - B = O(yt^{-2\alpha}) \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_x(t, x_f(t))}{\varphi(t, x_f(t))} = O(t^{-\frac{1}{2}-\alpha}).$$

Заметим, что $\varphi_x(t, x)/\varphi(t, x) = O(t^{-1/2})$ и $\varphi_{xx}(t, x)/\varphi(t, x) = O(t^{-1})$, откуда по формуле Тейлора

$$\frac{\varphi_x(t, x)}{\varphi(t, x)} = \frac{\varphi_x(t, x_f(t))}{\varphi(t, x_f(t))} + (x - x_f(t)) \left(\frac{\varphi_{xx}(t, \tilde{x})}{\varphi(t, \tilde{x})} - \frac{\varphi_x^2(t, \tilde{x})}{\varphi^2(t, \tilde{x})} \right) = O((1 + |y|)t^{-\frac{1}{2}-\alpha})$$

при $t \rightarrow \infty$. Отметим также оценки $q_2 = O((1 + |y|)t^{-1})$, $q_3 = O((1 + |y|)t^{2\alpha-2})$ и $q_4 = \nu yt^{2\alpha-2} + O(t^{4\alpha-2})$.

Докажем теперь, что решение $w(t, y)$ уравнения (106) сходится к приближенному решению $\Phi(y)$ при $t \rightarrow \infty$. Ввиду (106) получаем для разности $v = w - \Phi_0$ уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t \left(v - t^{2\alpha-1} v_{yy} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi} v - 2t^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_x}{\varphi} v_y \right) + t^{2\alpha-1} \frac{B}{1+\sigma} \partial_y (|v + \Phi|^\sigma (v + \Phi) - \Phi^{\sigma+1}) \\ - t^{-1} (\nu y + at^{2\alpha}) v_y - t^{2\alpha-1} (1 + 2\nu t^{-1}) v_{yy} + R_1 + R_2 + R_3 = 0, \end{aligned} \quad (109)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (q_2 - t^{-1}(\nu y + a_1(t)))\Phi' + q_3\Phi'' + q_4\Phi''', \\ R_2 &= \varphi^\sigma \frac{\varphi_x}{\varphi} (|v + \Phi|^\sigma - 1)(v + \Phi) + t^{2\alpha-1}(\varphi^\sigma t^{\frac{1}{2}-\alpha} - B)|v + \Phi|^\sigma (v_y + \Phi'), \\ R_3 &= \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} \right)_t v + 2 \left(t^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_x}{\varphi} \right)_t v_y + q_2 v_y + q_3 v_{yy} + q_4 v_{yyy}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы $a_1(t)$ удовлетворяло условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (R_1 + R_2 + R_3) dy' = 0.$$

Тогда

$$F(t, y) = \int_{-\infty}^y (R_1 + R_2 + R_3) dy' = - \int_y^{\infty} (R_1 + R_2 + R_3) dy'.$$

Имеем оценку $\left| \int_{-\infty}^y R_1 dy' \right| \leq Ch^{-1}t^{-1-2\alpha}(1+y^2)e^{-2L(y)}$, где $L(y) = a_0|y|/2$ при $y > 0$ и $L(y) = h|y|/2$ при $y < 0$ ($h = \sigma a_0$). Интегрирование уравнения (109) по y дает

$$\begin{aligned} \partial_t \left(V - t^{2\alpha-1} V_{yy} - \int_{-\infty}^y \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} V_y + 2t^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_x}{\varphi} V_{yy} \right) dy \right) \\ - t^{-1} \nu y V_y + \nu t^{-1} V + t^{2\alpha-1} a_0 (|V_y + \Phi|^\sigma (V_y + \Phi) - \Phi^{\sigma+1}) \\ - t^{2\alpha-1} a V_y - t^{2\alpha-1} (1 + 2\nu t^{-1}) V_{yy} + F = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ V(0, x) = V_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (110)$$

где

$$V(t, y) = \int_{-\infty}^y v(t, y') dy' \quad \text{и} \quad F = \int_{-\infty}^y (R_1 + R_2 + R_3) dy'.$$

Заметим, что $V_0(x) = \int_{-\infty}^x (w_0(x') - W(1, x')) dx' \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Предположим теперь, что начальные возмущения $w_0(x)$ для задачи (110) достаточно близки к приближенной ударной волне $W(1, x)$, так что

$$e^{L(x)} \int_{-\infty}^x (w_0(\xi) - W(1, \xi)) d\xi \in \mathbf{H}^2,$$

где $L(x) = a_0|x|/2$ при $x > 0$ и $L(x) = h|x|/2$ при $x < 0$ ($h = \sigma a_0$, $a_0 = B/(1+\sigma)$). Обозначим $\alpha = 1/2 - \sigma/(1+\sigma)$, $\sigma \in (0, 1)$.

Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 23. *Предположим, что начальное возмущение $u_0(\xi)$ имеет следующую асимптотику:*

$$\frac{d^k}{d\xi^k} u_0(\xi) = b_1 |\xi|^{-\frac{1}{\sigma}-k} + O(|\xi|^{-\frac{1}{\sigma}-1-k}) \quad \text{при } \xi \rightarrow -\infty, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Пусть функция $\varphi_0(x)$ монотонна ($\varphi'_0(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$) и $\varphi_0(x) = u_0(x) + o(1)$ при $x \rightarrow -\infty$. Пусть начальные возмущения $u_0(x)$ близки к ударной волне $W(0, x)$, так что

$$\left\| e^{L(x)} \int_{-\infty}^x \left(\frac{u_0(\xi)}{\varphi_0(\xi)} - W(1, \xi) \right) d\xi \right\|_{\mathbf{H}^2} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Предположим, что величина B достаточно велика: $B \geq C/\varepsilon$. Тогда единственное решение $u(t, x)$ задачи Коши (97) имеет при $t \rightarrow \infty$ асимптотическое представление

$$u(t, x) = \varphi(t, x) \Phi(y) + O(t^{-\frac{1}{2}-\alpha}),$$

равномерное по $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену $g(t, y) = V(t, y)e^{\theta(y)}$. Функцию $\theta(y)$ определим из уравнения $\theta'(y) = (1/2)(a_0 - B\Phi^\sigma(y))$, тогда

$$\theta(y) = L(y) + \frac{B}{2h} \log(1 + e^{-h|y|}),$$

где $L(x) = a_0|x|/2$ при $x > 0$ и $L(x) = h|x|/2$ при $x < 0$ и $h = \sigma a_0$, $a_0 = B/(1+\sigma)$. Из уравнения (110) найдем

$$\begin{aligned} G_t + t^{2\alpha-1} a_0 e^\theta ((g_y - \theta' g) e^{-\theta} + \Phi |^\sigma ((g_y - \theta' g) e^{-\theta} + \Phi) - \Phi^{\sigma+1}) \\ - t^{2\alpha-1} (1 + 2\nu t^{-1}) g_{yy} - \phi g_y + \psi g + e^\theta F = 0, \end{aligned} \quad (111)$$

где

$$\begin{aligned}
 G &= g - t^{2\alpha-1}(g_{yy} - 2\theta'g_y + (\theta'^2 - \theta'')g) - e^\theta \int_{-\infty}^y \left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi} (g_y - \theta'g)e^{-\theta} \right. \\
 &\quad \left. + 2t^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{\varphi_x}{\varphi} (g_{yy} - 2\theta'g_y + (\theta'^2 - \theta'')g)e^{-\theta} \right) dy, \\
 \phi(t, y) &= t^{2\alpha-1}a + t^{-1}\nu y - 2\theta't^{2\alpha-1}(1 + 2\nu t^{-1}), \\
 \psi(t, y) &= t^{2\alpha-1}a\theta' + t^{-1}\nu y\theta' + \nu t^{-1} - t^{2\alpha-1}(1 + 2\nu t^{-1})(\theta'^2 - \theta'').
 \end{aligned}$$

Докажем, что $\|G(t)\|_{\mathbf{L}^2} < Ct^{-2\alpha}$ при всех $t > 0$. Предположим противное, тогда в силу непрерывности найдется $T > 0$ такое, что

$$\|G(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-2\alpha} \quad (112)$$

при всех $t \in [0, T]$. Применим энергетический метод. Умножим уравнение (111) на G и после этого проинтегрируем результат по y , получим оценку

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|G(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq -t^{2\alpha-1}a_0(e^\theta G, |\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma (\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}) - \Phi^{\sigma+1})_{\mathbf{L}^2} \\
 &\quad + t^{2\alpha-1}(1 + 2\nu t^{-1})(G, g_{yy})_{\mathbf{L}^2} + (G, \phi g_y - \psi g)_{\mathbf{L}^2} + \|e^\theta GF\|_{\mathbf{L}^1}.
 \end{aligned}$$

Ввиду оценок

$$\begin{aligned}
 t^{2\alpha-1}a_0e^\theta &\left(|\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma (\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}) - \Phi^{\sigma+1} \right) \\
 &= t^{2\alpha-1}B\Phi^\sigma(g_y - \theta'g) + O((g_y - \theta'g)t^{2\alpha-1-2\sigma\alpha})
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 &-t^{2\alpha-1}B\left(\theta'\Phi^\sigma + \frac{1}{2}(\Phi^\sigma)'\right) + \psi + \frac{1}{2}\phi_y \\
 &= \frac{B^2(1-\sigma)}{4(1+\sigma)}t^{2\alpha-1}\left(\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} + (1-\Phi^\sigma)^2\right) \geq CB^2t^{2\alpha-1}
 \end{aligned}$$

при всех $y \in \mathbb{R}$ и соотношений $\Phi^\sigma = (1 + e^{hy})^{-1}$ и $\theta' = (1/2)(a_0 - B\Phi^\sigma)$, а также ввиду оценок $\varphi_x/\varphi = O((1 + |y|)t^{-1/2-\alpha})$ и (112), дающих оценку $\|e^\theta F(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-1}$, получаем

$$\frac{d}{dt} \|G(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq -CB^2t^{2\alpha-1}\|G(t)\|_{\mathbf{L}^2} + Ct^{-1}, \quad (113)$$

откуда, интегрируя по времени, находим, что $\|G(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C\varepsilon t^{-2\alpha}$ при всех $t \geq 0$. Аналогично оценим производную G_y . Имеем

$$\begin{aligned}
 G_{yt} - \phi g_{yy} + \partial_y t^{2\alpha-1}a_0e^\theta &\left(|(g_y - \theta'g)e^{-\theta} + \Phi|^\sigma ((g_y - \theta'g)e^{-\theta} + \Phi) - \Phi^{\sigma+1} \right) \\
 - t^{2\alpha-1}(1 + 2\nu t^{-1})g_{yy} &+ \psi_y g + (\psi - \phi_y)g_y + \partial_y(e^\theta F) = 0.
 \end{aligned} \quad (114)$$

Применяя энергетический метод, умножим (114) на G_y и проинтегрируем по y ; в итоге получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|G_y(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq -\left(G_y, t^{2\alpha-1}e^\theta \theta' a_0 \left(|\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma (\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \Phi^{\sigma+1} - (1 + \sigma)\Phi^\sigma(g_y - \theta'g)e^{-\theta} \right) \right)_{\mathbf{L}^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(G_y, t^{2\alpha-1} \Phi_y e^\theta B(|\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma - \Phi^\sigma - \sigma\Phi^{\sigma-1}(g_y - \theta'g)e^{-\theta}) \right)_{\mathbf{L}^2} \\
& + \left(G_y, t^{2\alpha-1} B(|\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma - \Phi^\sigma) (2\theta'g_y - (\theta'^2 - \theta'')g) \right)_{\mathbf{L}^2} \\
& - (G_y, (\psi - \phi_y - t^{2\alpha-1} B|\Phi|^\sigma \theta' + t^{2\alpha-1} \sigma B\Phi^{\sigma-1} \Phi_y) g_y)_{\mathbf{L}^2} \\
& - (G_y, (\psi_y - t^{2\alpha-1} B|\Phi|^\sigma \theta'^2 - t^{2\alpha-1} \sigma B\Phi^{\sigma-1} \Phi_y \theta') g)_{\mathbf{L}^2} - (G_y, \partial_y(e^\theta F))_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Как и выше, получим оценки

$$\begin{aligned}
& t^{2\alpha-1} e^\theta \theta' a_0 \left(|\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma (\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}) - \Phi^{\sigma+1} \right. \\
& \quad \left. - (1 + \sigma) \Phi^\sigma (g_y - \theta'g)e^{-\theta} \right) = O(Bt^{-1}), \\
& t^{2\alpha-1} \Phi_y B e^\theta (|\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta}|^\sigma - \Phi^\sigma - \sigma\Phi^{\sigma-1}(g_y - \theta'g)e^{-\theta}) = O(Bt^{-1}), \\
& t^{2\alpha-1} B \left((\Phi + (g_y - \theta'g)e^{-\theta})^\sigma - \Phi^\sigma \right) (2\theta'g_y - (\theta'^2 - \theta'')g) = O(t^{-1})
\end{aligned}$$

и

$$\psi - \phi_y - t^{2\alpha-1} B\Phi^\sigma \theta' + t^{2\alpha-1} \sigma B\Phi^{\sigma-1} \Phi_y \geq CB^2 t^{2\alpha-1}$$

для всех $y \in \mathbb{R}$. Также имеем оценки

$$\psi_y - t^{2\alpha-1} B\Phi^\sigma \theta'^2 - t^{2\alpha-1} \sigma B\Phi^{\sigma-1} \Phi_y \theta' = O(B^3 t^{2\alpha-1})$$

и $(e^\theta F)_y = O(t^{-1})$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \|G_y\|_{\mathbf{L}^2} \leq -t^{2\alpha-1} CB^2 \|G_y\|_{\mathbf{L}^2} + CB^3 t^{2\alpha-1} \|G\|_{\mathbf{L}^2} + Ct^{-1}.$$

Комбинируя это неравенство и (113), имеем

$$\frac{d}{dt} (\|G_y\|_{\mathbf{L}^2} + B\|G\|_{\mathbf{L}^2}) \leq -CB^2 t^{2\alpha-1} (\|G_y\|_{\mathbf{L}^2} + B\|G\|_{\mathbf{L}^2}) + Ct^{-1},$$

откуда, интегрируя по времени, находим, что $\|G_y\|_{\mathbf{L}^2}^2 + B\|G\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq Ct^{-2\alpha}$ при всех $t \geq 0$. Аналогично оценим старшую производную: $\|G_{yy}\|_{\mathbf{L}^2} + B\|G_y\|_{\mathbf{L}^2} + B^2\|G\|_{\mathbf{L}^2} \leq Ct^{-2\alpha}$ при всех $t \geq 0$. Результат теоремы теперь следует из оценки

$$\begin{aligned}
|u(t, x) - \varphi(t, x)\Phi(y)| & \leq |u(t, x) - \varphi(t, x)\Phi(t, y)| \leq |\varphi(t, x)| |V_y(t, y)| + Ct^{-\frac{1}{2}-\alpha} \\
& \leq |\varphi| |(g_y - \theta'g)e^{-\theta}| + Ct^{-\frac{1}{2}-\alpha} \leq Ct^{-\frac{1}{2}-\alpha}.
\end{aligned}$$

Теорема 23 доказана.

Мы глубоко признательны С. И. Похожаеву и С. Ю. Доброхотову за весьма ценные замечания и предложения.

Список литературы

- [1] С. Л. Соболев, “Об одной новой задаче математической физики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18:1** (1954), 3–50.
- [2] Р. А. Александрян, “Спектральные свойства операторов, порожденных системой дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева”, *Тр. ММО*, **9** (1980), 455–505.

- [3] С. А. Габов, *Новые задачи математической теории волн*, Физматлит, М., 1998.
- [4] С. Ю. Доброхотов, “Нелокальные аналоги нелинейного уравнения Буссинеска для поверхностных волн над неровным дном и их асимптотические решения”, *Докл. АН СССР*, **292**:1 (1987), 63–67; англ. пер.: S. Yu. Dobrokhotov, “Nonlocal analogues of the nonlinear Boussinesq equation for surface waves over an uneven bottom and their asymptotic solutions”, *Soviet Phys. Dokl.*, **32**:1 (1987), 18–20.
- [5] Т. И. Зеленьяк, *Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными*, Спецкурс для студентов-математиков НГУ, Изд-во НГУ, Новосибирск, 1970.
- [6] Б. В. Капитонов, “Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости”, *Матем. сб.*, **109**:4 (1979), 607–628; англ. пер.: B. V. Kapitonov, “Potential theory for the equation of small oscillations of a rotating fluid”, *Math. USSR-Sb.*, **37**:4 (1980), 559–579.
- [7] В. Н. Масленникова, “Явные представления и априорные оценки решений граничных задач для систем Соболева”, *Сиб. матем. журн.*, **9**:5 (1968), 1182–1198; англ. пер.: V. N. Maslennikova, “Explicit representations and a priori estimates for the solutions of boundary problems for Sobolev systems”, *Siberian Math. J.*, **9**:5 (1968), 883–897.
- [8] В. П. Маслов, “О существовании убывающего при $t \rightarrow \infty$ решения уравнения С. Л. Соболева для малых колебаний вращающейся жидкости в цилиндрической области”, *Сиб. матем. журн.*, **9**:6 (1968), 1351–1359; англ. пер.: V. P. Maslov, “On the existence of a solution, decreasing as $t \rightarrow \infty$, of Sobolev’s equation for small oscillations of a rotating fluid in a cylindrical domain”, *Siberian Math. J.*, **9**:6 (1968), 1013–1020.
- [9] Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. Н. Налимов, В. Ю. Ляпидевский, П. И. Плотников, И. В. Штурова, В. И. Букреев, В. А. Владимиров, *Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн*, Наука, Новосибирск, 1985.
- [10] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [11] Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, “Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах”, *ПММ*, **24**:5 (1960), 852–864; англ. пер.: G. I. Barenblatt, Iu. P. Zheltov, I. N. Kochina, “Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata)”, *J. Appl. Math. Mech.*, **24**:5 (1960), 1286–1303.
- [12] С. А. Габов, А. Г. Свешников, *Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн*, Наука, М., 1990.
- [13] С. Я. Секерж-Зенькович, “Построение фундаментального решения оператора внутренних волн”, *Докл. АН СССР*, **246**:2 (1979), 286–289; англ. пер.: S. Ja. Sekerž-Zen’kovič, “Fundamental solution of the interior wave operator”, *Soviet Phys. Dokl.*, **24**:5 (1979), 347–349.
- [14] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “Разрушение решений абстрактных задач Коши для нелинейных дифференциально-операторных уравнений”, *Докл. РАН*, **401**:1 (2005), 12–15.
- [15] J. Albert, “On the decay of solutions of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **141**:2 (1989), 527–537.
- [16] J. W. Bebernes, A. A. Lacey, “Global existence and finite-time blow-up for a class of nonlocal parabolic problems”, *Adv. Differential Equations*, **2**:6 (1997), 927–953.
- [17] T. B. Benjamin, J. L. Bona, J. J. Mahony, “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, **272**:1220 (1972), 47–78.
- [18] P. Biler, “Long time behavior of the generalized Benjamin–Bona–Mahony equation in two space dimensions”, *Differential Integral Equations*, **5**:4 (1992), 891–901.

- [19] Y. M. Chen, “Remark on the global existence for the generalized Benjamin–Bona–Mahony equations in arbitrary dimension”, *Appl. Anal.*, **30**:1–3 (1988), 1–15.
- [20] T. Hagen, J. Turi, “On a class of nonlinear BBM-like equations”, *Comput. Appl. Math.*, **17**:2 (1998), 161–172.
- [21] G. Karch, “Large-time behavior of solutions to non-linear wave equations: higher-order asymptotics”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **22**:18 (1999), 1671–1697.
- [22] L. Liu, M. Mei, “A better asymptotic profile of Rosenau–Burgers equation”, *Appl. Math. Comput.*, **131**:1 (2002), 147–170.
- [23] Ya. Liu, W. Wan, Sh. Lü, “Nonlinear pseudoparabolic equations in arbitrary dimensions”, *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, **13**:3 (1997), 265–278.
- [24] L. A. Medeiros, M. G. Perla, “On global solutions of a nonlinear dispersive equation of Sobolev type”, *Bul. Soc. Bras. Math.*, **9**:1 (1978), 49–59.
- [25] M. Mei, “Long-time behavior of solution for Rosenau–Burgers equation. II”, *Appl. Anal.*, **68**:3–4 (1998), 333–356.
- [26] P. I. Naumkin, “Large-time asymptotic behaviour of a step for the Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **126**:1 (1996), 1–18.
- [27] M. A. Park, “On the Rosenau equation in multidimensional space”, *Nonlinear Anal.*, **21**:1 (1993), 77–85.
- [28] J. M. Pereira, “Stability of multidimensional traveling waves for a Benjamin–Bona–Mahony type equation”, *Differential Integral Equations*, **9**:4 (1996), 849–863.
- [29] L. Zhang, “Decay of solutions of generalized Benjamin–Bona–Mahony equations”, *Acta Math. Sinica (N.S.)*, **10**:4 (1994), 428–438.
- [30] X. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen*, Mathematische Lehrbücher und Monographien, II, Mathematische Monographien, **38**, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [31] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998; англ. пер.: G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii, *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **256**, Dekker, New York, 2003.
- [32] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально-операторные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.
- [33] Г. А. Свиридюк, В. Е. Фёдоров, “Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:5 (1995), 1130–1145; англ. пер.: G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, “Analytic semigroups with kernels and linear equations of Sobolev type”, *Siberian Math. J.*, **36**:5 (1995), 973–987.
- [34] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **215**, Dekker, New York, 1999.
- [35] U. Stefanelli, “On a class of doubly nonlinear nonlocal evolution equations”, *Differential Integral Equations*, **15**:8 (2002), 897–922.
- [36] А. Л. Гладков, “Единственность решения задачи Коши для некоторых квазилинейных псевдопараболических уравнений”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 356–362; англ. пер.: A. L. Gladkov, “Unique solvability of the Cauchy problem for certain quasilinear pseudoparabolic equations”, *Math. Notes*, **60**:3 (1996), 264–268.
- [37] А. И. Кожанов, “Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником”, *Матем. заметки*, **65**:1 (1999), 70–75; англ. пер.: A. I. Kozhanov, “Initial boundary value problem for generalized Boussinesq type equations with nonlinear source”, *Math. Notes*, **65**:1 (1999), 59–63.

- [38] С. И. Ляшко, *Обобщенное управление линейными системами*, Наукова думка, Киев, 1998; англ. пер.: S. I. Lyashko, *Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters*, Appl. Optimization, **69**, Kluwer, Dordrecht, 2002.
- [39] Д. А. Номировский, “О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными”, *Укр. матем. журн.*, 2004, №12, 1707–1716; англ. пер.: D. A. Nomirovskii, “On homeomorphisms realized by certain partial differential operators”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:12 (2005), 2017–2027.
- [40] С. Г. Пятков, “Краевые задачи для некоторых уравнений и систем, возникающих в теории электрических цепей”, *Актуальные проблемы современной математики*, **1**, Изд-во НИИ МИОО НГУ, Новосибирск, 1995, 121–133.
- [41] C. Guowang, W. Shubin, “Existence and non-existence of global solutions for nonlinear hyperbolic equations of higher order”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **36**:3 (1995), 475–487.
- [42] H. Begehr, D. Q. Dai, “Initial boundary value problem for nonlinear pseudoparabolic equations”, *Complex Variables Theory Appl.*, **18**:1–2 (1992), 33–47.
- [43] E. Di Benedetto, *Degenerate parabolic equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [44] R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Math. Surveys Monogr., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [45] H. Fujita, “On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ ”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, **13** (1966), 109–124.
- [46] И. Е. Егоров, “Разрешимость одной краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **23**:9 (1987), 1560–1567; англ. пер.: I. E. Egorov, “Solvability of a boundary value problem for a high-order equation of mixed type”, *Differ. Equ.*, **23**:9 (1987), 1075–1081.
- [47] И. Е. Егоров, В. Е. Федоров, *Неклассические уравнения математической физики высокого порядка*, Изд-во ВЦ СО РАН, Новосибирск, 1995.
- [48] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, 2001, 1–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
- [49] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987; англ. пер.: A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Exp. Math., **19**, de Gruyter, Berlin, 1995.
- [50] H. Amann, M. Fila, “A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition”, *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, **66**:2 (1997), 321–328.
- [51] S. Kaplan, “On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16**:3 (1963), 305–330.
- [52] H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of the formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51**:5 (1973), 371–386.
- [53] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 89–128; англ. пер.: M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, “Blow-up of solutions of a class of strongly non-linear dissipative wave equations of Sobolev type with sources”, *Izv. Math.*, **69**:4 (2005), 733–770.
- [54] А. М. Ильин, “О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени”, *УМН*, **16**:2 (1961), 115–121.

- [55] C. J. Amick, J. L. Bona, M. E. Schonbek, “Decay of solutions of some nonlinear wave equations”, *J. Differential Equations*, **81**:1 (1989), 1–49.
- [56] V. Bisognin, “On the asymptotic behavior of the solutions of a nonlinear dispersive system of Benjamin–Bona–Mahony’s type”, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7), **10**:1 (1996), 99–128.
- [57] J. L. Bona, L. Luo, “Decay of solutions to nonlinear dispersive wave equations”, *Differential Integral Equations*, **6**:5 (1993), 961–980.
- [58] J. L. Bona, L. Luo, “More results on the decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations”, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **1**:2 (1995), 151–193.
- [59] D. B. Dix, “The dissipation of nonlinear dispersive waves: the case of asymptotically weak nonlinearity”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:9–10 (1992), 1665–1693.
- [60] G. Karch, “Asymptotic behaviour of solutions to some pseudoparabolic equations”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **20**:3 (1997), 271–289.
- [61] M. Mei, “ L_q -decay rates of solutions for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations”, *J. Differential Equations*, **158**:2 (1999), 314–340.
- [62] M. Mei, C. Schmeiser, “Asymptotic profiles of solutions for the BBM–Burgers equations”, *Funkcial. Ekvac.*, **44**:1 (2001), 151–170.
- [63] R. Prado, E. Zuazua, “Asymptotic expansion for the generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation”, *Differential Integral Equations*, **15**:12 (2002), 1409–1434.
- [64] Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, “Задача Коши для уравнения типа Соболева со степенной нелинейностью”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:1 (2005), 61–114; англ. пер.: E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, “The Cauchy problem for an equation of Sobolev type with power non-linearity”, *Izv. Math.*, **69**:1 (2005), 59–111.
- [65] Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв, “Асимптотика для уравнения типа Соболева с критической нелинейностью”, *Дифференц. уравнения*, **43**:5 (2007), 655–668; англ. пер.: E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, “Asymptotics for a Sobolev type equation with a critical nonlinearity”, *Differ. Equ.*, **43**:5 (2007), 673–687.
- [66] И. А. Шишмарёв, “Об одном нелинейном уравнении типа Соболева”, *Дифференц. уравнения*, **41**:1 (2005), 138–140; англ. пер.: I. A. Shishmarev, “On a nonlinear Sobolev type equation”, *Differ. Equ.*, **41**:1 (2005), 146–149.
- [67] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [68] S. Kamin, L. A. Peletier, “Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **12**:3 (1985), 393–408.
- [69] В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский, “Об асимптотических ‘собственных функциях’ задачи Коши для одного нелинейного параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **126**:4 (1985), 435–472; англ. пер.: V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. A. Samarskii, “On asymptotic ‘eigenfunctions’ of the Cauchy problem for a nonlinear parabolic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **54**:2 (1986), 421–455.
- [70] M. Escobedo, O. Kavian, “Asymptotic behavior of positive solutions of a non-linear heat equation”, *Houston J. Math.*, **14**:1 (1988), 39–50.
- [71] M. Escobedo, O. Kavian, H. Matano, “Large time behavior of solutions of a dissipative semilinear heat equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **20**:7–8 (1994), 1427–1452.
- [72] A. Gmira, L. Veron, “Large time behavior of solutions of a semilinear parabolic equation in R^N ”, *J. Differential Equations*, **53**:2 (1984), 258–276.
- [73] O. Kavian, “Remarks on the large time behavior of a nonlinear diffusion equation”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **4**:5 (1987), 423–452.

- [74] E. Zuazua, “A dynamical system approach to the self-similar large time behavior in scalar convection-diffusion equation”, *J. Differential Equations*, **108**:1 (1994), 1–35.
- [75] E. Zuazua, “Some recent results on the large time behavior for scalar parabolic conservation laws”, *Elliptic and parabolic problems* (Pont-à-Mousson, 1994), Pitman Res. Notes Math. Ser., **325**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1995, 251–263.
- [76] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Vol. I, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto–London, 1978; O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, Vol. II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto–London, 1979.
- [77] Е. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [78] Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, Гостехиздат, М., Л., 1948; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.
- [79] Дж. Ватсон, *Теория Бесселевых функций*, ИЛ, М., 1949; пер. с англ.: G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge; Macmillan Company, New York, 1944.
- [80] А. И. Кожанов, “Параболические уравнения с нелинейным нелокальным источником”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:5 (1994), 1062–1073; англ. пер.: A. I. Kozhanov, “Parabolic equations with nonlocal nonlinear source”, *Siberian Math. J.*, **35**:5 (1994), 945–956.
- [81] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики”, *ЖВМ и МФ*, **43**:12 (2003), 1835–1869; англ. пер.: M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, “Three-dimensional nonlinear evolution equations of pseudoparabolic type in problems of mathematical physics”, *Comput. Math. Phys.*, **43**:12 (2003), 1765–1797.
- [82] М. Е. Schonbek, “The Fourier splitting method”, *Advances in geometric analysis and continuum mechanics* (Stanford, CA, 1993), Int. Press, Cambridge, MA, 1995, 269–274.
- [83] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, “Large time behavior of solutions to dissipative nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **130**:5 (2000), 1029–1043.
- [84] A. Matsumura, K. Nishihara, “Asymptotics toward the rarefaction wave of the solutions of Burgers' equation with nonlinear degenerate viscosity”, *Nonlinear Anal.*, **23**:5 (1994), 605–614.

Е. И. Кайкина (E. I. Kaikina)

National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics

E-mail: ekaikina@matmor.unam.mx

Поступила в редакцию

25.07.2008

П. И. Наумкин (P. I. Naumkin)

National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics

E-mail: pavelni@matmor.unam.mx

И. А. Шишмарёв (I. A. Shishmarev)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: shish@voxnet.ru